ВОПРОСЫ ТЕОРИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА В ТРУДАХ Л.Ж. ПАЛАНДЖЯНЦА

(к 60-летию со дня рождения и 30-летию научной деятельности)

В.А. Козлов, С.К. Куижева, В.Б. Тлячев

Армавирская государственная педагогическая академия
Майкопский государственный технологический университет
Адыгейский государственный университет

В статье излагаются основные результаты по теории мультипликативного интеграла за период с 1982 по 2012 гг., полученные Л.Ж. Паланджянцем применительно к дифференциальной геометрии, теории представлений групп и алгебр Ли, уравнениям нулевой кривизны и новым методам вычисления мультипликативного интеграла в конечном виде.

Цель данной публикации состоит в рассмотрении трудов Л.Ж. Паланджянца по теории мультипликативного интеграла, научная новизна которых состоит в применении конструкции мультипликативного интеграла к различным задачам современной математики и на примере полученных результатов показать перспективные направления развития этой теории. Данную статью можно рассматривать как обращение к занятиям в этой замечательной области математики.

Следует отметить, что в современной математической литературе довольно мало работ по теории мультипликативного интеграла. О том, что такие работы актуальны и востребованы, говорят многочисленные приложения теории мультипликативного интеграла, а также интерес зарубежных ученых, в частности, профессора А. Тарантоллы (Albert Tarantola) из парижского Института физики Земли (Institut de Physique du Globe de Paris) к публикациям Левона Жирайровича.

Основными результатами исследований Л.Ж. Паланджянца по теории мультипликативного интеграла являются следующие направления:

– Изложение фундаментальных понятий римановой геометрии в терминах мультипликативного интеграла.

– Определение всех мультипликативно-интегрируемых римановых пространств.

– Определение алгебр, замкнутых относительно кривизны криволинейного мультипликативного интеграла.

– Определение вариации мультипликативного интеграла и установление аналогов уравнений Эйлера-Лагранжа, Гамильтона, оператора Якоби.

– Установление связи между мультипликативным интегралом и соответствующими уравнениями нулевой кривизны.

– Применение мультипликативного интеграла к задачам теории представлений групп и алгебр Ли.

– Новые приёмы вычисления мультипликативного интеграла.

Первая работа Л.Ж Паланджянца относится к применению мультипликативного интеграла в римановой геометрии [1]. В этой статье рассмотрены примеры римановых пространств, коэффициенты связности которых мультипликативно интегрируемы в конечном виде. Продолжением этой работы является статья в журнале «Дифференциальные уравнения» [2], в которой доказано следующее утверждение: все двумерные римановы пространства являются мультипликативно интегрируемыми и соответствуют случаю Лаппо-Данилевского для линейных систем дифференциальных уравнений.

В современной математике важное значение приобретают задачи, связанные с геометрическими аспектами теории мультипликативного интеграла. Многие из этих задач известны, однако при их рассмотрении игнорируется природа мультипликативного интеграла в математических понятиях, присутствующих в данных задачах. В терминах мультипликативного интеграла естественно формулируются задачи, связанные с такими понятиями теории дифференциальных уравнений, дифференциальной и алгебраической геометрии, теории представлений групп и алгебр Ли, как соответственно понятия системы линейных дифференциальных уравнений, калибровочные преобразования, уравнения нулевой кривизны, уравнение Эйлера-Лагранжа, связность, кривизна, экспоненциальное отображение.

Плодотворность концепции мультипликативного интеграла состоит в систематическом применении ее к разнородным задачам современной математики. Многие из этих задач известны, однако часто при их рассмотрении игнорируется природа мультипликативного интеграла как предела произведений множителей определенного вида. А между тем, как известно, переход от дифференциального исчисления к интегральному необходим уже на уровне аксиоматического подхода. Достаточно упомянуть дифференциальную геометрию с операцией ковариантного дифференцирования. Внесение в дифференциальную геометрию операции мультипликативного интегрирования позволяет определить в дифференциальной геометрии операцию, обратную ковариантному дифференцированию. Это обстоятельство превращает дифференциальную геометрию в геометрический анализ. В стандартной дифференциальной геометрии конструкция мультипликативного интегрирования отсутствует.

Например, теорема Риччи (инвариантность метрического тензора) в терминах мультипликативного интеграла выглядит следующим образом.

Теорема 1. Пусть $g=(g_{ij}), i, j=1,2,...,n$ – матрица метрического тензора; $\Gamma_k=(\Gamma^i_{jk})$, $k=1,2,...,n$ – коэффициенты связности, согласованные с метрикой в пространстве переменных $x_1, x_2, \cdots x_n$; $\mathrm{H}=\overset{\cup}{\int\limits_c} \mathrm{E}+\Gamma_k dx^k$ – криволинейный мультипликативный интеграл. Тогда $\nabla_k g_{ij}=0 \Leftrightarrow g=\mathrm{H}^T g_0 \mathrm{H}$, где $g_0=\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{12} & c_{22} \end{pmatrix}$ – постоянная матрица; $\det g_0=1$, T – транспонирование.

В дальнейшем Л.Ж. Паланджянц не раз обращается к этой тематике и ее физическим приложениям [25, 31-35]. В частности, в работах [32, 35] предложен алгоритм вычисления квадратов модулей элементов S-матрицы с помощью углов Эйлера.

Работы [3-6, 12, 14, 41] посвящены тематике мультипликативного интеграла и уравнений нулевой кривизны. Оказалось, что для всех уравнений нулевой кривизны подынтегральная дифференциальная форма является точной (подынтегральная функция – полной мультипликативной производной), а криволинейный мультипликативный интеграл равен единице. Поэтому возникла задача в случае уравнений нулевой кривизны говорить об интегрируемости в конечном виде соответствующего обыкновенного мультипликативного интеграла (случаи уравнения Кортевега-де Фриза и цилиндрического уравнения Кортевега-де Фриза).

Для мультипликативного интеграла

$$\overset{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & 0 \end{pmatrix} dx, \tag{1}$$

где $a_{12}(x), a_{21}(x)$ – некоторые гладкие функции, достаточным условием интегрируемости является условие

$$\int a_{12}(x)dx \int a_{21}(x)dx=-2,$$

которое совпадает с преобразованием Бэклунда и приводит к решению уравнения Кортевега-де Фриза $u_t+u_{xxx}-6uu_x=0$: $u=2k^2 \Big/ sh^2 \int kdx+\frac{k^2}{4}$.

Для мультипликативного интеграла

$$\overset{\frown}{\int} E+\begin{pmatrix} 0 & k/2 \\ k/2(u-x/12t) & 0 \end{pmatrix} dx,\ k=k(t)$$

это же условие приводит к решению цилиндрического уравнения Кортевега-де Фриза $u_t=u_{xxx}-6uu_x-u/2t$:

$$u = 2c_1^2 \Big/ t\, sh^2 \frac{2c_1}{\sqrt{t}}\left(x + \sqrt{t} - 5c_1^2 + c_2\right) + \left(x + 3c_1^2\right)\Big/ 12t .$$

Эта задача впервые была решена в работе [5] и продолжена в [17]. Здесь же обнаружилась связь между калибровочными преобразованиями и преобразованием Бэклунда. Обобщением уравнений нулевой кривизны послужили уравнения, порожденные коммутирующими дифференциальными операторами, которые изучались С.К.Куижевой. Получены результаты по уравнениям типа Кортевега-де Фриза-Бюргерса и совместно с С.К.Куижевой предложен метод характеристических уравнений для алгебраических дифференциальных уравнений [46].

Применение мультипликативного интеграла к интегрированию нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных основано на теореме о существовании потенциальной функции криволинейного мультипликативного интеграла. Такая возможность достигается благодаря некоторой реализации бимодуля Кричевера-Дринфельда, в которой в качестве свободной образующей берется функция, определенным образом связанная с потенциальной функцией криволинейного мультипликативного интеграла. Другое приложение мультипликативного интеграла к интегрированию уравнений нулевой кривизны основано на применении формулы мультипликативного интегрирования по частям:

$$\overset{\frown}{\int} E + (B + C)dt = \overset{\frown}{\int} E + Bdt \cdot \overset{\frown}{\int} E + Ad(\overset{\frown}{\int} E + Bds)\{C\}dt,$$

где $Ad(g)\{f\} = g^{-1} fg$.

Многократное применение этой формулы позволяет выявить достаточные условия, при выполнении которых соответствующий мультипликативный интеграл вычисляется в конечном виде. При этом условия интегрируемости соответствуют тем условиям, при которых $Ad(g)\{f\} = g^{-1} fg$ приводится к треугольному виду. Специальным образом проведенное мультипликативное интегрирование по частям даёт возможность получать решения уравнений нулевой кривизны, естественным образом связанных с исходным мультипликативным интегралом. В частности, для уравнения Кортевега-де Фриза, для цилиндрического уравнения Кортевега-де Фриза условие интегрируемости соответствующего мультипликативного интеграла совпадает с алгебраическим соотношением между решениями, получаемым преобразованием Бэклунда.

Изучению кривизны мультипликативного интеграла посвящены следующие работы [9, 20, 47]. Работы [10, 11, 15, 16, 30] посвящены определению и свойствам алгебр, замкнутых относительно кривизны.

Рассматривается криволинейный мультипликативный интеграл

$$\overset{\frown}{\int_{\gamma}} E + P(x, y)dx + Q(x, y)dy , \qquad (2)$$

где $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ − непрерывно дифференцируемы функции, определенные в области $D \subset R^2$ со значениями в алгебре квадратных матричных функций $Mat(n, R)$; γ – гладкая кривая. Тем самым обобщена операция коммутатора $[P,Q] = PQ - QP$ в случае алгебр Ли на операцию кривизны: $K(P,Q) = Q_x - P_y + PQ - QP$ − кривизна интеграла (2).

В алгебре всех матричных функций *n*-го порядка $Mat(n, R)$ ищется подалгебра *M*, замкнутая относительно операции кривизны, то есть, если $P, Q \in M$, то и $K(P,Q) \in M$.

Подалгебра *M* определена как множество всех матричных функций *n*-го порядка, обладающих общим постоянным собственным подпространством, то есть

$$M = \left\{\left(m_j^i\right) \subset Mat(n) \middle| c_i m_j^i = \lambda(m) c_j\right\},$$

где $c = \left(c_1, c_2, ..., c_n\right)$ – постоянный вектор, $\lambda(m)$ – соответствующее собственное значение матрицы $m = \left(m_j^i\right)$.

В случае $n = 2$ и $n = 3$ проведена классификация алгебр, замкнутых относительно кривизны. В частности, при $n = 3$ получается 7-мерная алгебра Ли с коммутационными соотношениями:

$\left[\xi_i^k, \xi_j^k\right] = 0, i \neq j$, $\left[\xi_k^i, \xi_k^j\right] = \frac{a_j}{a_k}\xi_k^i - \frac{a_i}{a_k}\xi_k^j; i \neq j$, $\left[\xi_k^i, \xi_j^k\right] = \frac{a_i}{a_k}\xi_i^k - \xi_j^i; i \neq j$, (по k нет суммирования), $\left[\xi_2^1, \xi_1^2\right] = E + \frac{a_1}{a_2}\xi_1^2 - \frac{a_2}{a_1}\xi_2^1$, $\left[\xi_2^3, \xi_3^2\right] = E + \frac{a_3}{a_2}\xi_3^2 - \frac{a_2}{a_3}\xi_2^3$, $\left[\xi_3^1, \xi_1^3\right] = \frac{a_1}{a_3}\xi_1^3 - \frac{a_3}{a_1}\xi_3^1$, где a_i – постоянные.

Л.Ж. Паланджянц обнаружил приложение алгебр, замкнутых относительно кривизны в теории линейных дифференциальных уравнений, а именно, в работах Л. Шлезингера по монодромии.

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{cases} \varphi y_1' = y_1 g_{11}(x) + y_2 g_{21}(x); \\ \varphi y_2' = y_1 g_{12}(x) + y_2 g_{22}(x), \end{cases} \tag{3}$$

где $g_{ij}(x)$ – целые функции порядка $n-1$, $\varphi = (x-a_1)(x-a_2)\ldots(x-a_n)$.

Пусть $z = h_1 y_1 + h_2 y_2$, где h_1, h_2 – постоянные.

Если z удовлетворяет линейному однородному дифференциальному уравнению типа Фукса (т.е. все особые точки, в том числе и $x = \infty$, являются регулярными), для которого $z_1 = h_1 y_{11} + h_2 y_{12}$, $z_2 = h_2 y_{21} + h_2 y_{22}$, то матрицы (y_{ij}) являются интегральной матрицей системы (3), то есть мультипликативным интегралом, соответствующим этой системе.

Определитель фундаментальной системы

$$z_1 \frac{dz_2}{dx} - z_2 \frac{dz_1}{dx} = \exp\left(\int \frac{(g_{11} + g_{22})}{\varphi} dx\right)\left(h_1 \frac{h_1 g_{21} - h_2 g_{11}}{\varphi} + h_2 \frac{h_1 g_{22} - h_2 g_{12}}{\varphi}\right),$$

так что несущественно особые точки уравнения второго порядка выражаются через корни уравнения

$$h_1^2 g_{21} + h_1 h_2 (g_{22} - g_{11}) - h_2^2 g_{12} = 0. \tag{4}$$

Л. Шлезингер показал, что с помощью условия (4) из уравнений (2) можно получить дифференциальные уравнения, для которых представление монодромии не зависит от a_k. Л.Ж.Паланджянц доказал, что условие (4) обеспечивает принадлежность матрицы системы (3) алгебре, замкнутой относительно кривизны.

Работы [24, 26, 47] посвящены вариации криволинейного мультипликативного интеграла.

Рассматривается криволинейный мультипликативный интеграл:

$$S[\gamma] = \overset{\cup}{\int_{\gamma}} \mathrm{E} + L(x, \dot{x})dt, \tag{5}$$

где $\gamma = x^i = x^i(t)$ – гладкая кривая, $L = L(x, \dot{x})$ – гладкая матричная функция n-го порядка.

Пусть $\eta^i = \eta^i(t)$, $a \le t \le b$, любая гладкая функция такая, что $\eta^i(a) = \eta^i(b) = 0$.

Пусть $\gamma + \varepsilon\eta$ - это кривая $x^i = x^i(t) + \varepsilon\eta^i(t)$, близкая к кривой $\gamma(t)$ при малом ε.

Выражение

$$D_\varepsilon S[\gamma + \varepsilon\eta]\big|_{\varepsilon=0} = \lim_{\varepsilon=0} \frac{1}{\varepsilon}\left(S^{-1}[\gamma] S[\gamma + \varepsilon\eta] - E\right)$$

называется вариационной производной интеграла (5).

Показано, что условие $D_\varepsilon S[\gamma + \varepsilon\eta]\big|_{\varepsilon=0} = 0$ равносильно уравнению:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) + \left[\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}, L\right] = 0, \tag{6}$$

которое можно рассматривать как аналог уравнения Эйлера-Лагранжа.

Уравнение (6) представляет собой условие нулевой кривизны мультипликативного интеграла:

$$\overset{\cup}{\int} E + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} dx + L dt = E .$$

При этом существует потенциальная функция $\Phi(x,t)$, такая, что

$$\begin{cases} \dfrac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \Phi^{-1} \dfrac{\partial \Phi}{\partial x} \\ L = \Phi^{-1} \dfrac{\partial \Phi}{\partial t} \end{cases} . \tag{7}$$

Уравнения (7) можно рассматривать как аналог уравнений Гамильтона в случае переменных x и $\dot{x}$.

Найдены аналоги второй вариации и аналога преобразования Лежандра.

В работах [8, 13,18, 22, 29, 43] рассматривается приложение мультипликативного интеграла в теории представлений групп и алгебр Ли.

Исследуется теорема Лиувилля для представления алгебры Ли типа A_1, со старшим весом $\overset{k}{\circ}$, и $\overset{k}{\circ}-\circ$, $k \in N$, $\dim \overset{k}{\circ} = k+1$ и $\dim \overset{k}{\circ}-\circ = \frac{(k+1)(k+2)}{2}$. Показано, что симметрическая квадратичная форма от двух и трех переменных является решением линейного дифференциального уравнения соответствующего порядка. Аналогичная задача решена для представления алгебры Ли типа A_2, со старшим весом $\circ - \overset{1}{\circ} - \circ - \cdots - \circ - \circ$.

Изучаются калибровочные преобразования подынтегральной матричной функции из алгебры Ли типа A_1. Основной результат утверждает, что калибровочное преобразование подынтегральной матричной функции, заданной представлением алгебры Ли со старшим весом $\overset{k}{\circ}$, $k \in N$ в соответствующую сопровождающую матрицу, является треугольным.

В работе [22] рассматривается проективный аналог теоремы Лиувилля. Вместо линейного дифференциального уравнения изучается уравнение Риккати, а вместо квадратичной формы – отношение производной решения к решению.

О естественном возникновении мультипликативного интеграла в прикладных задачах свидетельствует следующий факт. При исследовании движения твердого тела в присутствии внешних сил, уравнение Эйлера, которое описывает данное движение, представляет собой уравнение нулевой кривизны некоторого криволинейного мультипликативного интеграла. Кривизна этого интеграла совпадает с суммой моментов сил, действующих на тело. К физическим приложениям мультипликативного интеграла следует также отнести теорию S-матрицы, явления ядерного квадрупольного резонанса …

Основные результаты работ по теории мультипликативного интеграла докладывались на научном семинаре по векторному и тензорному анализу им. П.К. Рашевского при Московском государственном университете, на научном семинаре «Современные проблемы геометрии и механики» при Московском государственном университете, на семинаре кафедры геометрии Казанского государственного университета, на научных конференциях различного уровня в г. Майкопе (АГУ, МГТУ), г. Махачкале (ДГУ), на конференции, посвященной 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского в г. Одессе (ОГУ), на международной конференции, посвященной 90-летию со дня рождения Г.Ф.Лаптева в г. Москве, на конференции «Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики» в г. Нальчике (НИИ ПМА КБНЦ РАН), на конференции «Математика и ее приложения. Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы международной научно-практической конференции». – Орел, Воронеж, 2011.

В настоящее время Левон Жирайрович продолжает активно работать в области мультипликативного интегрирования.

Желаем ему успехов и новых открытий.

Литература

1. О криволинейном мультипликативном интеграле в римановых пространствах. //Дифференц. геометрия и прил. – М., 1982, с. 128-139. Деп. в ВИНИТИ 22.03.83, № 1442–83Деп.
2. Об одном приеме вычисления мультипликативного интеграла методами теории поверхностей. //Дифференц. уравнения, 1983, т.19, № 9, с. 1630–1632.
3. Мультипликативный интеграл и некоторые классы дифференциальных уравнений в частных производных. // В сб.: «Прикладные вопросы дифференциальной геометрии», М., 1983. Деп. в ВИНИТИ 11.10.83, № 5570-82Деп, с.95-100. (Совместно с О.В.Мантуровым).
4. Мультипликативный интеграл и уравнения нулевой кривизны. В сб.: «Дифференциальная геометрия и алгебры Ли», М., 1984. Деп. в ВИНИТИ 17.04.84, № 2384-84Деп, с.11-18. (Совместно с О.В.Мантуровым).
5. О геометрических приложениях мультипликативного интеграла. //Некоторые прилож. дифференц. геометрии. – М.,1985, с. 94-117, Деп. в ВИНИТИ 25.06.85, № 4531–85Деп.
6. Мультипликативный интеграл и некоторые его приложения. //Пространства над алгебрами и некоторые вопросы теории сетей. – Уфа, 1985, с. 160–163.
7. Геометрические приложения мультипликативного интеграла. Автореферат кандидатской диссертации.– М., 1985.
8. Об одной теореме Лиувилля. //Тензорные инварианты. – М., 1986, с. 68–72. - Деп. в ВИНИТИ 09.09.86, № 6553–В.
9. О кривизне мультипликативного интеграла. //Инвариант. тензоры на однород. пространствах. – М., 1987, с. 98-102. Деп. в ВИНИТИ 28.05.87, № 3843–В87.
10. Об алгебрах, замкнутых относительно кривизны. //Дифференциальная геометрия и мультипликативный интеграл.– М.,1989, с. 72–84. Деп. в ВИНИТИ 17.05.89, №3299–В89.
11. О некоторых алгебрах, замкнутых относительно кривизны. //Тезисы региональной теоретической конференции. Майкоп, 1990, с. 249–250.
12. Об уравнении Абеля второго рода. // В сб.: «Функционально-дифференциальные уравнения. Тезисы докладов.» – Махачкала, 1991, с.125.
13. К теореме Лиувилля о линейных дифференциальных уравнениях. //Дифференциальные уравнения, Минск, 1992, т. 22, № 10, с. 1733–1736.
14. О дифференциальном уравнении Абеля второго рода. //Дифференциальные уравнения, Минск, 1992, т. 22, № 12, с. 2187–2188.
15. Об алгебрах Ли, замкнутых относительно кривизны. // В сб.: «Геометрия обобщенных пространств.» – Пенза, 1992, с. 65–68.
16. О некоторых алгебрах Ли, замкнутых относительно кривизны. // В сб.: «Республиканская научно-методическая конференция, посвященная 200-летию со дня рождения Н.И.Лобачевского. Тезисы докладов. Часть 1.» – Одесса, 1992, с. 85.
17. Мультипликативное интегрирование по частям и преобразование Бэклунда. // Труды Физического общества Республики Адыгея, 1996, № 1, с. 65–75.
18. О кососимметрических формах как решениях линейных дифференциальных уравнений. // Труды Физического общества Республики Адыгея, 1996, № 1, с. 76–80.
19. О треугольных калибровочных преобразованиях. // Труды Физического общества Республики Адыгея, 1997, № 2, с. 41–43.
20. О кривизне криволинейного мультипликативного интеграла. // Труды Физического общества Республики Адыгея, 1997, № 2, с. 44–48.
21. Геометрия мультипликативного интеграла. Учебное пособие по спецкурсу. – Майкоп, 1997. 94 с.
22. Об одной задаче I.Katsugu. // Труды Физического общества Республики Адыгея, 1998, № 3, с. 27–29.
23. О мультипликативном интегрировании матричных функций, полиномиально зависящих от параметра. // Труды Физического общества Республики Адыгея, 1998, № 3, с. 36–40.
24. Вариация мультипликативного интеграла. // Труды Физического общества Республики Адыгея, 1998, № 3, с. 91–95.
25. Основные понятия римановой геометрии в терминах мультипликативного интеграла.// Труды физического общества республики Адыгея. Майкоп, 1999, № 4, с.40-50.

26. Вариация мультипликативного интеграла. Научно-исследовательский семинар по векторному и тензорному анализу и приложениям к геометрии, механике и физике имени П.К. Рашевского. // Вестн. Моск. ун-та. 2000, Сер. 1, Математика. Механика. С. 78.
27. Геометрические аспекты теории мультипликативного интеграла. /Труды геометрического семинара, Казань, 2003, вып. 24. с.197.
28. Геометрические аспекты теории мультипликативного интеграла. Заседание семинара «Актуальные проблемы геометрии и механики» под руководством проф. Д. В. Георгиевского, проф. В. В.Трофимова и с.н.с. М. В. Шамолина 14 (29 октября 1999 г.) в рамках Международной конференции «Инвариантные методы исследования на многообразиях структур геометрии, анализа и математической физики». С.307.
29. Representations of Lie algebras and integrations of system of linear differential equations.// Труды физического общества республики Адыгея. Майкоп, 2001, № 6, с. 132-134.
30. О некоторых свойствах алгебр, замкнутых относительно кривизны. //Труды физического общества республики Адыгея. Майкоп, 2002, № 7, с.83-85.
31. К вычислению S-матрицы методами сферической геометрии и мультипликативного интеграла. //Труды МГОУ, 2005, № 2, с. 37-46.
32. К вычислению S-матрицы методами сферической геометрии и мультипликативного интеграла. //Труды физического общества республики Адыгея. Майкоп, 2006, № 11, с. 1-7. (Совместно с В.Б.Тлячевым).
33. Мультипликативный интеграл на группе SU(2). //Труды кафедры геометрии МГОУ, 2006, № 4, с. 79-83.
34. К теореме Риччи в терминах мультипликативного интеграла.// Труды физического общества республики Адыгея. Майкоп, 2007, № 12, с. 42-48.
35. Алгоритм вычисления квадратов модулей элементов S-матрицы с помощью углов Эйлера. // Труды физического общества республики Адыгея. Майкоп, 2008, № 11, с. 7-10. (Совместно с В.Б.Тлячевым и В.А.Козловым).
36. О мультипликативной вариации подынтегральной матричной формы криволинейного мультипликативного интеграла. //Труды физического общества республики Адыгея. Майкоп, 2009, № 14, с. 42-48. (Совместно с Е.Н.Кумшаевым).
37. О вычислении мультипликативного интеграла от полиномиальных матричных функций Вестник Адыгейского государственного университета, серия «Естественно-математические и технические науки». – 2010. – Вып. 1. – С.22-31. (Совместно с В.А.Козловым).
38. О вариации подынтегральной матричной формы криволинейного мультипликативного интеграла. Вестник Адыгейского государственного университета, серия «Естественно-математические и технические науки». – 2010 – Вып. 1. – С.67-74. (Совместно с Е.Н.Кумшаевым).
39. Некоторые свойства вариации подынтегральной матричной формы криволинейного мультипликативного интеграла. Труды физического общества республики Адыгея. Майкоп, 2010, № 15, с. 32-40. (Совместно с В.А.Козловым и Е.Н.Кумшаевым).
40. О мультипликативном интегрировании полиномиальных матричных функций. Вестник Адыгейского государственного университета, серия «Естественно-математические и технические науки». – 2010 – Вып. 2. – С.11-18. (Совместно с И.А.Александровой и В.А.Козловым).
41. Развитие теории мультипликативного интегрирования полиномиальных матричных функций. – Майкоп, ИП Магарин, 2010, 109 с. (Совместно с В.А.Козловым).
42. Мультипликативные интегралы, от матричных функций, порожденные представлениями алгебры Ли A_1. Вестник Адыгейского государственного университета, серия «Естественно-математические и технические науки». – 2011. – Вып. 2. – С. (Совместно с В.А.Козловым).
43. Мультипликативный интеграл и представления групп и алгебр Ли. – Майкоп, ИП Магарин, 2010, 92 с. (Совместно с В.А.Козловым).
44. Мультипликативный интеграл и уравнения нулевой кривизны. //Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. М.: МГУ, 2011, вып. XXVIII, с.9-11. (Совместно с О.В.Мантуровым).
45. О работах О.В. Мантурова по теории мультипликативного интеграла. // Труды семинара по векторному и тензорному анализу с их приложениями к геометрии, механике и физике. М.: МГУ, 2011, вып. XXVIII, с.15-40.

46. О характеристических уравнениях для некоторого класса алгебраических дифференциальных уравнений. /Доклады АМАН, 2011, № 2, с.29-32. (Совместно с С.К.Куижевой).
47. Мультипликативный интеграл и вариационные задачи. – Майкоп, ИП Магарин, 2012, 100 с. (Совместно с В.А.Козловым).
48. Задача о представлении линейных дифференциальных уравнений в частных производных от многих переменных в виде стационарных уравнений нулевой кривизны Доклады шестой всероссийской практической конференции студентов, аспирантов, докторантов и молодых ученых «Наука – XXI веку». – Майкоп: Изд-во МГТУ, 2006. С. 105-109. (Совместно с С.К. Куижевой).
49. Задача о нахождении пар Лакса для линейных дифференциальных уравнений в частных производных со многими переменными Нелокальные краевые задачи и проблемы современного анализа и информатики: Материалы V Школы молодых ученых. − Нальчик-Эльбрус, 2007, с. 84-87. (Совместно с С.К.Куижевой).
50. Мультипликативные интегралы, порожденные представлениями алгебры Ли A1 Математика и ее приложения. Экономическое прогнозирование: модели и методы: материалы международной научно-практической конференции. – Орел, Воронеж, 2011, с.53-55. (Совместно с В.А.Козловым).

THE WORK L.ZH. PALANDZHYANTS ON THE THEORY OF A MULTIPLICATIVE INTEGRAL
(on his 60th birthday and 30th anniversary of scientific activity)

V.A. Kozlov, S.K. Kuizheva, V.B. Tlyachev

The article presents the main results research of L.Zh. Palandzhyants on the theory multiplicative integral for the period from 1982-2012 years.

