2 0 1 2 г **№ 17**

Т р у д ы   Ф О Р А

О БИФУРКАЦИЯХ БЕСКОНЕЧНО УДАЛЕННЫХ ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛОВ УРАВНЕНИЙ ЛЬЕНАРА С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

В.Ш. Ройтенберг

Ярославский государственный технический университет, г. Ярославль

Рассматриваются типичные однопараметрические семейства уравнений Льенара с периодическими коэффициентами. Даны условия рождения устойчивого предельного цикла из «бесконечности». Получены асимптотические формулы для уравнения и периода этого предельного цикла.

Хорошо известна роль уравнений Льенара $\ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0$ в теории колебаний. Получению условий существования предельных циклов при разных предположениях о непериодических функциях $f(x)$ и $g(x)$ посвящено большое число работ (см.[1]). Уравнения маятникового типа – с периодическими коэффициентами $f(x)$ и $g(x)$ – рассматривались для частных случаев $f(x)$ и $g(x)$ [2], [3].

Мы будем рассматривать уравнение Льенара

$$\ell: \quad \ddot{x}+f(x)\dot{x}+g(x)=0,$$

с непрерывными ω-периодическими функциями $f(x)$ и $g(x)$, заданными на множестве действительных чисел $\mathbf{R}$. Это уравнение определяет на цилиндре $S^1\times\mathbf{R}=\mathbf{R}/\omega\mathbf{Z}\times\mathbf{R}$ автономную систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dot{x}=y,\\ \dot{y}=-f(x)y-g(x),\end{cases}$$

которую также будем обозначать ℓ.

1. Бесконечно удаленные замкнутые траектории. Обозначим $\overline{\mathbf{R}}:=\mathbf{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$ – двухточечную компактификацию $\mathbf{R}$. Превратим $\overline{\mathbf{R}}$ в одномерное C^∞-многообразие с краем, взяв в качестве карт $(\mathbf{R},h_1)$, $h_1(x):=x$, $((0,+\infty],h_2)$, $h_2(x):=1/x$ при $x\in(0,+\infty)$ и $h_2(+\infty):=0$, $([-\infty,0),h_3)$, $h_3(x):=1/x$ при $x\in(-\infty,0)$ и $h_3(-\infty):=0$. Конечно, $\overline{\mathbf{R}}$ диффеоморфно отрезку числовой прямой. Мы хотим «продолжить» систему ℓ на $S^1\times\overline{\mathbf{R}}$.

В областях $S^1\times(0,+\infty)$ и $S^1\times(-\infty,0)$ системы уравнений

$$\ell_+:\begin{cases}\dot{x}=1,\\ \dot{y}=-f(x)-g(x)/y,\end{cases} \quad \text{и} \quad \ell_-:\begin{cases}\dot{x}=-1,\\ \dot{y}=f(x)+g(x)/y\end{cases}$$

имеют те же (ориентированные) траектории, что и система уравнений ℓ. В координатах x и $z=1/y$ системы уравнений ℓ_+ и ℓ_- примут, соответственно, вид

$$\overline{\ell}_+:\begin{cases}\dot{x}=1,\\ \dot{z}=f(x)z^2+g(x)z^3.\end{cases} \quad \text{и} \quad \overline{\ell}_-:\begin{cases}\dot{x}=-1,\\ \dot{z}=-f(x)z^2-g(x)z^3.\end{cases}$$

Но системы $\overline{\ell}_+$ и $\overline{\ell}_-$ определены и при $z=0$, то есть, соответственно, на $S^1\times(0,+\infty]$ и $S^1\times[-\infty,0)$. Кривые $\Gamma_+:=S^1\times\{+\infty\}$ и $\Gamma_+:=S^1\times\{-\infty\}$, задаваемые в координатах x,z уравнением $z=0$, являются траекториями, соответственно, системы $\overline{\ell}_+$ и $\overline{\ell}_-$. Будем их называть *бесконечно удаленными замкнутыми траекториями* уравнения Льенара.

От систем уравнений $\overline{\ell}_+$ и $\overline{\ell}_-$. перейдем к уравнению

$$\frac{dz}{dx} = f(x)z^2 + g(x)z^3, \qquad (1)$$

где, соответственно, $z \ge 0$ и $z \le 0$. Обозначим $z(u,x)$ его решение, удовлетворяющее начальному условию $z(u,0) = u$. При достаточно малом $\rho > 0$ и $|u| < \rho$ оно определено для $x \in [-\omega, \omega]$ и аналитически зависит от u [4]. Так как $z(0,x) = 0$, то

$$z(u,x) = z_1(x)u + z_2(x)u^2 + z_3(x)u^3 + z_4(x)u^4 + ... \qquad (2)$$

Для функций $z_i(x),\ i = 1,2,3,4,$ получаем дифференциальные уравнения и начальные условия

$$z_1'(0) = 0, \quad z_1(0) = 1;$$

$$z_2'(x) = f(x)z_1^2(x), \quad z_2(0) = 0;$$

$$z_3'(x) = 2f(x)z_1(x)z_2(x) + g(x)z_1^3(x), \quad z_3(0) = 0;$$

$$z_4'(x) = f(x)(2z_1(x)z_3(x) + z_2^2(x)) + 3g(x)z_1^2(x)z_2(x), \quad z_4(0) = 0;$$

из которых последовательно находим

$$z_1(x) \equiv 1, \qquad (3)$$

$$z_2(x) = \int_0^x f(s)ds, \qquad (4)$$

$$z_3(x) = 2\int_0^x f(s)\int_0^s f(t)dtds + \int_0^x g(s)ds = \left(\int_0^x f(t)dt\right)^2 + \int_0^x g(s)ds, \qquad (5)$$

$$z_4(x) = 3\int_0^x f(s)\left(\int_0^s f(t)dt\right)^2 ds + 2\int_0^x f(s)\int_0^s g(t)dtds + 3\int_0^x g(s)\int_0^s f(t)dtds =$$

$$= \left(\int_0^x f(s)ds\right)^3 + 2\int_0^x f(s)ds\int_0^x g(s)ds + \int_0^x g(s)\int_0^s f(t)dtds. \qquad (6)$$

Обозначим

$$a := a(\ell) := \int_0^\omega f(x)dx, \quad b := b(\ell) := \int_0^\omega g(x)dx, \quad c := c(\ell) = \int_0^\omega g(s)\int_0^s f(t)dtds. \qquad (7)$$

Функция $P(u) := z(u,\omega)$ является функцией последования по положительным (отрицательным) полутраекториям системы $\overline{\ell}_+$ ($\overline{\ell}_-$) на трансверсали $x = 0,\ z \in [0,\rho)$ ($x = 0,\ z \in (-\rho, 0]$)). Ввиду (2)–(7) ее можно представить в виде

$$P(u) = u + au^2 + (a^2 + b)u^3 + (a^3 + 2ab + c)u^4 + \dots. \qquad (8)$$

Отсюда следует, что если $a(\ell) < 0$, то Γ_+ и Γ_- – устойчивые предельные циклы, а если $a(\ell) > 0$, то Γ_+ и Γ_- – неустойчивые предельные циклы.

2. Бифуркации бесконечно удаленных предельных циклов. Рассмотрим уравнения Льенара, зависящие от параметра $\mu \in (-\delta', \delta')$:

$$\ell_\mu: \quad \ddot{x} + f(x,\mu)\dot{x} + g(x,\mu) = 0.$$

Будем считать, что f и g непрерывны и имеют непрерывные производные по параметру до пятого порядка включительно. Обозначим $a(\mu) = a(\ell_\mu)$, $b(\mu) := b(\ell_\mu)$ и $c(\mu) := c(\ell_\mu)$. Пусть $a(0) = 0$. Тогда из (8) получаем, что при $b(0) < 0$ ($b(0) > 0$) Γ_+ – устойчивый (неустойчивый), а Γ_- – неустойчивый (устойчивый) предельные циклы уравнения ℓ_0.

Теорема 1. *Пусть* $a(0) = 0$, $a'(0) > 0$ *и* $b(0) < 0$. *Тогда существуют такие положительные числа* $\delta < \delta'$ *и* d, *что имеют место следующие утверждения.*

1) Если $-\delta < \mu \le 0$ ($0 \le \mu < \delta$) *то уравнение* ℓ_μ *не имеет в* $S^1 \times (d, +\infty)$ ($S^1 \times (-\infty, -d)$) *замкнутых траекторий.*

2) Если $0 < \mu < \delta$ ($-\delta < \mu < 0$), *то уравнение* ℓ_μ *имеет в* $S^1 \times (d, +\infty)$ ($S^1 \times (-\infty, -d)$) *единственную замкнутую траекторию* $\Gamma(\mu)$. *Эта траектория является устойчивым (неустойчивым) грубым предельным циклом; она задается уравнением*

$$y = -\frac{b(0)}{a'(0)}\frac{1}{\mu} + \frac{a''(0)b(0)}{2a'^2(0)} + \frac{c(0)}{b(0)} - \frac{b'(0)}{a'(0)} - \int_0^x f(s,0)ds + r(x,\mu)\mu\,, \qquad (9)$$

где $r(x,\mu)$ *– ограниченная функция; ее период*

$$T(\mu) = -\omega a'(0)b^{-1}(0)\mu + o(\mu)\,. \qquad (10)$$

В случае $b(0) > 0$ *в этих утверждениях* $S^1\times(d,+\infty)$ *и* $S^1\times(-\infty,-d)$ *меняются ролями.*

Доказательство. При достаточно малых $\bar{\delta} > 0$ и $\rho > 0$ для любого $u \in [0,\rho]$ определено решение $z(u,x,\mu)$, $x\in[0,\omega]$, уравнения (1), соответствующего уравнению ℓ_μ, $\mu\in[-\bar{\delta},\bar{\delta}]$, удовлетворяющее начальному условию $z(u,0,\mu) = u$. Тогда $P(u,\mu) := z(\omega,u,\mu)$ – функция последования по траекториям системы $\bar{\ell}_{\mu+}$. В условиях теоремы правая часть уравнения (1) – функция класса C^5 по переменным (z,μ), поэтому и $P\in C^5$ [1]. Тогда $P(u,\mu) - u = u^2Q(u,\mu)$, где $Q\in C^3$. Ввиду (3)

$$Q(u,\mu) = a(\mu) + (a^2(\mu) + b(\mu))u + (a^3(\mu) + 2a(\mu)b(\mu) + c(\mu))u^2 + q(u,\mu)\,,$$

где $q(0,\mu) = q'_u(0,\mu) = q''_{uu}(0,\mu) = 0$. Так как $a(0) = 0$, то $Q(0,0) = 0$, $Q'_u(0,0) = b(0) \neq 0$. По теореме о неявной функции существуют такие числа $\delta_* \in (0,\bar{\delta})$ и $\varepsilon\in(0,\rho)$, что при любом $\mu\in(-\delta_*,\delta_*)$ уравнение $Q(u,\mu) = 0$ имеет в интервале $(-\varepsilon,\varepsilon)$ единственное решение $u = U(\mu)$, при этом $U\in C^3$,

$$U(0) = 0\,,\quad U'(0) = -\frac{a'(0)}{b(0)}\,,\quad U''(0) = \frac{2b'(0)a'(0)}{b^2(0)} - \frac{2a'^2(0)c(0)}{b^3(0)} - \frac{a''(0)}{b(0)}\,.$$

По формуле Тейлора

$$U(\mu) = -\frac{a'(0)}{b(0)}\mu + \left(\frac{b'(0)a'(0)}{b^2(0)} - \frac{a'^2(0)c(0)}{b^3(0)} - \frac{a''(0)}{2b(0)}\right)\mu^2 + r_1(\mu)\mu^3\,,$$

где $r_1(\mu)$ – ограниченная функция. Выбрав δ_* достаточно малым, будем иметь при $-\delta_* < \mu < 0$ $u = U(\mu) < 0$, а при $0 < \mu < \delta_*$ $u = U(\mu) > 0$ и $P'_u(U(\mu),\mu) - 1 < 0$. Поэтому при $0 < \mu < \delta_*$ через точку с координатами $x = 0,\ z = U(\mu)$ проходит грубый устойчивый предельный цикл $\Gamma(\mu)$ уравнения ℓ_μ, причем $\Gamma(\mu)$ – единственная замкнутая траектория, проходящая через точки с координатами $x = 0,\ z\in(0,\varepsilon)$, а при $-\delta < \mu \le 0$ через точки с такими координатами замкнутые траектории не проходят. Подставив $u = U(\mu)$ в выражение (2), получим уравнение $\Gamma(\mu)$ в координатах $x,\ z$:

$$z = -\frac{a'(0)}{b(0)}\mu + \left(\frac{b'(0)a'(0)}{b^2(0)} - \frac{a'^2(0)c(0)}{b^3(0)} - \frac{a''(0)}{2b(0)} + \frac{a'^2(0)}{b^2(0)}\int_0^x f(s,0)ds\right)\mu^2 + r_2(x,\mu)\mu^3\,,$$

а $r_2(x,\mu)$ – ограниченная функция. Переходя к координатам $x,\ y = 1/z$ получим уравнение (9). Формулу (10) для периода цикла находим из равенства $T(\mu) = \int_0^\omega \frac{dx}{Y(x,\mu)}$, где $Y(x,\mu)$ – функция, стоящая в правой части равенства (9).

Пусть $d := \max_{\mu\in[-\delta_*,\delta_*]}\ \max_{x\in[0,\omega]}(1/z(\varepsilon,x,\mu))$. Ввиду (9) существует такое $\delta\in(0,\delta_*)$, что при $0 < \mu < \delta$ $\Gamma(\mu)\subset S^1\times(d,+\infty)$. При нашем выборе d любая замкнутая траектория уравнения ℓ_μ, $-\delta < \mu < \delta$, принадлежащая $S^1\times(d,+\infty)$, задается уравнением $y = 1/z(u,x,\mu)$, $x\in[0,\omega]$, где $0 < u < \varepsilon$, и потому существует только при $0 < \mu < \delta$ и совпадает с $\Gamma(\mu)$.

Пример. Рассмотрим уравнение

$$\ddot{x} + \mu f(x)\dot{x} - \beta + \sin x = 0\,,$$

где $f(x)$ – непрерывная 2π-периодическая функция, $f(x)\ge 0$, $\beta > 0$. Оно описывает колебания кругового маятника с постоянным вращающим моментом и демпфированием, а также ряд задач теории электрических машин [2]. Из теоремы 1 получаем, что при достаточно малых $\mu > 0$ уравнение имеет устойчивый предельный цикл периода $T(\mu) = 2\pi(a/\beta)\mu + o(\mu)$, задаваемый уравнением $y = (\beta/a)\mu^{-1} + r(x,\mu)\mu$, где a определено в (7), а $r(x,\mu)$ – ограниченная функция.

Рассмотрим уравнения Льенара, зависящие от «большого» параметра v:

$$\ell_v:\quad \ddot{x} + f(x)\dot{x} + vg(x) = 0\,.$$

Замена времени $\tau = t\sqrt{v}$ переводит его в уравнение $x''_{\tau\tau} + v^{-1/2} f(x)x'_{\tau} + g(x) = 0$ с «малым» параметром $\mu = v^{-1/2}$. Из теоремы 1, примененной к этому уравнению, получается

Теорема 2. *Пусть* $a := \int_0^{\omega} f(x)dx > 0$, $b := \int_0^{\omega} g(x)dx < 0$. *Тогда существуют такие положительные числа* N *и* d, *что при* $v > N$ *уравнение* ℓ_v *имеет в области* $S^1 \times (d, +\infty)$ *единственную замкнутую траекторию. Эта траектория является устойчивым грубым предельным циклом; она задается уравнением* $y = -(b/a)v + r(x, v)$, *где* $r(x, \mu)$ *– ограниченная функция; ее период* $T(v) = -\omega(a/b)v^{-1} + o(v^{-1})$.

Литература

1. *Рейссиг Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений / Р. Рейссиг, Г. Сансоне, Р. Конти. М.: Наука, 1974.
2. *Андронов А.А.* Теория колебаний / А.А. Андронов, А.А. Витт, С.Э. Хайкин. – М.: Наука, 1981. – 568 с.
3. *Морозов А.Д.* О предельных циклах и хаосе в уравнениях маятникового типа // Прикладная математика и механика. 1989. Т. 58, № 4.
4. *Лефшец С.* Геометрическая теория дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1961. – 388 с.

ON BIFURCATIONS OF INFINITELY FAR LIMIT CYCLES OF LIENARD EQUATIONS WITH PERIODIC COEFFICIENTS

V.Sh. Roitenberg

Generic one-parameter families of Lienard equations are considered. Conditions of birth of limit cycle from "infinity" are given. Asymptotic formulae for equation and period of this cycle are obtained.

