ОЦЕНКА ЧИСЛА ПРЯМЫХ ИЗОКЛИН ПЛОСКИХ ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Доказана теорема о числе прямых изоклин дифференциальной системы на плоскости, правые части которой являются полиномами *n*-ой степени. Показано что число прямых изоклин не превосходит 6*n*-5.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} P_i(x,y) \equiv P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{n} Q_i(x,y) \equiv Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

где $P_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} a_{rs} x^r y^s$, $Q_i(x,y) = \sum\limits_{r+s=i} b_{rs} x^r y^s$, $a_{rs}, b_{rs} \in R$, $n \ge 1$.

Будем говорить, что система (1) удовлетворяет условиям (α), если:

1) $P_n(x,y) \cdot Q_n(x,y) \not\equiv 0$;

2) выполняется хотя бы одно из неравенств

$$\sum_{i=0}^{n-1} |P_i(x,y)| \not\equiv 0 \tag{2}$$

и

$$\sum_{i=0}^{n-1} |Q_i(x,y)| \not\equiv 0 \tag{3}$$

3) $(P,Q) = 1$.

Под прямой изоклиной системы (1) будем понимать прямую изоклину дифференциального уравнения траектории этой системы.

Теорема 1. Если система (1) имеет хотя бы одну особую точку и удовлетворяет условиям (α), то число ее прямых изоклин не превосходит $6n-5$, где $n \in \mathrm{N} \setminus \{1\}$.

Доказательство. Очевидно, что в условиях теоремы система (1) имеет лишь конечное число прямых изоклин. Поэтому, не умаляя общности, считаем, что любая прямая изоклина системы (1) пересекает ось ординат, но никакие две прямые изоклины не пересекаются на этой оси. Кроме того, полагаем, что в равенстве

$$\frac{Q(x,kx+b)}{P(x,kx+b)} \equiv m,\ m \in R \setminus \{0\}. \tag{4}$$

Продифференцируем обе части (4) дважды по x:

$$\begin{gathered} [Q'_x(x,kx+b) + Q'_y(x,kx+b)k]P(x,kx+b) - \\ -[P'_x(x,kx+b) + P'_y(x,kx+b)k]Q(x,kx+b) \equiv 0. \end{gathered} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}&[Q''_{xx}(x,kx+b)+2Q''_{xy}(x,kx+b)k+Q''_{yy}(x,kx+b)k^2]P(x,kx+b)-\\&-[P''_{xx}(x,kx+b)+2P''_{xy}(x,kx+b)k+P''_{yy}(x,kx+b)k^2]Q(x,kx+b)\equiv 0.\end{aligned}, \tag{6}$$

В тождествах (5) и (6) полагаем $x=0$:

$$[Q'_x(0,b)+Q'_y(0,b)k]P(0,b)-[P'_x(0,b)+P'_y(0,b)k]Q(0,b)\equiv 0, \tag{7}$$

$$\begin{aligned}&[Q''_{xx}(0,b)+2Q''_{xy}(0,b)k+Q''_{yy}(0,b)k^2]P(0,b)-\\&-[P''_{xx}(0,b)+2P''_{xy}(0,b)k+P''_{yy}(0,b)k^2]Q(0,b)\equiv 0.\end{aligned}, \tag{8}$$

Из (7) выразим k:

$$k=\frac{P'_x(0,b)Q(0,b)-Q'_x(0,b)P(0,b)}{Q'_y(0,b)P(0,b)-P'_y(0,b)Q(0,b)}. \tag{9}$$

Непосредственной проверкой можно убедиться в том, что относительно b числитель (знаменатель) дроби (9) является многочленом степени не выше $2n-1$ $(2n-2)$, а выражение $Q''_{yy}(0,b)P(0,b)-P''_{yy}(0,b)Q(0,b)\equiv 0$ – многочленом степени не выше $2n-3$. Поэтому, в результате подстановки (9) в (8) получаем уравнение степени не выше $6n-5$ относительно b. Это означает, что система (1) имеет не более $6n-5$ прямых изоклин. Теорема доказана.

Замечание 1. В терминах теории кривых на плоскости результат теоремы 1 может быть сформулирован так: Пусть кривые $Q_n(x,y)=0$ и $P_n(x,y)=0$ n-го порядка имеют хотя бы одну общую точку, $(Q_n,P_n)=1$, хотя бы один из многочленов $P_n(x,y)$ и $Q_n(x,y)$ – неоднородный. Тогда в пучке плоских кривых n-го порядка $Q_n(x,y)-mP_n(x,y)=0$ содержится не более $6n-5$ распадающихся кривых, каждая из которых имеет хотя бы одну прямую в качестве компоненты.

В заключение приведем пример кубической системы, имеющей десять прямых изоклин. Система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\left(y-\dfrac{7}{9}x\right)(y+x-10)(y+2x-6),\\[2mm]\dfrac{dy}{dt}=x\left(y-\dfrac{5}{2}x+\dfrac{15}{2}\right)\left(y+\dfrac{1}{4}x-\dfrac{5}{2}\right),\end{cases} \tag{12}$$

кроме шести очевидных главных изоклин имеет еще три прямых изоклины: $y=x$, $y=-10/3x+10$, $y=-3/5x+6$, на которых индуцировано направление $m_1=-45/32$ и одну прямую изоклину $y=0$, на которой индуцировано направление $m_2=45/112.$.

Особенностью системы (12) является то, что она имеет максимальное число прямых изоклин, причем среди этих прямых нет двух параллельных, то есть число различных направлений прямых изоклин равно десяти. Для сравнения отметим, что число различных направлений инвариантных прямых кубической системы не превосходит шести [5].

Работа частично выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках темы 1.4.08 Единого заказ/наряда.

Литература

1. *Ушхо Д.С.* Прямые изоклины и канонические формы квадратичной дифференциальной системы на плоскости / Д.С. Ушхо, М.И. Горних // Труды ФОРА. – 2002. - № 7. – С. 72-82.
2. *Ушхо Д.С.* О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы / Д.С. Ушхо // Труды ФОРА. – 2003. - № 8. – С. 7-21.

3. *Тлячев В.Б.* К вопросу о прямых изоклинах полиномиальных дифференциальных систем на плоскости / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо // Вестник Нижегородского университета им. Н.И. Лобачевского, 2010. - № 1. – С. 156-162.
4. *Artes J., Grunbaum B., Ilibre J.* On the number of invariant straight lines for polynomial differential systems // Pacific Journal of Mathematics. – 1998. – V. 184. - № 2. – P. 207-230.
5. *Тлячев В.Б.* Оценка числа различных направлений действительных инвариантных прямых кубической дифференциальной системы на плоскости / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо // Труды ФОРА, 2009. - № 14. – С. 1-4.

Estimation of the number of straight-line isoclines of plane polynomial vector fields

V.B. Tlyachev, A.D. Ushkho, D.S. Ushkho

The theorem on the number of straight-line isoclines for the plane differential system with polynomials of n-th degree right-hand sides is proved. It is showed that the number of straight-line isoclines not exceed 6n-5..

