2012 г. **№17**

Т р у д ы Ф О Р А

КОГОМОЛОГИИ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ OSP $(1,2)$ НАД ПОЛЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

О.К. Тен, А.Ш. Хачак

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Получено описание когомологий ортосимплектической супералгебры Ли osp $(1,2)$ с коэффициентами в неприводимом модуле над полем характеристики $p>2$.

В данной работе мы приводим полученное нами описание когомологий ортосимплектической супералгебры Ли osp $(1,2)$ с коэффициентами в ограниченном неприводимом модуле в случае полей характеристики $p>2$. В случае поля нулевой характеристики известно, что когомологии osp $(1,2)$ с коэффициентами в неприводимом модуле являются тривиальными (см. [1]). Полученные нами результаты сформулированы в виде следующей теоремы.

Теорема. Если основное поле K характеристики $p>2$ является алгебраически замкнутым и V — простой ограниченный osp $(1,2)$-модуль, то $H^2_{\bar 1}(L,V)=\{0\}$ и $\dim H^2(L,V)=1$, если $\dim V=2d+1$, $d=0,1,\dots,p-2$, и $\dim H^2(L,V)=2$, если $\dim V=2p-1$.

Напомним (см. [2]), что супералгебра Ли osp $(1,2)$ определяется как подалгебра

$$\mathrm{osp}\,(1,2)=\left\{\begin{pmatrix} 0 & d & e\\ e & a & b\\ -d & c & -a\end{pmatrix}\;\middle|\; a,b,c,d,e\in K\right\}$$

супералгебры Ли gl $(1|2)$, при этом

$$\mathrm{osp}\,(1,2)_{\bar 0}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & a & b\\ 0 & c & -a\end{pmatrix}\;\middle|\; a,b,c\in K\right\}\simeq \mathrm{sl}(2),$$

$$\mathrm{osp}\,(1,2)_{\bar 1}=\left\{\begin{pmatrix} 0 & d & e\\ e & 0 & 0\\ -d & 0 & 0\end{pmatrix}\;\middle|\; d,e\in K\right\}.$$

Базис

$$e=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad h=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -1\end{pmatrix},\quad f=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\end{pmatrix},$$

$$x=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix},\quad y=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 1\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$$

удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\begin{array}{lll} [e,h]=-2e, & [h,f]=2f, & [e,f]=h,\\ [h,x]=x, & [h,y]=-y, & [e,x]=0,\\ [e,y]=x, & [f,x]=y, & [f,y]=y,\\ [x,x]=2e, & [x,y]=-h, & [y,y]=-2f. \end{array}$$

В случае поля положительной характеристики супералгебра osp $(1,2)$ является ограниченной с p-структурой, заданной равенствами $e^{[p]}=0$, $h^{[p]}=h$, $f^{[p]}=0$. Описание неприводимых представлений супералгебры Ли $\mathrm{osp}\,(1,2)$ над полем положительной характеристики было получено в работе [3]. В частности, в ней доказано, что все простые ограниченные $\mathrm{osp}\,(1,2)$-модули над алгебраически замкнутым полем характеристики $p>2$ с точностью до гомоморфизма перемены четности изоморфны $M(d)=\wedge^d M$, $d=0,1,\ldots,p-2$, где M — стандартный $\mathrm{osp}\,(1,2)$-модуль размерности $(1,2)$.

Для супералгебры Ли $L=L_{\bar 0}\oplus L_{\bar 1}$ над полем K и L-модуля $V=V_{\bar 0}\oplus V_{\bar 1}$ коцепной комплекс $C(L,V)=(C^q(L,V),d)$ определяется следующим образом (см. [1]): суперпространство q-мерных коцепей

$$C^q(L,V)=C^q_{\bar 0}(L,V)\oplus C^q_{\bar 1}(L,V)$$

состоит из q-линейных отображений

$$c:\underbrace{L_{\bar 0}\times\ldots\times L_{\bar 0}}_{q_0}\times\underbrace{L_{\bar 1}\times\ldots\times L_{\bar 1}}_{q_1}\to V_r,\quad \deg c=q_1+r,$$

где $q_0+q_1=q$, $r\in\{\bar 0,\bar 1\}$, кососимметрических относительно элементов из $L_{\bar 0}$ и симметрических относительно элементов из $L_{\bar 1}$, операция кограницы

$$d\colon C^q_p(L,V)\to C^{q+1}_p(L,V),\quad p\in\{\bar 0,\bar 1\}, q=1,2,\ldots$$

определяется равенством

$$\begin{aligned}dc(g_1,\ldots,g_{q_0},h_1,\ldots,h_{q_1})=&\sum_{1\leqslant s<t\leqslant q_0}(-1)^{s+t-1}c([g_s,g_t],g_1,\ldots,\hat g_s,\ldots,\hat g_t,\ldots,g_{q_0},h_1,\ldots,h_{q_1})+\\&+\sum_{s=1}^{q_0}\sum_{t=1}^{q_1}(-1)^{s-1}c(g_1,\ldots,\hat g_s,\ldots,g_{q_0},[g_s,h_t],h_1,\ldots,\hat h_t,\ldots,h_{q_1})+\\&+\sum_{1\leqslant s<t\leqslant q_1}c([h_s,h_t],g_1,\ldots,g_{q_1},h_1,\ldots,\hat h_s,\ldots,\hat h_t,\ldots,h_{q_1})+\\&+\sum_{s=1}^{q_0}(-1)^s g_s c(g_1,\ldots\hat g_s,\ldots,g_{q_0},h_1,\ldots,h_{q_1})+\\&+(-1)^{q_1-1}\sum_{s=1}^{q_1}h_s c(g_1,\ldots,g_{q_0},h_1,\ldots,\hat h_s,\ldots,h_{q_1}),\end{aligned}$$

где, как обычно, значок $\hat{}$ означает, что соответствующий член отсутствует.

Обозначим через $Z^q(L,V)=Z^q_{\bar 0}(L,V)\oplus Z^q_{\bar 1}(L,V)$, $B^q(L,V)=B^q_{\bar 0}(L,V)\oplus B^q_{\bar 1}(L,V)$ суперпространства q-мерных коциклов и кограниц:

$$Z^q_p(L,V)=\{z\in C^q_p(L,V)\mid dz=0\},$$

$$B^q_p(L,V)=dC^{q-1}_p(L,V),p=\bar 0,\bar 1.$$

Факторпространство $H^q(L,V)=H^q_{\bar 0}(L,V)\oplus H^q_{\bar 1}(L,V)$, где $H^q_p(L,V)=Z^q_p(L,V)/B^q_p(L,V)$, $p=\bar 0$, $\bar 1$, называется суперпространством q-мерных когомологий супералгебры Ли L с коэффициентами в L-модуле V.

Доказательство теоремы проводится прямым вычислением. При этом мы пользуемся следующей реализацией модуля $M(d)$, полученной в [3]: обозначим через $u_0,\ldots,u_d$ и $v_0,\ldots,v_{d+1}$ базисы соответственно в $M(d)_{\bar 0}$ и $M(d)_{\bar 1}$, тогда действие $\mathrm{osp}\,(1,2)$ в $M(d)$ определяется равенствами

$$\begin{aligned}&e\cdot v_i=(d-i+2)v_{i-1}, && e\cdot u_i=d-i+1u_{i-1}\\&f\cdot v_i=(i+1)v_{i+1} && f\cdot u_i=(i+1)u_{i+1}\\&h\cdot v_i=(d-2i+1)v_i && h\cdot u_i=(d-2i)u_i\\&x\cdot v_i=u_{i-1} && x\cdot u_i=(d-i+1)v_i\\&y\cdot v_i=-u_i && y\cdot u_i=(i+1)v_{i+1}.\end{aligned}$$

Здесь $i = 0,\ldots,d+1$ и, если индекс выходит за допустимые границы, то соответствующий элемент равен 0.

Для простого модуля $V = M(d)$ с помощью непосредственных вычислений показывается, что размерность ядра отображения $d_2 = d\colon C^2(L,V) \to C^3(L,V)$ равна $4d+6$, размерность ядра отображения и $d_1 = d\colon C^1(L,V) \to C^2(L,V)$ равна $d+3$, если $d \leqslant p-3$, и $d+2$, если $d = p-2$. Отсюда получаем, что $\dim Z^2(L,V) = 4d+6$, $\dim B^2(L,V) = \dim C^1(L,V) - \dim\ker d_1 = 4d+5$, если $d = 0,1,\ldots,p-3$, и $4d+4$, если $d = p-2$. Следовательно, $\dim H^2(L,V) = 1$, если $\dim V = 2d+1$, $d = 0,1,\ldots,p-2$ и $\dim H^2(L,V) = 2$, если $\dim V = 2p-1$.

Наконец, нами показано, что если $\dim V \leqslant 2p-3$, то в качестве базиса пространства $H^2(L,V)$ можно взять четный коцикл φ, а если $\dim V = 2p-1$, то четные коциклы φ, ψ, где $\varphi(h,f) = u_0$, $\varphi(h,y) = v_0$, $\varphi(f,x) = u_0$, $\psi(h,e) = 2u_{p-2}$, $\psi(h,f) = 2u_p$, $\psi(h,x) = 2v_{p-1}$, $\psi(h,y) = 2v_p$, $\psi(e,f) = u_{p-1}$, $\psi(e,x) = v_{p-2}$, $\psi(e,y) = v_{p-1}$, $\psi(x,x) = 2u_{p-2}$, а все оставшиеся значения на базисных векторах, кроме очевидным образом связанных с указанными, считаются равными нулю.

Список литературы

1. *Фукс Д. Б.* Когомологии бесконечномерных алгебр Ли. — М.: Наука, 1984. — 272 с.
2. *Kac V. G.* Lie superalgebras // Advances in Mathematics. — 1977. — V. 26. — No 1. — P. 8–96.
3. *Тен О. К., Устименко С. В.* Неприводимые представления супералгебры Ли $\mathrm{osp}(1,2)$ над полем положительной характеритики // Дифф. и интегр. уравнения, анализ и алгебра. Сб. научн. трудов. КалмГУ. Элиста, 1996. — С. 28–31.

Cogomologies of Lie superalgebra $\mathrm{osp}(1,2)$ over fields of positive characteristic

O.K. Ten, A.Sh. Khachak

Lie superalgebra $\mathrm{osp}(1,2)$ two dimensional cogomologies with coefficients in simple p-module over characteristic $p > 2$ fields obtained.

