1996 г. № 1

Труды ФОРА

О КОСОСИММЕТРИЧЕСКИХ ФОРМАХ КАК РЕШЕНИЯХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический институт, Майкоп

В статье рассматриваются кососимметрические формы как решения линейных дифференциальных уравнений с точки зрения теории представлений алгебр Ли.

В работе [1] изучался вопрос о симметрических формах как решениях линейных дифференциальных уравнений. В настоящей статье рассматривается аналогичная задача для кососимметрических форм. Из теории представлений алгебр и групп Ли известно, что кососимметрическая k-форма задается представлением алгебры Ли A_m со старшим весом $\circ - \circ - \cdots - \overset{1}{\circ} - \circ - \cdots - \circ - \circ$, где единичная числовая отметка находится на k-ом месте $(k \le m)$. Размерность пространства этого представления равна C_{m+1}^{k} - числу сочетаний из $m+1$ элементов по k [2, с.154]. Под A_m понимается совокупность всех матриц $(m+1)$-го порядка со следом нуль. Заметим также, что вопрос о симметрических и кососимметрических формах как стационарных интегралов дифференциальных уравнений, изучался в работе [3, с.20].

1. Рассмотрим уравнение $u'' = a(t)u$, где $a(t)$ - гладкая функция. Пусть u_1, u_2 - линейно независимые решения этого уравнения. Тогда кососимметрическая форма $y = u_1'u_2 - u_1u_2'$ постоянна, поскольку $y' = 0$.

2. Рассмотрим уравнение $u''' = a(t)u' + b(t)u$, где $a(t), b(t)$ - гладкие функции. Пусть u_1, u_2, u_3 - линейно независимые решения этого уравнения. Тогда кососимметрические формы $u_1'u_2 - u_1u_2'$, $u_1'u_3 - u_1u_3'$, $u_1'u_2 - u_1u_2'$ являются решениями сопряженного уравнения третьего порядка: $y''' = (ay)' - by$.

С точки зрения теории представлений алгебры Ли этот факт означает следующее. Пространство решений u_1, u_2, u_3 задается представлением $\overset{1}{\circ} - \circ$, а пространство кососимметрических форм задается контраградиентным представлением $\circ - \overset{1}{\circ}$. Размерности этих пространств совпадают. Данный пример допускает обобщение на случай линейных систем произвольного порядка (см., например, [4]). В этом случае речь идет о представлениях $\overset{1}{\circ} - \circ - \cdots - \circ$ и $\circ - \cdots - \circ - \overset{1}{\circ}$. Размерности этих пространств также совпадают.

3. Первый нетривиальный пример, когда размерности пространства решений и пространства кососимметрических форм не совпадают, заключается в следующем утверждении.

Теорема. Пусть u_1, u_2, u_3, u_4 - линейно независимые решения уравнения

$$u^{(4)} = au'' + bu' + cu, \tag{1}$$

где $a(t), b(t), c(t)$ - гладкие функции.

Тогда кососимметрическая 2-форма

$$u_i^{(p)}u_j^{(q)} - u_i^{(q)}u_j^{(p)}; \ \overline{i,j} = \overline{1,4}; \ p,q = \overline{0,3} \tag{2}$$

является решением линейного дифференциального уравнения 6-го порядка, эквивалентного системе уравнений:

$$Z' = \Phi\big(A(t)\big)Z\,,$$

где $\Phi = \circ - \overset{1}{\circ} - \circ$ - представление алгебры Ли A_3,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ c & b & a & 0 \end{pmatrix};\; \Phi\big(A(t)\big) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ b & a & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -c & 0 & a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -c & -b & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Доказательство. Введем стандартные обозначения. Пусть α, β, γ -простые корни алгебры Ли A_3:

$$e_\alpha = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\; e_\beta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};\; e_\gamma = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix};$$

$$e_{-\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix};\; e_{-\gamma-\beta} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix};\; e_{-\alpha-\beta-\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда представление $\circ - \overset{1}{\circ} - \circ$ переведет эти матрицы в матрицы $E_\delta = \Phi(e_\delta)$, где δ пробегает систему корней алгебры A_3, т.е. множество

$$\Sigma = \big\{\pm\alpha,\, \pm\beta,\, \pm\gamma,\, \pm(\alpha+\beta),\, \pm(\beta+\gamma),\, \pm(\alpha+\beta+\gamma)\big\}.$$

Используя стандартные обозначения, представим матрицу $A(t)$ в виде:

$$A(t) = e_\alpha + e_\beta + e_\gamma + ae_{-\gamma} + be_{-\gamma-\beta} + ce_{-\alpha-\beta-\gamma}.$$

Представление $\Phi = \circ - \overset{1}{\circ} - \circ$ переводит матрицу $A(t)$ в матрицу:

$$\Phi\big(A(t)\big) = \Phi(e_\alpha) + \Phi(e_\beta) + \Phi(e_\gamma) + a\Phi(e_{-\gamma}) + b\Phi(e_{-\gamma-\beta}) + c\Phi(e_{-\alpha-\beta-\gamma}).$$

Пространство представления $\circ - \overset{1}{\circ} - \circ$ состоит из шести базисных векторов $\xi,\, E_{-\beta}\xi,\, E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi,\, E_{-\gamma}E_{-\beta}\xi,\, E_{-\gamma}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi,\, E_{-\beta}E_{-\gamma}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi$, где ξ - старший вектор представления. Искомая матрица $\Phi\big(A(t)\big)$ определяет действие оператора $E_\delta,\ \delta \in \Sigma$ на базисные векторы. Используя известные соотношения между операторами E_δ [2, с.115], получаем следующие нетривиальные соотношения:

$$E_{\alpha}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi = 1\cdot E_{-\beta}\xi,\quad E_{\alpha}E_{-\gamma}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi = 1\cdot E_{-\gamma}E_{-\beta}\xi,$$
$$E_{\beta}E_{-\beta}\xi = 1\cdot \xi,\quad E_{\beta}E_{-\beta}E_{-\gamma}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi = 1\cdot E_{-\alpha}E_{-\gamma}E_{-\beta}\xi,$$
$$E_{\gamma}E_{-\gamma}E_{-\beta}\xi = 1\cdot E_{-\beta}\xi,\quad E_{\gamma}E_{-\gamma}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi = 1\cdot E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi,$$
$$E_{-\gamma}E_{-\beta}\xi = 1\cdot E_{-\gamma}E_{-\beta}\xi,\quad E_{-\gamma}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi = 1\cdot E_{-\gamma}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi,$$
$$E_{-\alpha-\beta-\gamma}\xi = -1\cdot E_{-\gamma}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi,\quad E_{-\alpha-\beta-\gamma}E_{-\beta}\xi = -1\cdot E_{-\beta}E_{-\gamma}E_{-\alpha}E_{-\beta}\xi.$$

Эти соотношения определяют элементы матрицы $\Phi\big(A(t)\big)$. Заметим, что матрица $\Phi\big(A(t)\big)$ может быть получена путем дифференцирования формы (2) в силу уравнения (1).

4. В общем случае кососимметрические 2-формы задаются представлением алгебры A_m со старшим весом $\circ - \overset{1}{\circ} - \circ - \cdots - \circ - \circ$. Размерность этого представления равна $m(m+1)/2$.

Пусть, далее, $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_m$ - простые корни алгебры Ли A_m. Систему весов представления Φ зададим следующей таблицей. Для удобства записи в таблице оставлены только индексы соответствующих весов представления, взятые с противоположными знаками. При этом старшему вектору ξ присвоен индекс нуль.

0	2	32	432	$m(m-1)\dots 2$
	12	132	1432	$1\,m(m-1)\dots 2$
		2132	21432	$21\,m(m-1)\dots 2$
			....	....
				$(m-1)m(m-1)\dots 2$

Например, индекс 132 означает, что из старшего вектора последовательно вычитаются простые корни $\alpha_1, \alpha_3, \alpha_2$.

Заметим, что таблица весов представления образована по следующему правилу. Каждая i-ая строка получается из $(i-1)$-ой строки путем приписывания слева индекса i, $i = 0, 1, \dots, m-1$. Предположим, что рассматриваемая система линейных дифференциальных уравнений обладает матрицей:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_{m-1} & a_{m-2} & a_{m-3} & \dots & a_0 & 0 \end{pmatrix},$$

где a_{m-s}, $s = \overline{1, m}$ - гладкие функции.

Представление Φ переведет матрицу $A(t)$ в матрицу $\Phi\big(A(t)\big)$ порядка $m(m+1)/2$. Для нахождения элементов матрицы $\Phi\big(A(t)\big)$ достаточно описать действия операторов E_{γ}, $\gamma \in \Sigma$ на базисные векторы, где Σ означает систему корней алгебры A_m. Действие операторов H_{γ}, $\gamma \in \Sigma$ тривиально, в виду того, что матрица $A(t)$ имеет нулевую диагональ. Используя стандартные обозначения, запишем матрицу $A(t)$ в виде:

$$A(t) = \sum_{k=1}^{m} e_{\alpha(k)} + \sum_{s=1}^{m} a_{m-s} e_{-\alpha(s)},$$

где

$$\alpha(s)=\sum_{i=m}^{m-s}\alpha_i,\quad \alpha(k)=\alpha_k,\ k\in\overline{1,m}.$$

Представление Φ переведет матрицу $A(t)$ в матрицу

$$\Phi\bigl(A(t)\bigr)=\sum_{k=1}^{m}\Phi\bigl(e_{\alpha(k)}\bigr)+\sum_{s=1}^{m}a_{m-s}\Phi\bigl(e_{-\alpha(s)}\bigr).$$

Таким образом, для нахождения элементов матрицы $\Phi\bigl(A(t)\bigr)$ достаточно определить действия операторов $E_\gamma,\ \gamma\in\Sigma$ на базисные векторы. Как следует из структуры матрицы $A(t)$ нетривиальным действием обладают только операторы $E_{\alpha(k)}$ и $E_{-\alpha(s)}$. Операторы $E_{\alpha(k)}$ действуют на таблицу индексов следующим образом. Операторы $E_{\alpha(k)}$ уничтожают индекс k в весах, начинающихся с индекса k. На остальные веса это действие тривиально. Например, оператор $E_{\alpha(1)}$ переводит вторую строку таблицы в первую, так как все веса во второй строке начинаются с индекса 1. Действие операторов $E_{-\alpha(s)}$ обратно действию операторов $E_{\alpha(k)}$. Операторы $E_{-\alpha(s)}$ приписывают индекс s к тем весам, которые порождают веса, начинающиеся с индекса s. Например, оператор $E_{-\alpha(4)}$ переводит третий столбец в четвертый, так как все веса четвертого столбца начинаются с индекса 4. Естественно, при этом учитывается тот факт, что индексы перестановочны между собой, если соответствующие им операторы перестановочны. Таким образом, элементы матрицы $\Phi\bigl(A(t)\bigr)$ однозначно определяются действием операторов $E_{\alpha(k)}$ и $E_{-\alpha(s)}$ на базисные векторы.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$u^{(5)}=a_3u'''+a_2u''+a_1u'+a_0u,$$

где $a_i(t)$ - гладкие функции.

Тогда кососимметрические формы

$$y_1=u_1u_2'-u_1'u_2,\ \ y_2=u_1u_2''-u_1''u_2,\ \ y_3=u_1'u_2''-u_1''u_2',\ \ y_4=u_1u_2'''-u_1'''u_2,$$
$$y_5=u_1'u_2'''-u_1'''u_2',\ \ y_6=u_1u_2^{(4)}-u_1^{(4)}u_2,\ \ y_7=u_1''u_2'''-u_1'''u_2'',\ \ y_8=u_1'u_2^{(4)}-u_1^{(4)}u_2',$$
$$y_9=u_1''u_2^{(4)}-u_1^{(4)}u_2'',\ \ y_{10}=u_1'''u_2^{(4)}-u_1^{(4)}u_2'''$$

удовлетворяют системе линейных уравнений десятого порядка:

$$\begin{cases}
y_1'=y_2\\
y_2'=y_3+y_4\\
y_3'=y_5\\
y_4'=y_5+y_6\\
y_5'=y_7+y_8\\
y_6'=a_1y_1+a_2y_2+a_3y_4+y_8\\
y_7'=y_9\\
y_8'=a_0y_1+a_2y_3+a_3y_5+y_9\\
y_9'=-a_0y_2-a_1y_3+a_3y_7+y_{10}\\
y_{10}'=-a_0y_4-a_1y_5-a_2y_7
\end{cases}$$

Матрица этой системы совпадает с матрицей $\Phi\big(A(t)\big)$ для представления $\circ - \overset{1}{\circ} - \circ - \circ$, в чем можно убедиться непосредственной проверкой.

Литература

1. *Паланджянц Л.Ж.* //Дифференциальные уравнения.-1992.-Т.28.-№10.-с.1733-1736.
2. *Дынкин Е.Б.* //Труды Моск. мат. о-ва.-1952.-Т.1.-с.39-166.
3. *Мироненко В.И.* Линейная зависимость функций вдоль решений дифференциальных уравнений.-Минск, 1981.-104 с.
4. *Беркович Л.М., Розов Н.Х., Эйшинский А.М.* //Publ. Elect. Fak. Univ. Beoqradu, mat. i fiz.-1968.-№241.-с.61-87.

On antisymmetric forms as solutions of line differential equations

L.Zh. Palandzhyants

Antisymmetric forms are treated as solutions of line differential equations from the point of view of the Lie algebras representation theory.

