

## ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ИЗОБРАЖЕНИЙ

И.Н. Жукова, В.С. Малых

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

На простых примерах рассматривается метод электрических изображений и обсуждается смысл термина «изображение».

В журнале Квант №1 за 1996 год описывался метод электрических изображений и приводилось множество примеров его использования [1].

Метод электрических изображений предложил в 1845 году английский физик Уильям Томсон (лорд Кельвин) для учета поля наведенных зарядов при помещении проводника в электрическое поле точечного заряда. Он позволяет исходную систему «точечный заряд – проводник» заменить более простой системой «точечный заряд – его изображения». При этом поверхность проводника с потенциалом  $\varphi = const$  в первой задаче должна совпадать с эквипотенциальной поверхностью  $\varphi = const$  во второй задаче.

В данной статье к задаче о точечном заряде, находящемся вблизи заземленной сферы мы подойдем, рассмотрев картину силовых линий поля двух неравных по величине разноименных точечных зарядов  $+q$  и  $-q'$  ( $q/q' = \gamma$ ,  $\gamma > 1$ ) [2].

Пусть заряды находятся в точках с координатами  $(0,0,0)$  и  $(r,0,0)$ . Радиус – вектор  $\vec{r}$  задает положение заряда  $+q$  в системе отсчета, связанной с отрицательным зарядом  $-q'$ , а радиус – вектор  $\vec{r}_A(x, y, z)$  задает положение произвольной точки  $A$  (рис. 1а).

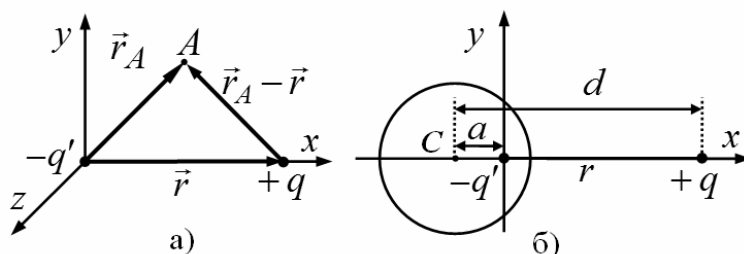


Рис.1

Потенциал результирующего поля в точке  $A$  находим по принципу суперпозиции суммированием потенциалов  $\varphi_i$  поля каждого заряда в точке  $A$ :

$$\varphi = k \sum_{i=1}^2 \frac{q_i}{|\vec{r}_A - \vec{r}_i|} = k \left[ -\frac{q'}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{q}{\sqrt{(x-r)^2 + y^2 + z^2}} \right]. \quad (1)$$

Из (1) при условии  $\varphi = 0$  получаем уравнение поверхности нулевого потенциала, которое описывает сферу:

$$\left[ x + \frac{r}{\gamma^2 - 1} \right]^2 + y^2 + z^2 = \frac{r^2 \gamma^2}{(\gamma^2 - 1)^2}. \quad (2)$$

Сравнивая (2) с уравнением сферы в общем виде,

$$(x - x_c)^2 + (y - y_c)^2 + (z - z_c)^2 = R^2,$$

видим, что центр сферы с радиусом  $R$  находится в точке  $C(x_C, 0, 0)$  (рис.16):

$$x_C = -a = -\frac{r}{\gamma^2 - 1}; \quad R = \frac{\gamma r}{\gamma^2 - 1}. \quad (3)$$

В курсе общей физики вводится понятие силовой линии электростатического поля, но не дается алгоритм ее построения. В рамках вузовского курса «Векторный анализ» студенты получают дифференциальное уравнение силовой линии:

$$\frac{dx}{E_x} = \frac{dy}{E_y} = \frac{dz}{E_z}.$$

Решение этого уравнения для рассматриваемой нами системы зарядов в плоскости  $xOy$  имеет вид:

$$-\frac{q'(x+b)}{\sqrt{x^2+y^2}} + \frac{q(x-b)}{\sqrt{(x-r)^2+y^2}} = C, \quad (4)$$

где  $C$  – постоянная величина. Если необходимо провести силовую линию через заданную точку пространства (например, точку  $A(x_1, y_1, z_1)$ ), то сначала нужно из уравнения (4) найти постоянную  $C_1(x_1, y_1, z_1)$ , а затем, подставляя  $C_1$  в (4), построить силовую линию  $y(x)$ . Результат такого построения, сделанного с помощью математического пакета Maple, приведен на рис. 2.

Как видно на рис. 2,

$$|x_C| = a + b \text{ и } d = a + 2b, \quad (5)$$

тогда с учетом (3) имеем:

$$|x_C| = a + b \Leftrightarrow \frac{1 + \alpha^2}{1 - \alpha^2} \cdot b = a + b \Leftrightarrow b = \frac{a(1 - \alpha^2)}{2\alpha^2}. \quad (6)$$

С учетом (6) перепишем  $R$  из (3) и  $d = a + 2b$ :

$$R = \frac{2\alpha b}{(1 - \alpha^2)} \Leftrightarrow R = \frac{2\alpha}{(1 - \alpha^2)} \cdot \frac{a(1 - \alpha^2)}{2\alpha^2} = \frac{a}{\alpha} \Leftrightarrow \alpha = \frac{a}{R};$$

$$d = a + 2b = a + 2 \cdot \frac{a(1 - \alpha^2)}{2\alpha^2} = \frac{a}{\alpha^2} \Leftrightarrow \alpha^2 = \frac{a}{d}.$$

Таким образом, согласно методу зеркальных изображений, эквипотенциальную сферическую поверхность нулевого потенциала можно заменить поверхностью заземленной сферы – поле вне сферы от этого не изменится. И наоборот, если в поле заряда  $q_2$  помещена заземленная проводящая сфера радиуса  $R$ , центр которой находится от заряда  $q_2$  на расстоянии  $d$ , то наведенные на ней заряды можно заменить зарядом - изображением  $q_1$ , отстоящим от центра сферы на расстояние  $a$ , причем

$$\alpha = \frac{q_1}{q_2} = \frac{a}{R} \text{ и } \alpha^2 = \frac{a}{d} \Leftrightarrow a = \frac{R^2}{d}. \quad (7)$$

Рассматривая картину силовых линий, изображенную на рисунке 2, можно заметить, что заземленная проводящая сфера в поле точечного заряда  $q_2 = +q$  будет заряжена отрицательно по всей поверхности, о чем говорит направление силовых линий - во всех точках поверхности они «заканчиваются». Кстати, очень часто в учебниках по электричеству подчеркивается, что силовые линии электростатического поля начинаются и заканчиваются либо на зарядах, либо в бесконечности. Но есть еще точки, в которых линии напряженности начинаются и заканчиваются – это точки ветвления [2] и в них напряженность равна нулю. Например, на рисунке 2, это точка  $B$ .

Напряженность поля в точках, расположенных на оси слева от заряда  $q_1$ , можно вычислить по принципу суперпозиции полей, таким образом,

$$E_x = kq \left[ \frac{\alpha}{(x+b)^2} - \frac{1}{(x-b)^2} \right] = -\frac{kq[(1-\alpha)x^2 + 2b(1+\alpha)x + (1-\alpha)b^2]}{(x^2 - b^2)^2}, \quad (8)$$

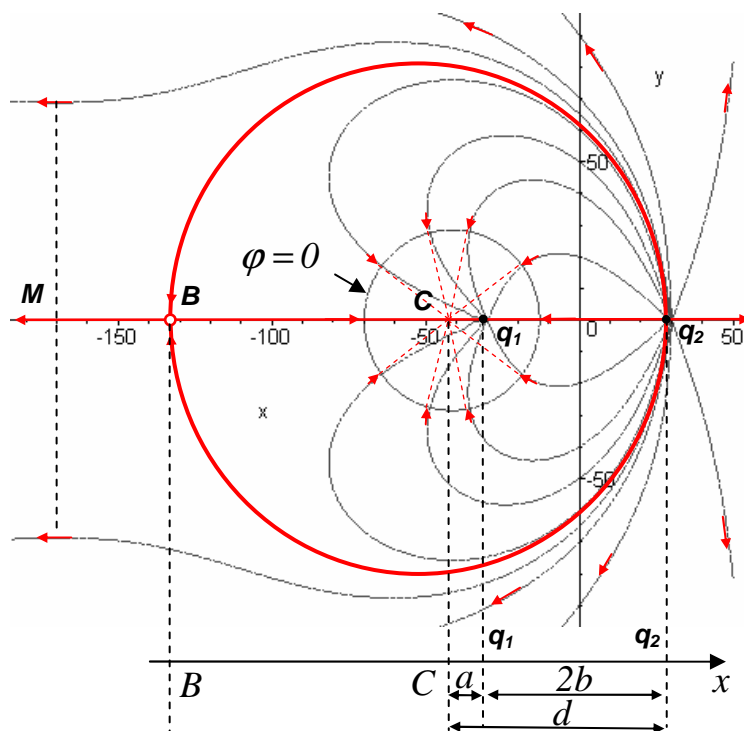


Рис.2. Картина силовых линий и линия нулевого потенциала при  $\gamma = 2$  и  $r = 20$ .

а после решения квадратного уравнения можно найти координату точки  $B$ :

$$x_B = \frac{-b(1 + \alpha) - 2b\sqrt{\alpha}}{1 - \alpha}$$

Густота линий напряженности, как известно, характеризует величину напряженности поля. Из того, что в точке  $B$  напряженность равна нулю, а в бесконечности слева от заряда  $q_1$  она также равна нулю, можно заключить, что в некоторой точке  $M \in ]-\infty, x_B]$  напряженность будет максимальна, о чем говорит хорошо видное сгущение линий на рисунке 2 слева от точки  $B$ .

Следует отметить, что картина силовых линий поля точечных зарядов часто приводится в учебной литературе, но в области точки ветвления она не изображается. На наш взгляд, изображение точек ветвления улучшило бы информативную сторону картин силовых линий. На рисунке 3 к точке ветвления (в плоскости сечения) подходят четыре силовые линии: две силовые линии в этой точке начинаются, а две заканчиваются. В теории поля точка ветвления интересна еще и тем, что эквипотенциальная поверхность в ней пересекает сама себя (рис. 3).

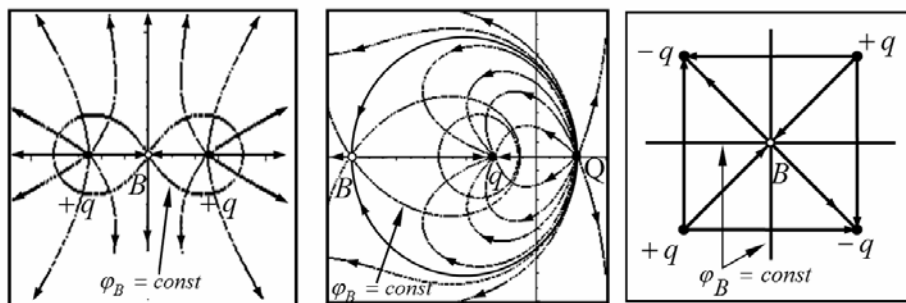


Рис.3.

В работе [4] было показано, что когда проводящая заземленная плоскость находится вблизи точечного заряда  $+q$ , наведенные на ее поверхности отрицательные заряды создают вне проводника поле, которое не отличается от поля точечного заряда  $-q$ , который называется зеркальным изображением заряда  $+q$  (рис. 4а).

Говорят, что заряд  $-q'$  в случае проводящей заземленной сферы, находящейся в поле точечного заряда  $+q$ , тоже является электрическим изображением заряда  $+q$  (рис. 4б), хотя термин «изображение» в этом случае не столь очевиден. Покажем, что термин «изображение» в этом случае также оправдывается.

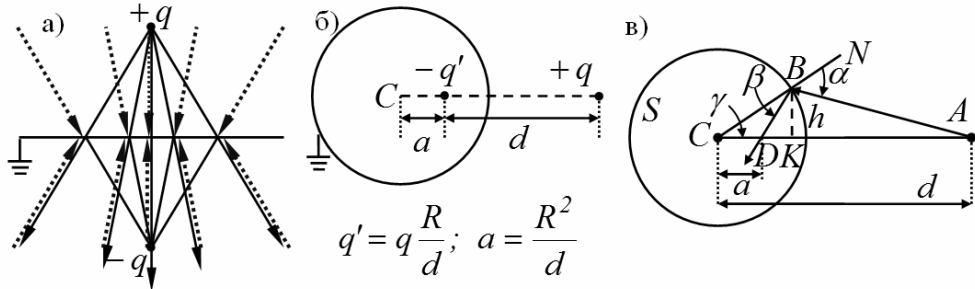


Рис.4.

Оказывается, в данном случае точку  $D$  можно рассматривать как оптическое изображение точечного источника света  $A$ , полученное в результате преломления на сферической поверхности  $S$ , которой свойственно «отрицательное» преломление (рис. 5), о котором журнал «Квант» писал в выпуске 94 «Библиотечки Кванта» [5].

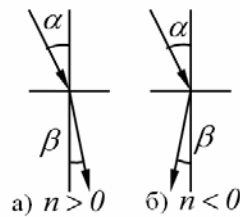


Рис.5

Как и в оптике ограничимся параксиальными лучами, т.е. будем считать углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  малыми. Тогда:

$$\gamma \approx \operatorname{tg} \gamma = \frac{h}{|CK|} \approx \frac{h}{R},$$

$$\gamma + \beta = \angle BDA \approx \operatorname{tg} \angle BDA = \frac{h}{|DK|} \approx \frac{h}{R-a}, \quad \alpha - \gamma = \angle BAC \approx \operatorname{tg} \angle BAC = \frac{h}{|AK|} \approx \frac{h}{d-R}.$$

Получаем и решаем систему уравнений:

$$\left. \begin{array}{l} \gamma = \frac{h}{R}, \\ \gamma + \beta = \frac{h}{R-a}, \\ \alpha - \gamma = \frac{h}{d-R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \frac{h}{R} + \beta = \frac{h}{R-a}, \\ \alpha - \frac{h}{R} = \frac{h}{d-R} \end{array} \right\} \Rightarrow \left. \begin{array}{l} \beta = h \left( \frac{1}{R-a} - \frac{1}{R} \right), \\ \alpha = h \left( \frac{1}{d-R} + \frac{1}{R} \right) \end{array} \right\} \Rightarrow \frac{\alpha}{\beta} = \frac{d(R-a)}{a(d-R)}.$$

Учтем теперь (7), а именно что  $ad = R^2$ . Тогда:

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{dR - R^2}{R^2 - R^3/d} = \frac{d}{R},$$

то есть любой из параксиальных лучей, вышедший из точки  $A$  после преломления в произвольной точке  $B$  обязательно пройдет через точку  $D$ . Выполняется закон преломления:

$$\frac{\sin \alpha}{\sin(-\beta)} = -\frac{d}{R} = \text{const},$$

т.е. показатель преломления здесь оказывается отрицательным.

### Литература

1. Черноуцан А.И. Метод электростатических изображений // Квант. – 1996. – №1. – С. 42-44.
2. Жукова И.Н., Тлячев В.Б. Об одной задаче электростатики // Труды ФОРА. – 1997. – №2. – С. 131-141.
3. Говорков В.А., Купалян С.Д. Теория электромагнитного поля в упражнениях и задачах. – М.: Высшая школа, 1970. – 304 с.
4. Жукова И.Н., Малых В.С. К вопросу об энергии электростатического поля // Труды ФОРА. – 1998. – №3. – С. 66-82.
5. Белотелов В.И., Звездин А.К. Фотонные кристаллы и другие метаматериалы. – М.: Бюро Квантум, 2006. - Библиотечка «Квант». Вып. 94. Приложение к журналу «Квант» №2/2006.

### VARIATIONS ON ELECTRIC PICTURE THEME

I.N. Zhukova, V.S. Malykh

We consider the electrical images method on the simple examples and discusses the meaning of the term «image».