О КАЛИБРОВОЧНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ И ВАРИАЦИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический университет, г. Майкоп

Устанавливается связь между калибровочными преобразованиями и вариациями мультипликативного интеграла. Рассматриваются обыкновенные и криволинейные мультипликативные интегралы двух видов и вариации типа мультипликативных и аддитивных. При этом получены матричные дифференциальные уравнения типа Риккати.

1. Определение мультипликативного интеграла [1]

Пусть $Mat(n,R)$ – алгебра матричных функций n-го порядка над полем действительных чисел R, E – единичная матрица n-го порядка и $A(t)$ – функция вещественного переменного t, принимающая значения в алгебре $Mat(n,R)$, $a,b\in R$, $a\le b$, $[a,b]=\{t\in R, a\le t\le d\}$, T – разбиение отрезка $[a,b]$ точками $t_0=a,t_1,t_2,\cdots,t_n=b$, $t_i\le t_{i+1}$, $i=0,1,\cdots,n-1$; $l(T)=\max(t_{i+1}-t_i)$, $\Delta t_i=t_{i+1}-t_i$.

Рассмотрим произведение

$$(E+A(t_0)\Delta t_0)(E+A(t_1)\Delta t_1)\cdots(E+A(t_n)\Delta t_n)=\Pi(A,T).$$

Если при любом изменении разбиения T, при котором $l(T)\to 0$, произведение $\Pi(A,T)$ стремится к некоторому пределу, то этот предел называется мультипликативным интегралом матричной функции $A(t)$ по отрезку $[a,b]$ и обозначается

$$\int_a^{\cup b} E+A(t)dt. \tag{1}$$

Аналогично определяется мультипликативный интеграл, связанный с обратным порядком сомножителей и обозначается

$$\int_a^{\cap b} E+A(t)dt. \tag{2}$$

Мультипликативные интегралы (1) и (2) называют прямым и обратным. Связь между прямым и обратным мультипликативными интегралами задается формулой

$$\int_a^{\cup b} E+A(t)dt=\left(\int_a^{\cap b} E-A(t)dt\right)^{-1}. \tag{3}$$

2. Определение калибровочных преобразований [2-5]. Дифференциальные формулы.

1). Пусть $C(t)\in Mat(n,R)$, $\det C\ne 0$. Уравнение $Y'=A(t)Y$ путем следующих замен

$$Y=CZ; Y=ZC; Z=CY; Z=YC$$

приводится соответственно к виду:

$$Z' = \left(C^{-1}AC - C^{-1}C'\right)Z; Z' = AZ - ZC'C^{-1};$$
$$Z' = \left(CAC^{-1} - C'C^{-1}\right)Z; Z' = AZ + ZC^{-1}C'.$$

2). Уравнение $Y' = YA(t)$ путем следующих замен

$$Y = CZ; Y = ZC; Z = CY; Z = YC$$

приводится соответственно к виду:

$$Z' = ZA - C^{-1}C'Z; Z' = Z\left(CAC^{-1} - C'C^{-1}\right);$$
$$Z' = ZA + C'C^{-1}Z; Z' = Z\left(C^{-1}AC + C^{-1}C'\right).$$

3). Преобразования

$$A \to C^{-1}AC - C^{-1}C',$$
$$A \to CAC^{-1} - C'C^{-1},$$

называют соответственно прямым и обратным калибровочными преобразованиями для обратного мультипликативного интеграла.
4). Преобразования

$$A \to CAC^{-1} - C'C^{-1},$$
$$A \to C^{-1}AC + C^{-1}C',$$

называют соответственно прямым и обратным калибровочными преобразованиями для прямого мультипликативного интеграла.

3. Определение калибровочных преобразований. Интегральные формулы.

Преобразование

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt \to \overset{\frown}{\int} E + \left(C^{-1}(t)A(t)C(t) - C^{-1}(t)C'(t)\right)dt, \qquad (4)$$

будем называть прямым калибровочным преобразованием прямого мультипликативного интеграла.

Преобразование

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt \to \overset{\frown}{\int} E + \left(C(t)A(t)C^{-1}(t) + C'(t)C^{-1}(t)\right)dt, \qquad (5)$$

будем называть обратным калибровочным преобразованием прямого мультипликативного интеграла.

Аналогично определяются калибровочные преобразования для обратного мультипликативного интеграла.

4. Определение вариаций мультипликативного интеграла

Преобразование

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt \to \overset{\frown}{\int} E + C(t)A(t)dt, \qquad (6)$$

будем называть левой мультипликативной вариацией прямого мультипликативного интеграла.

Преобразование

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt \to \overset{\frown}{\int} E + A(t)C(t)dt, \qquad (7)$$

будем называть правой мультипликативной вариацией прямого мультипликативного интеграла.

Преобразование

$$\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt \to \overset{\frown}{\int} E + \big(A(t) + C(t)\big)dt, \tag{8}$$

будем называть аддитивной вариацией прямого мультипликативного интеграла.

Аналогично определяются вариации для обратного мультипликативного интеграла.

5. Связь между калибровочными преобразованиями и вариациями мультипликативного интеграла

1). Установим связь между прямым калибровочным преобразованием прямого мультипликативного интеграла и аддитивной вариацией прямого мультипликативного интеграла. Из равенств (4) и (8) получаем следующее уравнение

$$C^{-1}AC - C^{-1}C' = A + C. \tag{9}$$

Умножив обе части уравнения (9) на C^{-1} слева, получаем уравнение

$$-C' = CA - AC + C^2. \tag{10}$$

Умножив обе части уравнения (10) на C^{-1} слева и справа, получаем уравнение: $-C^{-1}C'C^{-1} = AC^{-1} - C^{-1}A + E$, откуда следует, что

$$(C^{-1})' = AC^{-1} - C^{-1}A + E. \tag{11}$$

Введем обозначение $X = C^{-1}$. Тогда уравнение (11) запишется в виде:

$$X' = AX - XA + E. \tag{12}$$

Будем искать решение уравнения (12) в виде $X = X_0 + X_1$, где $X_1 = Et$. Тогда уравнение (12) сведется к уравнению

$$X_0' = AX_0 - X_0A, \tag{13}$$

которое имеет решение вида (см., например, [3, с.17]):

$$X_0 = \left(\overset{\frown}{\int} E + Adt\right)\cdot C_0 \cdot \left(\overset{\smile}{\int} E - Adt\right)^{-1}, \tag{14}$$

где C_0 – постоянная матрица. Из равенства (14) откуда с учетом равенства (3), имеем

$$X_0 = \left(\overset{\frown}{\int} E + Adt\right)\cdot C_0 \cdot \left(\overset{\frown}{\int} E + Adt\right). \tag{15}$$

Следовательно, получаем решение уравнения (10):

$$C = \left(\left(\overset{\frown}{\int} E + Adt\right)\cdot C_0 \cdot \left(\overset{\frown}{\int} E + Adt\right) + Et\right)^{-1}. \tag{16}$$

2). Установим связь между обратным калибровочным преобразованием прямого мультипликативного интеграла и аддитивной вариацией прямого мультипликативного интеграла. Из равенств (5) и (8) получаем уравнение

$$CAC^{-1} + C'C^{-1} = A + C. \tag{17}$$

Можно показать, что уравнение (17) имеет решение вида

$$C = \left(\left(\overset{\frown}{\int} E + Adt\right)\cdot C_0 \cdot \left(\overset{\frown}{\int} E + Adt\right) - Et\right)^{-1}. \tag{18}$$

3). Установим связь между прямым калибровочным преобразованием прямого мультипликативного интеграла и правой мультипликативной вариацией прямого мультипликативного интеграла.

Из равенств (4) и (7) получаем уравнение

$$C^{-1}AC - C^{-1}C' = AC\,. \qquad (19)$$

Умножив обе части уравнения (19) на C^{-1} справа, получаем уравнение

$$-C^{-1}C'C^{-1} = A - C^{-1}A\,. \qquad (20)$$

Введем обозначение $X = C^{-1}$. Тогда уравнение (20) запишется в виде:

$$X' = (E - X)A\,. \qquad (21)$$

Введем обозначение $Y = E - X$. Тогда уравнение (21) запишется в виде:

$$Y' = -YA\,. \qquad (22)$$

Следовательно,

$$C = \left(E - \overset{\cup}{\int} E - Adt \right)^{-1}. \qquad (23)$$

4). Установим связь между обратным калибровочным преобразованием прямого мультипликативного интеграла и левой мультипликативной вариацией прямого мультипликативного интеграла.

Из равенств (5) и (6) получаем уравнение

$$CAC^{-1} + C'C^{-1} = CA\,. \qquad (24)$$

Можно показать, что уравнение (24) имеет решение вида

$$C = \left(E + \overset{\cap}{\int} E + Adt \right)^{-1}. \qquad (25)$$

5). Установим связь между прямым калибровочным преобразованием прямого мультипликативного интеграла и левой мультипликативной вариацией прямого мультипликативного интеграла.

Из равенств (4) и (7) получаем уравнение

$$C^{-1}AC - C^{-1}C' = CA\,. \qquad (26)$$

Заметим, что уравнение (26) невозможно проинтегрировать указанными выше методами (см., например, [6,7]). Поэтому рассмотрим частные случаи, при которых уравнение (26) интегрируется в конечном виде.

А). Предположим, что матрица $C = (c_{ij})$ – диагональная и $A = (a_{ij})$. Тогда уравнение (26) запишется в виде:

$$\frac{dc_{ij}}{dt} = a_{is}c_{sj} - c_{is}c_{sk}a_{kj}\,. \qquad (27)$$

В виду диагональности матрицы C имеем $i = j$. Следовательно, уравнение (27) примет вид:

$$\frac{dc_{ii}}{dt} = a_{ii}c_{ii} - c_{ii}c_{ii}a_{ii}\,,$$

откуда следует что

$$\frac{dc_{ii}}{c_{ii}(1 - c_{ii})} = a_{ii}dt\,. \qquad (28)$$

Интегрируя уравнение (28), получаем

$$c_{ii} = \frac{\exp(\int a_{ii}dt)}{\exp(\int a_{ii}dt) - 1},\; i = 1,2,\ldots,n\,.$$

Следовательно, $C = diag(c_{11}, c_{22}, \ldots, c_{nn})$.

Б). Пусть $n = 2$. Предположим, что матрица $C = (c_{ij})$ – нижняя диагональная, то есть $c_{12} = 0$.

Уравнение (26) запишется в виде:

$$c'_{11} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} - a_{11}c_{11}^2 - a_{11}c_{12}c_{21} - a_{21}c_{11}c_{12} - a_{21}c_{12}c_{22},$$
$$c'_{12} = a_{11}c_{12} + a_{12}c_{22} - a_{12}c_{11}^2 - a_{12}c_{12}c_{21} - a_{22}c_{11}c_{12} - a_{22}c_{12}c_{22},$$
$$c'_{21} = a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} - a_{11}c_{21}c_{11} - a_{11}c_{22}c_{21} - a_{21}c_{22}c_{12} - a_{22}c_{22}^2,$$
$$c'_{22} = a_{21}c_{12} + a_{22}c_{22} - a_{12}c_{21}c_{11} - a_{12}c_{22}c_{21} - a_{22}c_{21}c_{12} - a_{22}c_{22}^2.$$

Так как $c_{12} = 0$, то уравнение (26) запишется в виде системы

$$c'_{11} = a_{11}c_{11} + a_{12}c_{21} - a_{11}c_{11}^2,$$
$$0 = a_{12}c_{22} - a_{12}c_{11}^2,$$
$$c'_{21} = a_{21}c_{11} + a_{22}c_{21} - a_{11}c_{21}c_{11} - a_{11}c_{22}c_{21} - a_{21}c_{21}c_{12} - a_{22}c_{22}^2,$$
$$c'_{22} = a_{22}c_{22} - a_{12}c_{21}c_{11} - a_{12}c_{22}c_{21} - a_{22}c_{22}^2.$$

При $c_{11} = 1$ и $c_{22} = 1$ имеем

$$c'_{21} + (2a_{11} - a_{22})c_{21} = a_{21} - a_{22}. \tag{29}$$

Уравнение (29) имеет решение

$$c_{21} = \exp\left(\int(2a_{11} - a_{22}\right)dt\left(c_0 + \int(a_{21} - a_{22}\right)\exp\left(\int(a_{22} - 2a_{11}\right)dtdt.$$

Таким образом,

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \exp\left(\int(2a_{11} - a_{22}\right)dt\left(c_0 + \int(a_{21} - a_{22}\right)\exp\left(\int(a_{22} - 2a_{11}\right)dtdt & 1 \end{pmatrix}.$$

6). Установим связь между обратным калибровочным преобразованием прямого мультипликативного интеграла и правой мультипликативной вариацией прямого мультипликативного интеграла.

Из равенств (5) и (7) получаем уравнение

$$CAC^{-1} + C'C^{-1} = AC. \tag{30}$$

Заметим, что уравнение (30) также невозможно проинтегрировать указанными выше методами. Поэтому рассмотрим частные случаи, при которых уравнение (30) интегрируется в конечном виде.

А). Предположим, что матрица $C = (c_{ij})$ – диагональная и $A = (a_{ij})$. Тогда уравнение (30) запишется в виде:

$$\frac{dc_{ij}}{dt} = c_{is}c_{sk}a_{kj} - a_{is}c_{sj}. \tag{31}$$

В виду диагональности матрицы C имеем $i = j$. Следовательно, уравнение (31) примет вид:

$$\frac{dc_{ii}}{dt} = c_{ii}c_{ii}a_{ii} - a_{ii}c_{ii},$$

откуда следует что

$$\frac{dc_{ii}}{c_{ii}(c_{ii} - 1)} = a_{ii}dt. \tag{32}$$

Интегрируя уравнение (32), получаем

$$c_{ii} = \frac{1}{1 - \exp(\int a_{ii}dt)}, \ i = 1,2,\dots,n.$$

Следовательно, $C = diag(c_{11}, c_{22}, \dots, c_{nn})$.

Б). Пусть $n = 2$. Предположим, что матрица $C = (c_{ij})$ – нижняя диагональная, то есть $c_{12} = 0$. В этом случае матрица $C = (c_{ij})$ вычисляется аналогично.

6. Криволинейный мультипликативный интеграл

Пусть $P(x,y),Q(x,y)\in Mat(n,R^2)$. Рассмотрим прямой криволинейный мультипликативный интеграл

$$\overset{\cup}{\int_{\gamma}} E+P(x,y)dx+Q(x,y)dy\,, \tag{33}$$

и гладкую кривую $\gamma : x=x(t), y=y(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ пространства переменных x,y. Аналогично рассматривается обратный криволинейный мультипликативный интеграл

$$\overset{\cap}{\int_{\gamma}} E+P(x,y)dx+Q(x,y)dy \tag{34}$$

Преобразования

$$P\to CPC^{-1}\pm C_xC^{-1}\,,\ Q\to CQC^{-1}\pm C_yC^{-1} \tag{35}$$

называют соответственно прямым и обратным калибровочными преобразованиями матричных функций P и Q, где $C=C(x,y)$ – некоторая невырожденная гладкая матричная функция n-го порядка.

Преобразование

$$\overset{\cup}{\int_{\gamma}} E+P(x,y)dx+Q(x,y)dy\to \overset{\cup}{\int_{\gamma}} E+C(x,y)(P(x,y)dx+Q(x,y)dy) \tag{36}$$

будем называть левой мультипликативной вариацией прямого криволинейного мультипликативного интеграла.

Установим связь между калибровочными преобразованиями (35) и преобразованием (36). Переходя к интегральной форме преобразований (35), получим следующую систему уравнений:

$$CPC^{-1}\pm C_xC^{-1}=CP\,,\ CQC^{-1}\pm C_yC^{-1}CQ\,. \tag{37}$$

Приведем систему уравнений (37) к виду:

$$(C^{-1})_x=P(C^{-1}-E), (C^{-1})_y=Q(C^{-1}-E) \text{ или}$$

$$(C^{-1})_x=P(E-C^{-1}), (C^{-1})_y=Q(E-C^{-1}),$$

откуда, с учетом условия интегрируемости $\pm((Q_x-P_y)\pm[Q,P])Z=0$, $Z=E-C^{-1}$, следует, что

$$C=\left(E+\overset{\cup}{\int_{\gamma}} E+P(x,y)dx+Q(x,y)dy\right)^{-1} \text{ или}$$

$$C=\left(\overset{\cup}{\int_{\gamma}} E+P(x,y)dx+Q(x,y)dy-E\right)^{-1}.$$

Аналогично исследуются остальные случаи.

Литература

1. *Мантуров О.В.* Мультипликативный интеграл.//Проблемы геометрии, 1990, т. 22, с. 167-215.
2. *Гантмахер Ф.Р.* Теория матриц. – М.: Наука, 1988. − 552 с.
3. *Паланджянц Л.Ж.* Геометрия мультипликативного интеграла. − Майкоп: МП «Качество», 1997. − 94 с.
4. *Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж.* Развитие теории мультипликативного интегрирования полиномиальных матричных функций. – Майкоп: ИП Магарин О.Г., 2010. – 109 с.

5. *Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж.* Мультипликативный интеграл и представления групп и алгебр Ли. – Майкоп: ИП Магарин О.Г., 2011. – 93 с.
6. *Reid W.T.* Riccati diff. equations. Academic Press, 1972. − 213 c.
7. *Kunde H.*. Riccatische Differentialgleichungen und Algebren. // Dis. Doct. Math. und Inf. Univ. Munchen, 1981. – 90 s..

ABOUT THE GAUGE TRANSFORMATION AND MULTIPLICATIVE INTEGRAL VARIATIONS

L.Zh. Palandzhyants

In this paper we establish the connection between gauge transformations and variations of the multiplicative integral. We consider the ordinary multiplicative and curvilinear integrals of two types and variations of the type of multiplicative and additive. In this case the matrix obtained by the Riccati-type differential equations.

