УСРЕДНЕНИЕ КИНЕМАТИЧЕСКИХ ПАРАМЕТРОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ЗАДАЧЕ КЕПЛЕРА

В.С. Малых, И.В. Филимонов

Адыгейский государственный университет

Проводится сравнительный анализ усреднения различных параметров движения частицы по эллипсу в центральном поле. Показано, что среднее за период значение параметра, в общем случае, зависит от переменной, по которой он усредняется. Выявлена зависимость этого значения от эксцентриситета орбиты.

В настоящее время задача Кеплера ставится в виде вопроса: как движется частица в центральном поле $U \sim \left(-\frac{\alpha}{r}\right)$? В ходе решения задачи доказывается, что финитное движение частицы совершается по эллипсу; вычисляются параметры этого движения; устанавливаются закономерности, которым они подчиняются. Самым известным примером такого движения является движение планет Солнечной системы, законы которого были эмпирически открыты И. Кеплером (1571-1630).

Усреднение расстояния планеты от Солнца

Согласно первому закону Кеплера, планета движется по эллипсу, в одном из фокусов которого находится Солнце (т.е. центр Солнца).

Расстояние планеты от Солнца меняется от минимального $q = a(1-e)$ в перигелии «П», где a - большая полуось эллипса, e - его эксцентриситет, до максимального $Q = a(1+e)$ в афелии «А» (рис.1).

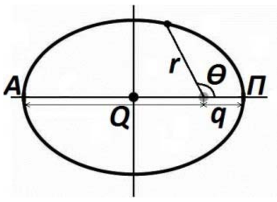

Рис. 1

Таким образом, при монотонном возрастании истинной аномалии θ планеты (то есть её полярного угла), полярное расстояние r периодически меняется и возникает вопрос о среднем расстоянии $\bar{r}$ планеты от Солнца за период T её обращения.

В учебной литературе по астрономии этот вопрос решается однозначно, практически без обсуждения утверждается, что $\bar{r} = a$:

1. «За среднее расстояние планеты от Солнца принимается большая полуось орбиты $a = \frac{q+Q}{2}$» [1, с.80];
2. «Средним расстоянием планеты от Солнца является большая полуось ее орбиты $a = \frac{q+Q}{2}$» [2, с.36];
3. «Астрономическая единица длины – мера расстояний до космических объектов, равная большой полуоси эллиптической орбиты Земли и, согласно свойствам эллипса, среднему расстоянию Земли от Солнца» [3, с.126].

Из этих трёх примеров понятно, что в астрономии среднее расстояние планеты от Солнца воспринимается как среднее расстояние всех точек её эллиптической орбиты от фокуса, в котором находится Солнце. В этом подходе не обязательно рассматривать r как непрерывную переменную величину. Для нахождения $\bar{r}$ достаточно использовать геометрические свойства эллипса, известные со времён Аполлония (III в. до н.э).

Рассуждения, приводящие к результату $\bar{r} = a$, поясняет рисунок 2.

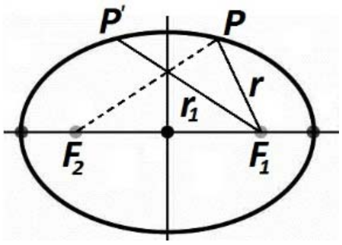

Рис. 2.

Здесь P – произвольная точка эллипса, P' – точка, симметричная точке P относительной малой оси эллипса. Так как $P'F_1 = PF_2$, то $P'F_1 + PF_1 = PF_2 + PF_1 = 2a$ согласно определению эллипса как геометрического места точек, сумма расстояний от каждой из которых до двух данных точек (фокусов) есть величина постоянная и равная $2a$. Т.о., среднее расстояние точек P и P' от фокуса F_1 равно: $\frac{r+r'}{2} = \frac{PF_1 + PF_2}{2} = a$. Очевидно, то же самое получится для любой другой пары симметричных точек, т.е., среднее расстояние от всех точек эллипса до одного из фокусов равно a: $\bar{r} = a$.

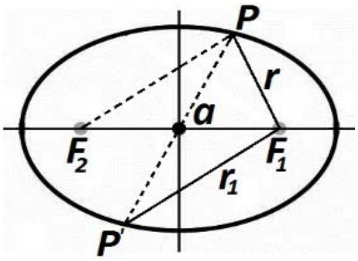

Рис. 3.

Рассмотрим другой способ рассуждения, приводящего к результату $\bar{r} = a$. Возьмём (рис.3) точку P' эллипса, симметричную точке P относительно центра эллипса (точки О). Из равенства треугольников POF_2 и $P'OF_1$ следует: $PF_2 = P'F_1$ Тогда $P'F_1 + PF_1 = PF_2 + PF_1 = 2a$ согласно определяющему свойству эллипса. Т.о., среднее расстояние точек P и P' от фокуса F_1 равно: $\frac{r+r'}{2} = \frac{PF_1 + PF_2}{2} = a$. Очевидно, то же самое получится для любой пары симметричных точек, т.е., среднее расстояние от всех точек эллипса до одного из фокусов равно a.

Полученный результат $\bar{r} = a$ является средним значением группы чисел, характеризующих расстояние r, или длину фокального радиуса-вектора точки эллипса.

Более продуктивен подход, в котором r рассматривается как функция некоторого аргумента. Например, r можно считать функцией декартовой координаты (x или y) конца фокального радиуса-вектора (рис.4).

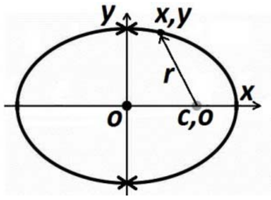

Рис. 4.

В качестве примера, рассмотрим r как функцию y, исходя из канонического уравнения эллипса: $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$. Тогда:

$$r^2=(x-c)^2+y^2=\left[\pm\sqrt{a^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)}-c\right]^2+y^2,$$

здесь знак «+» соответствует правой половине эллипса, «-» – левой половине.
Для правой половины:

$$r_{пр}^2=\left[\sqrt{a^2(1-\frac{y^2}{b^2})}-c\right]^2+y^2=a^2-\frac{a^2y^2}{b^2}-2ac\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}+c^2+y^2=$$

$$=a^2+c^2-\frac{\left(b^2+c^2\right)y^2}{b^2}-2ac\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}+y^2=a^2-2ac\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}+c^2\left(1-\frac{y^2}{b^2}\right)=\left(a-c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)^2\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ r_{пр}=a-c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}.$$

Тогда среднее значение равно: $\overline{r_{пр}}=\frac{1}{2b}\int_{-b}^{b}\left(a-c\sqrt{1-\frac{y^2}{b^2}}\right)dy$.

Получившийся интеграл легко берётся с помощью подстановки $\frac{y}{b}=\sin\xi$:

$$\overline{r_{пр}}=a-\frac{c}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\xi d\xi=a-\frac{c}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=a\left(1-\frac{\pi e}{4}\right).$$

Для левой половины: $\overline{r_{лев}}=a\left(1+\frac{\pi e}{4}\right)$. Для всех точек эллипса: $\overline{r(y)}=\frac{\overline{r_{пр}}+\overline{r_{лев}}}{2}=a$.

Усреднение r по x производится проще и даёт тот же результат:

$$\overline{r(x)}=a.$$

В полярной системе координат уравнение эллиптической орбиты планеты имеет вид:

$$r=\frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}$$

(центр системы совпадает с фокусом, в котором находится Солнце, полярная ось направлена к перигелию). Задача усреднения r по θ представлена в известном «Сборнике» Демидовича [4, задача 2319]. Чтобы найти требуемое в задаче «среднее значение фокального радиуса-вектора эллипса» достаточно вычислить интеграл $\int\frac{d\theta}{1+e\cos\theta}$. С помощью стандартной подстановки

$$tg\frac{\theta}{2}=z\ \Rightarrow\ d\theta=\frac{2dz}{1+z^2},\quad \cos\theta=\frac{1-tg^2\frac{\theta}{2}}{1+tg^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1-z^2}{1+z^2},$$

данный интеграл сводится к табличному $\int\frac{dx}{1+x^2}=arctg x+C$. Получаем:

$$\int\frac{d\theta}{1+e\cos\theta}=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}\int\frac{d\left(z\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right)}{1+\left(z\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right)^2}=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}arctg\left(z\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}\right)+C=\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}arctg\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}tg\frac{\theta}{2}\right)+C.$$

Далее нужно учесть, что при $\theta=\pi$ функция $z=tg\frac{\theta}{2}$ претерпевает разрыв. Это означает, что окончательное интегрирование по замкнутой траектории следует проводить в пределах $(-\pi,+\pi)$, а не от 0 до 2π. Итак,

$$\overline{r(\theta)}=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{a\left(1-e^2\right)d\theta}{1+e\cos\theta}=\frac{a\left(1-e^2\right)}{2\pi}\frac{2}{\sqrt{1-e^2}}arctg\left(\sqrt{\frac{1-e}{1+e}}tg\frac{\theta}{2}\right)\Bigg|_{-\pi}^{+\pi}=a\sqrt{1-e^2}=b\neq a!$$

Т.о., среднее расстояние планеты от Солнца не определяется однозначно, а зависит от переменной усреднения. Некоторые авторы полагают, что переменной в данном случае должна быть истинная аномалия θ (а не декартова координата) и, соответственно, средним расстоянием следует считать *b*.

Например, А.Б. Палей в статье «Среднее расстояние или большая полуось?» [5, с.59] утверждает, что «среднее расстояние объекта до центрального тела и большая полуось эллиптической орбиты – это не одно и то же!» Для доказательства автор усредняет модуль радиуса-вектора $\bar{r}$ по истинной аномалии, что приводит к результату: $\bar{r}=a\sqrt{1-e^2}$. Разложение полученного выражения в ряд по степеням e^2: $\bar{r}=a\left(1-\frac{e^2}{2}-\frac{e^4}{8}-...\right)$ позволяет оценить ошибку, которая возникает при отождествлении $\bar{r}$ и a. «Понятно, что для эллипсов с малым эксцентриситетом среднее значение модуля радиуса-вектора $\bar{r}$ отличается от a на весьма малую (по сравнению с a) величину $a\cdot\frac{e^2}{2}$». Т.о., «для эллипсов с небольшим эксцентриситетом большая полуось приблизительно равна среднему расстоянию до центрального тела.»

Заметим, что этот вывод справедлив и при всех других усреднениях r, но в общем точные результаты усреднений различны.

При вычислении истинной аномалии, однозначно определяющей положение планеты на орбите, часто используется так называемая эксцентрическая аномалия E – угол между полярной осью и радиусом описанной около эллипса окружности (радиус проведён в такую точку P' этой окружности, абсцисса которой равна абсциссе планеты), рис.5.

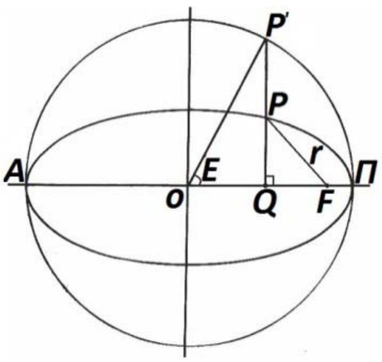

Рис. 5.

Аналитически эксцентрическая аномалия обычно находится из уравнения Кеплера $E-e\sin E=M$ (доказательство приведено в [6, с.51]), где $M=\frac{2\pi}{T}\cdot t$ (t – промежуток времени от момента прохождения планеты через перигелий).

Рассмотрим усреднение фокального радиуса-вектора r планеты по эксцентрической аномалии E и средней аномалии M .

Из прямоугольного треугольника PQF:

$$r=\sqrt{PQ^2+QF^2}=\sqrt{b^2\sin^2E+(c-a\cos E)^2}=\sqrt{a^2\left(1-e^2\right)\sin^2E+a^2(e-\cos E)^2}=a(1-e\cos E).$$

Среднее значение $r(E)$ за полный оборот вокруг Солнца:

$$\overline{r(E)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} a(1-e\cos E)dE = a.$$

Усреднение по средней аномалии M, очевидно, эквивалентно усреднению по времени t. Примером служит задача из задачника Мещерского [7, задача 51.28]: «Определить среднее значение радиуса- вектора планеты $\bar{r} = \frac{1}{T}\int_0^T r dt$, если a – большая полуось, а e – эксцентриситет её эллиптической траектории».

Для решения уместно перейти от переменной t к переменной E: $r = a(1-e\cos E)$, из уравнения Кеплера: $dt = \frac{T}{2\pi}(dE - e\cos E dE)$. Тогда:

$$\overline{r(t)} = \frac{1}{T}\int_0^{2\pi} a(1-e\cos E)\frac{T}{2\pi}(1-e\cos E)dE = \frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(1-2e\cos E + e^2\cos^2 E\right)dE = a\left(1+\frac{e^2}{2}\right).$$

Заслуживает внимания и другой способ решения этой задачи: через истинную аномалию. Сначала из второго закона Кеплера $\left(\frac{1}{2}r^2\frac{d\theta}{dt} = \frac{\pi ab}{T}\right)$ получаем: $dt = \frac{Tr^2 d\theta}{2\pi ab}$, затем выражаем r через θ согласно первому закону Кеплера $\left(r = \frac{a(1-e^2)}{1+e\cos\theta}\right)$. В этом случае

$$\overline{r(t)} = \frac{1}{T}\int_0^T r dt = \frac{1}{T}\int_{-\pi}^{+\pi} r\frac{Tr^2 d\theta}{2\pi ab} = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{a^3(1-e^2)^3 d\theta}{2\pi ab(1+e\cos\theta)^3} = \frac{a(1-e^2)^{\frac{5}{2}}}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^3}.$$

Выше, при усреднении r по θ, было показано, что $\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{1+e\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{1-e^2}}$. Введём в эту формулу параметр α и запишем новый интеграл $I = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{\alpha + e\cos\theta} = \frac{1}{\alpha}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{\left(1+\frac{e}{\alpha}\cos\theta\right)} = \frac{1}{\alpha}\frac{2\pi}{\sqrt{1-\left(\frac{e}{\alpha}\right)^2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{\alpha^2 - e^2}}$. Продифференцировав I по α дважды, будем иметь:

$$\frac{\partial I}{\partial\alpha} = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{-d\theta}{(\alpha + e\cos\theta)^2} = -\frac{2\pi\alpha}{\left(\alpha^2 - e^2\right)^{3/2}}, \qquad \frac{\partial^2 I}{\partial\alpha^2} = \int_{-\pi}^{+\pi}\frac{2d\theta}{(\alpha + e\cos\theta)^3} = \frac{2\pi(2\alpha^2 + e^2)}{\left(\alpha^2 - e^2\right)^{5/2}}.$$

Получаем необходимый интеграл: $\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{(\alpha + e\cos\theta)^3} = \frac{\pi(2\alpha^2 + e^2)}{\left(\alpha^2 - e^2\right)^{5/2}}$.

При $\alpha = 1$ имеем: $\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^3} = \frac{\pi(2+e^2)}{\left(1-e^2\right)^{5/2}}$. Тогда $\overline{r(t)} = \frac{a(1-e^2)^{5/2}}{2\pi}\cdot\frac{\pi(2+e^2)}{\left(1-e^2\right)^{5/2}} = a\left(1+\frac{e^2}{2}\right)$.

Итак, среднее расстояние планеты от Солнца имеет различные значения в зависимости от аргумента, по которому проводится усреднение:

1. при усреднении по декартовым координатам и по эксцентрической аномалии $\bar{r} = a$, т.е. среднее расстояние планеты от Солнца равно радиусу окружности, описанной около эллипса;
2. при усреднении по истинной аномалии $\bar{r} = b$, т.е. среднее расстояние планеты от Солнца равно радиусу окружности, вписанной в эллипс;
3. при усреднении по времени $\bar{r} = a\left(1+\frac{e^2}{2}\right)$, что отражает факт более продолжительного пребывания планеты на расстояниях $r > a$, чем на расстояниях $r < a$.

Усреднение скорости планеты

Рассмотрим теперь среднюю (за период) скорость $\overline{\vartheta}$ движения планеты вокруг Солнца. В астрономической литературе средней скоростью планеты считают скорость точки, равномерно движущейся по окружности, описанной около эллиптической орбиты планеты с тем же периодом, что и у планеты:

$$\overline{\vartheta} = \frac{2\pi a}{T}.$$

Приведём два примера.

«Средняя орбитальная, или круговая скорость планеты $\vartheta_a = \frac{2\pi a}{T}$ всегда выражается в $\frac{км}{с}$» [2,с.37].

«Средняя скорость $\overline{\vartheta}$ достигается на концах малой оси эллипса: $\overline{\vartheta} = \sqrt{\frac{GM}{a}}$ » [8, с.267].

Последняя формула не противоречит предыдущей. Действительно, согласно третьему закону Кеплера, период обращения планеты по эллипсу с большой полуосью a равен периоду обращения воображаемой планеты, движущейся вокруг Солнца по окружности радиуса a, у которой период $T = \frac{2\pi a}{\vartheta} = \frac{2\pi a}{\sqrt{\frac{GM}{a}}}$. Отсюда получаем $\frac{2\pi a}{T} = \sqrt{\frac{GM}{a}}$, где M – масса Солнца.

Как известно, в физике средняя линейная («траекторная») скорость определяется как отношение пути ко времени, т.е. усреднение производится по времени. Тогда «физическая» средняя скорость движения планеты за время, равное периоду обращения её вокруг Солнца, равна

$$\overline{\vartheta(t)} = \frac{\ell}{T}, \text{ где } \ell \text{ – длина обвода эллипса.}$$

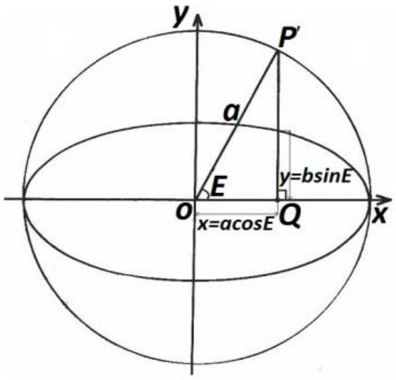

Рис.6

Ясно, что $\overline{\vartheta}(t) < \vartheta_a$, т.к. длина обвода эллипса всегда меньше длины окружности, описанной около этого эллипса. Чтобы вычислить разность этих скоростей, надо решить задачу по нахождению длины дуги эллипса. Для решения выразим элемент длины дуги эллипса через эксцентрическую аномалию (рис.6):

$$d\ell = \sqrt{dx^2 + dy^2} = \sqrt{(-a\sin E dE)^2 + (b\cos E dE)^2} = a\sqrt{1 - e^2\cos^2 E}\, dE,$$

длина обвода эллипса:

$$\ell = a\int_0^{2\pi} \sqrt{1 - e^2\cos^2 E}\, dE.$$

Данный интеграл относится к типу так называемых эллиптических интегралов, которые в конечном виде не могут быть представлены через элементарные функции, но для которых возможно приближённое решение (с помощью сходящихся рядов). Например, разложение подынтегральной функции в ряд Тейлора даёт:

$$\sqrt{1-e^2\cos^2 E} = \left(1-\frac{1}{2}e^2\cos^2 E - \frac{1}{8}e^4\cos^4 E - \ldots\right).$$

Теперь

$$\ell = a\int_0^{2\pi}\left(1-\frac{1}{2}e^2\cos^2 E-\frac{1}{8}e^4\cos^4 E-\ldots\right)dE = a\left[\int_0^{2\pi}dE-\frac{e^2}{2}\int_0^{2\pi}\cos^2 E dE-\frac{e^4}{8}\int_0^{2\pi}\cos^4 E dE-\ldots\right].$$

После интегрирования получаем:

$$\ell = 2\pi a\left(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3e^4}{64}-\frac{5e^6}{256}-\ldots\right).$$

Соответственно, среднее значение скорости планеты равно

$$\overline{\vartheta(t)} = \frac{2\pi a}{T}\left(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3e^4}{64}-\frac{5e^6}{256}-\ldots\right).$$

Для планет солнечной системы, вследствие малости эксцентриситетов их орбит, наибольшая разница средних скоростей ϑ_a и $\overline{\vartheta}(t)$ составляет лишь около 1% (самый большой эксцентриситет орбиты у Меркурия $e = 0{,}2$). Для астероидов и комет различие в скоростях ϑ_a и $\overline{\vartheta}(t)$ может достигать 30% (например, для кометы Галлея $e = 0{,}967$).

Таким образом, понятия средней скорости орбитального движения планеты в физике и в астрономии принципиально различны, но физическое определение в нулевом приближении совпадает с астрономическим. Считаем, что это надо учитывать при решении соответствующих задач.

Усреднение скорости планеты по эксцентрической аномалии, а также по декартовым и по полярным координатам представляет, на наш взгляд, чисто академический интерес и здесь не рассматривается.

В заключение рассмотрим усреднение угловой скорости радиуса- вектора планеты при полном обороте её вокруг Солнца. Средняя угловая скорость планеты по времени определяется однозначно (и в физике и в астрономии):

$$\overline{\omega(t)} = \frac{2\pi}{T}.$$

Из второго закона Кеплера получаем значение мгновенной угловой скорости $\omega \equiv \dot{\theta} = \frac{2\sigma}{r^2}$, где $\sigma = \frac{\pi ab}{T}$. Это позволяет сразу же усреднить ω по r :

$$\overline{\omega(r)} = \frac{1}{(r_2-r_1)}\int_{r_1}^{r_2}\frac{2\sigma}{r^2}dr = \frac{2\sigma}{r_1 r_2}.$$

Среднее значение ω за полный оборот равно, очевидно, среднему на участке от перигелия $r_1 = a-c$ до афелия $r_2 = a+c$:

$$\overline{\omega(r)} = \frac{2\pi ab}{T(a^2-c^2)} = \frac{2\pi}{T\sqrt{1-e^2}}.$$

Легко вычисляется средняя угловая скорость планеты и по истинной аномалии:

$$\overline{\omega(\theta)} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{2\sigma}{r^2}d\theta = \frac{\sigma}{\pi a^2}\int_0^{2\pi}(1+e\cos\theta)^2 d\theta = \frac{2\pi}{T}\frac{1+\frac{e^2}{2}}{\sqrt{(1-e^2)^3}}.$$

Средняя угловая скорость по эксцентрической аномалии также интегрируется в конечном виде.

$$\overline{\omega(E)} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{2\sigma}{r^2}dE = \frac{\sigma}{\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{dE}{a^2(1-e\cos E)^2} = \frac{\pi ab}{T\pi a^2}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{dE}{(1-e\cos E)^2} = \frac{\sqrt{1-e^2}}{T}\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{dE}{(1-e\cos E)^2}.$$

С помощью приёма, рассмотренного выше для вычисления $\int_{-\pi}^{+\pi}\frac{d\theta}{(1+e\cos\theta)^3}$, получаем:

$$\overline{\omega(E)}=\frac{2\pi}{T}\cdot\frac{1}{1-e^2}.$$

Для иллюстрации сказанного, рассмотрим две задачи.

<u>Задача 1.</u> В какой точке орбиты истинная линейная скорость планеты равна её средней скорости? [9, задача 718]

<u>Решение.</u> Под истинной скоростью здесь, очевидно, понимается мгновенная скорость ϑ, определяемая либо моментом времени после прохождения планетой перигелия, либо одной из полярных координат (r или θ). Для нахождения ϑ удобнее взять в качестве аргумента полярное расстояние r. Из закона сохранения энергии: $\frac{m\vartheta^2}{2}-\frac{GMm}{r}=\frac{m\vartheta_n^2}{2}-\frac{GMm}{q}$, где $q=a-c$, ϑ_n – скорость планеты при прохождении перигелия. Применив ещё закон сохранения энергии и закон сохранения момента импульса для моментов прохождения планетой перигелия и афелия, будем иметь:

$$\frac{m\vartheta_a^2}{2}-\frac{GMm}{Q}=\frac{m\vartheta_n^2}{2}-\frac{GMm}{q},\quad m\vartheta_a Q=m\vartheta_n q.$$

Из полученной системы трёх уравнений находим: $\vartheta_n^2=\frac{2GMQ}{q(Q+q)}$ и с учётом того, что $Q+q=2a$,

$$\vartheta^2=GM\left(\frac{2}{r}-\frac{1}{a}\right).$$

Теперь, если использовать «астрономическую» среднюю скорость планеты $\left(\overline{\vartheta}=\frac{2\pi a}{T}=\sqrt{\frac{GM}{a}}\right)$, получаем точный ответ:

$$r_{астр}=a\text{, соответственно, }\theta_{астр}=\arccos(-e),$$

что совпадает с ответом, приведенным в задачнике.

«Физическое» решение в первом приближении приводит к ответу

$$r_{физ}=a\left(1+\frac{e^2}{8}\right)\text{ и }\theta_{физ}=\arccos\left(-e\cdot\frac{9-e^2}{8}\right).$$

Полученные значения для двух случаев приведены в таблице:

	Меркурий	Комета Галлея
$r_{астр}$	a=0,387 а.е.=57,9 млн. км	a=17,78 а.е.=2662 млн. км
$r_{физ}$	1,005a	1,15a
$\theta_{астр}$	101,5° и 258,5°	165,2° и 194,8°
$\theta_{физ}$	102,9° и 257,1°	167,1° и 192,9°

<u>Задача 2.</u> У конца малой полуоси угловая скорость планеты не равна её средней угловой скорости. Почему это так? [9, задача 719]

<u>Решение.</u> В задачнике даётся следующее решение этой задачи. «По закону площадей угловая скорость пропорциональна r^{-2}. На конце малой оси $r=a$, но a^{-2} не равно среднему из всех r^{-2}».

В приведённом авторском решении не указывается, по какой переменной проводится усреднение величины r^{-2}. Согласно нашему анализу надо рассмотреть, по меньшей мере, четыре способа: по t, по r, по θ и по E.

Но прежде всего приведём формулу для мгновенной угловой скорости: $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T} \cdot \frac{a^2\sqrt{1-e^2}}{r^2}$, получающуюся из закона площадей, то есть из второго закона Кеплера. Замечаем, что

средняя по времени угловая скорость $\overline{\omega(t)} = \frac{2\pi}{T}$ достигается при $r = a\sqrt[4]{1-e^2}$,

средняя $\overline{\omega(r)}$ достигается при $r = a\sqrt{1-e^2}$,

средняя по истинной аномалии $\overline{\omega(\theta)}$ достигается при $r = a \cdot \frac{1-e^2}{\sqrt{1+\frac{e^2}{2}}}$,

средняя по эксцентрической аномалии $\overline{\omega(E)}$ достигается при $r = a \cdot \sqrt[4]{\left(1-e^2\right)^3}$.

Резюме

В результате проведенного усреднения эллиптического движения частицы в поле $U = -\frac{\alpha}{r}$ получены следующие результаты:

1) среднее расстояние частицы от центра поля может принимать различные значения: a, $a\sqrt{1-e^2}$, $a\left(1+\frac{e^2}{2}\right)$, … в зависимости от переменной, по которой проводится усреднение;

2) средняя по времени скорость движения частицы, определяемая в курсе физики, отличается от средней скорости движения планеты, используемой в астрономии, множителем $\left(1-\frac{e^2}{4}-\frac{3e^4}{64}-\frac{5e^6}{256}-...\right)$;

3) средняя по времени угловая скорость в физике и в астрономии трактуется одинаково.

Литература

1. *Бакулин П.И., Кононович Э.В., Мороз В.И.*. Курс общей астрономии. – М.: Наука, 1983. – 560с.
2. *Дагаев М.М.* Сборник задач по астрономии. – М.: Просвещение, 1980. – 128с.
3. Физика космоса: Маленькая энциклопедия. – М.: Советская энциклопедия, 1986. – 783с.
4. *Демидович Б.П.* Сборник задач и упражнений по математическому анализу. – М.: Наука, 1972. – 544 с.
5. *Палей А.Б.* Среднее расстояние или большая полуось? // Физика в школе. – 1994. – №4. – С. 59.
6. *Малых В.С., Сурков П.С.* К решению задачи Кеплера // Труды ФОРА. – 2005. – №10. – С.51-54.
7. *Мещерский В.И.* Задачи по теоретической механике. – СПб: Лань, 1998. – 448 с.
8. *Куликовский П.Г.* Справочник любителя астрономии. – М.: Эдиториал УРСС, 2002. – 688 с.
9. *Воронцов-Вельяминов Б.А.* Сборник задач и практических упражнений по астрономии. – М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1977. – 272 с.

AVERAGING OF THE KINEMATIC PARAMETERS ELLIPTIC MOTION OF THE PARTICLES IN THE KEPLER PROBLEM

V.S. Malykh, I.V. Filimonov

A comparative analysis of various parameters of averaging of the particle on an ellipse in the center field is considered. It is shown that the average value for the period, in general, depends on the variable on which it is averaged. The dependence of the value of the eccentricity of the orbit.

