К ВОПРОСУ О ПОНДЕРОМОТОРНОЙ СИЛЕ В ЭЛЕКТРОМАГНИТНОМ ПОЛЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ПОЛЯРИЗАЦИИ

Е.В. Зудинова

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Дано обобщение известного выражения для силы, действующей на заряженную частицу в высокочастотном электрическом поле для случая движения частицы в среде с линейной по скорости силой трения.

В данной работе мы опираемся на статью [1], где дается обобщение известного выражения для силы, действующей на заряженную частицу в высокочастотном электрическом поле для случая движения частицы в среде с линейной по скорости силой трения. Рассмотрены высокочастотный и низкочастотный пределы этого обобщения, а также возможные применения полученных результатов.

Мы остановимся на рассмотрении силы, действующей на заряженную частицу в высокочастотном электрическом поле $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})\sin\omega t$. Иначе эту силу называют пондеромоторной силой [2].

Известно, что пондеромоторная сила для линейно-поляризованной волны $\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})\sin\omega t$ имеет вид [

$$\vec{F}(\vec{r})=-\frac{q^2}{4m\omega^2}\vec{\nabla}E^2(\vec{r}) \ . \tag{1}$$

Если же обобщить силу (1) на случай движения частицы в среде с линейной по скорости силой трения ($\overrightarrow{F_{fr}}=-m\nu\vec{\upsilon}$), то она примет вид

$$\vec{F}=-\frac{q^2}{2m(\omega^2+\nu^2)}\left(\vec{E}\vec{\nabla}\right)\vec{E} \ . \tag{2}$$

Данный результат получается, если (2) выводится из уравнения движения частицы в электромагнитном поле с линейной по скорости силой трения вида

$$m\ddot{\vec{r}}+m\nu\dot{\vec{r}}=q\vec{E}+q\frac{\dot{\vec{r}}}{c}\times\vec{B} \ . \tag{3}$$

Если рассмотреть уравнение движения (3) без учета силы Лоренца, то пондеромоторная сила, действующая на частицу в среде имеет вид

$$\vec{F}=-\frac{q^2}{4m(\omega^2+\nu^2)}\left(1+\frac{\omega^2-\nu^2}{\omega^2+\nu^2}\beta\right)\vec{\nabla}E^2, \tag{4}$$

$$\beta=\frac{1}{T}\int_0^T\exp(-\nu t)dt=\frac{1}{2\pi}\frac{\omega}{\nu}\left(1-\exp\left(-2\pi\frac{\nu}{\omega}\right)\right).$$

Наша задача состоит в том, чтобы получить выражения, аналогичные формулам (2) и (4), обобщенных на случай эллиптической поляризации.

Известно, что уравнение движения частицы в электромагнитном поле имеет вид

$$m\ddot{\vec{r}}+m\nu\dot{\vec{r}}=q\vec{E}+q\frac{\dot{\vec{r}}}{c}\times\vec{B} \tag{5}$$

Если электрическое поле меняется по закону

$$\vec{E}(\vec{r},t)=\vec{E}(\vec{r})\left(\vec{e_x}\sin(\omega t+\varphi)+\vec{e_y}\eta\cos(\omega t+\varphi)\right), \tag{6}$$

где η – параметр эллиптичности, то из уравнения поля

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}+\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}=0 \tag{7}$$

следует, что

$$\vec{B}(\vec{r},t)=\vec{B}(\vec{r})\left(\vec{e_x}\cos(\omega t+\varphi)-\vec{e_y}\eta\sin(\omega t+\varphi)\right), \tag{8}$$

а амплитуды полей связаны соотношением

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}(\vec{r})-\frac{\omega}{c}\vec{B}(\vec{r})=0\,. \tag{9}$$

Считаем, что за период осцилляций частица проходит расстояния, в пределах которых амплитуда полей меняется незначительно. Тогда, раскладывая их в ряд, можно ограничиться первым приближением:

$$\vec{E}(\vec{r})=\vec{E}(0)+(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}(0),\qquad \vec{B}(\vec{r})=\vec{B}(0)+(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{B}(0). \tag{10}$$

После данной подстановки в уравнение движения, получим с учетом (9) уравнение движения в первом приближении

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}}+m\nu\dot{\vec{r}}&=q\vec{E}_0\left(\vec{e}_x\sin(\omega t+\varphi)+\vec{e}_y\eta\cos(\omega t+\varphi)\right)+\\ &+q(\vec{r}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}_0\left(\vec{e}_x\sin(\omega t+\varphi)+\vec{e}_y\eta\cos(\omega t+\varphi)\right)+\\ &+\frac{q}{\omega}\dot{\vec{r}}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E}_0)\left(\vec{e}_x\cos(\omega t+\varphi)-\vec{e}_y\eta\sin(\omega t+\varphi)\right). \end{aligned} \tag{11}$$

Отбрасывая в выражении (11) два последних члена, получим уравнение движения в нулевом приближении

$$m\ddot{\vec{r}}+m\nu\dot{\vec{r}}=q\vec{E}_0\left(\vec{e}_x\sin(\omega t+\varphi)+\vec{e}_y\eta\cos(\omega t+\varphi)\right). \tag{12}$$

Частное решение этого уравнения имеет вид

$$\begin{aligned} \vec{r}(t)&=-\frac{q\vec{E}_0\sqrt{1+\eta^2}}{m\omega\sqrt{\omega^2+\nu^2}}\sin(\omega t+\varphi+\varphi_0),\\ \dot{\vec{r}}(t)&=-\frac{q\vec{E}_0\sqrt{1+\eta^2}}{m\sqrt{\omega^2+\nu^2}}\cos(\omega t+\varphi+\varphi_0), \end{aligned} \tag{13}$$

где $\cos\varphi_0=\dfrac{\nu\eta\vec{e}_y-\omega\vec{e}_x}{\sqrt{\omega^2+\nu^2}\sqrt{1+\eta^2}}$, $\qquad \sin\varphi_0=-\dfrac{\nu\vec{e}_x+\omega\eta\vec{e}_y}{\sqrt{\omega^2+\nu^2}\sqrt{1+\eta^2}}$.

Подставляя это решение в правую часть уравнения (11) и усредняя ее по периоду, получим с учетом тождества

$$(\vec{E}\cdot\vec{\nabla})\vec{E}+\vec{E}\times(\vec{\nabla}\times\vec{E})=\frac{1}{2}\vec{\nabla}E^2 \tag{14}$$

уравнение движения вида

$$m\dot{\vec{\upsilon}}+m\nu\vec{\upsilon}=\vec{F}\,, \tag{15}$$

где

$$\vec{F}=-\frac{q^2\sqrt{1+\eta^2}}{4m(\omega^2+\nu^2)}\vec{\nabla}E^2 \tag{16}$$

(символ «0», характеризующий начало разложения, для упрощения записи, опускаем).

Из (14) видно, что сила (16) состоит из двух составляющих. Отбросим вторую составляющую условием

$$\vec{\nabla}\times\vec{E}=0 \tag{17}$$

и рассмотрим уравнение движения (3) без силы Лоренца

$$m\ddot{\vec{r}} + m\nu\dot{\vec{r}} = q\vec{E}(\vec{r})\left(\vec{e}_x \sin(\omega t + \varphi) + \vec{e}_y \eta \cos(\omega t + \varphi)\right) \tag{18}$$

и его первое приближение

$$\begin{aligned} m\ddot{\vec{r}} + m\nu\dot{\vec{r}} &= q\vec{E}_0\left(\vec{e}_x \sin(\omega t + \varphi) + \vec{e}_y \eta \cos(\omega t + \varphi)\right) + \\ &+ q\left(\vec{r}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}_0\left(\vec{e}_x \sin(\omega t + \varphi) + \vec{e}_y \eta \cos(\omega t + \varphi)\right) \end{aligned}. \tag{19}$$

Общее решение уравнения для нулевого приближения выглядит следующим образом

$$\vec{r}(t) = \vec{C}_1 + \vec{C}_2 \exp(-\nu t) - \frac{q\vec{E}_0\sqrt{1+\eta^2}}{m\omega\sqrt{\omega^2+\nu^2}} \sin(\omega t + \varphi + \varphi_0). \tag{20}$$

Постоянные интегрирования определяются из начальных условий

$$\vec{r}(0) = 0, \qquad \dot{\vec{r}}(0) = \vec{\upsilon}_0. \tag{21}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} \vec{C}_1 &= -\vec{C}_2 + \frac{q\vec{E}_0\sqrt{1+\eta^2}}{m\omega\sqrt{\omega^2+\nu^2}} \sin(\varphi + \varphi_0), \\ \vec{C}_2 &= -\frac{\vec{\upsilon}_0}{\nu} - \frac{q\vec{E}_0\sqrt{1+\eta^2}}{m\nu\sqrt{\omega^2+\nu^2}} \cos(\varphi + \varphi_0). \end{aligned} \tag{22}$$

Подставляя решение (20) уравнения (11) в правую часть уравнения (19) и усредняя ее по времени, получим

$$\begin{aligned} \vec{F}(\varphi) &= -\frac{q\tilde{\beta}\nu}{(\omega^2+\nu^2)}\left[\left(\frac{\omega}{\nu}\vec{e}_x + \eta\vec{e}_y\right)\cos\varphi + \left(\vec{e}_x - \frac{\omega}{\nu}\eta\vec{e}_y\right)\sin\varphi\right]\left(\vec{\upsilon}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E} + \\ &+ \frac{q\tilde{\beta}\nu}{m(\omega^2+\nu^2)}\left[\left(\left(\omega\eta\vec{e}_y - \frac{\omega^2}{\nu}\vec{e}_x\right)\vec{e}_x + \left(\nu\eta^2\vec{e}_y - \omega\eta\vec{e}_x\right)\vec{e}_y\right)\cos^2\varphi - \right. \\ &- \left.\left(-\left(\nu\vec{e}_x + \omega\eta\vec{e}_x\right)\vec{e}_x + \left(\omega\eta\vec{e}_x + \frac{\omega^2}{\nu}\eta^2\vec{e}_y\right)\vec{e}_y\right)\sin^2\varphi\right]\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E} - \\ &- \frac{q^2}{m(\omega^2+\nu^2)}\frac{1}{2}\left(1+\eta^2\right)\left(\vec{E}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}. \end{aligned} \tag{23}$$

Начальная фаза колебаний, входящая в выражение (23) меняется случайным образом. Поэтому, считая распределение по фазе однородным и усредняя (23) по ней, получим учетом (17) выражение для правой части уравнения (15):

$$\vec{F} = -\frac{1}{4}\frac{q^2\left(1+\eta^2\right)}{m(\omega^2+\nu^2)}\left(1 + \frac{\omega^2-\nu^2}{\omega^2+\nu^2}\tilde{\beta}\right)\vec{\nabla}E^2. \tag{24}$$

Сравнивая (24) с (4) можно заметить, что отличие состоит в наличии множителя $\left(1+\eta^2\right)$. Таким образом, видно, что в предельном случае при $\eta = 0$, мы получаем минимальное значение пондемоторной силы (24). При $\eta = 0$ мы имеем дело с силой, действующей на заряженную частицу в высокочастотном электрическом поле для случая линейно-поляризованной волны. Если η принимает максимальное значение, равное единице, то получаем максимальное значение силы (24), которое характерно дл круговой поляризации. При всех промежуточных значениях, т.е. при $0 \le \eta \le 1$, мы получаем средние значения силы (24), характерные для эллиптически-поляризованной волны.

Таким образом, имеем:

при $\eta = 0$: $\vec{F} = -\frac{1}{4}\frac{q^2}{m\left(\omega^2+\nu^2\right)}\left(1+\frac{\omega^2-\nu^2}{\omega^2+\nu^2}\tilde{\beta}\right)\vec{\nabla}E^2$ - для линейно-поляризованной волны,

при $\eta = 1$: $\vec{F} = -\frac{1}{2}\frac{q^2}{m\left(\omega^2+\nu^2\right)}\left(1+\frac{\omega^2-\nu^2}{\omega^2+\nu^2}\tilde{\beta}\right)\vec{\nabla}E^2$ – для циркулярно-поляризованной волны,

при $0 \le \eta \le 1$: $\vec{F} = -\frac{1}{4}\frac{q^2\left(1+\eta^2\right)}{m\left(\omega^2+\nu^2\right)}\left(1+\frac{\omega^2-\nu^2}{\omega^2+\nu^2}\tilde{\beta}\right)\vec{\nabla}E^2$ - для эллиптически-поляризованной волны.

Литература

1. Солунин С.А., Солунин М.А. О силах, действующих на заряженную частицу в переменном электрическом поле. // Письма в ЖЭТФ. – 2009. – Том 35. – вып. 14.

Работа частично выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках темы 1.4.08 Единого заказ/наряда.

About ponderomotive force in the electromagnetic field of elliptical polarization

E.V. Zudinova

A generalization of the well-known expression for the force acting on a charged particle in a highfrequency electric field in the case of a particle in a medium with a linear speed friction is considered.

