О ДИССИПАТИВНОСТИ ДВУМЕРНЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПРАВЫМИ ЧАСТЯМИ

М.М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Получены эффективные достаточные условия диссипативности двумерных систем дифференциальных уравнений со случайными правыми частями, детерминированная часть которых аддитивно разделяется по переменным и содержит две нелинейности. Исследование проводится модифицированным методом функций Ляпунова.

1. Введение

Одними из первых работ, где изучался вопрос о диссипативности случайных процессов, определяемых дифференциальными уравнениями с широким применением метода функций Ляпунова, были работы Р.З. Хасьминского [1,2]. Математическое понятие диссипативности детерминированной динамической системы (D-системы) было введено в работе Левинсона [3]. В дальнейшем вопросы диссипативности систем, а также ограниченность по вероятности решений систем дифференциальных уравнений изучались в работах Йошизавы, Ла-Салля и Лефшеца, Демидовича и других авторов, обзоры результатов которых имеются, например, в [4].

В настоящей заметке изучается свойство диссипативности двумерных систем со случайными правыми частями, детерминированная часть которых аддитивно разделяется по фазовым переменным и содержит две нелинейные функции. Нами получены достаточные условия диссипативности рассматриваемых систем. Исследование проводится модифицированным методом функций Ляпунова.

2. Постановка задачи и ее решение

Будем рассматривать нелинейную систему вида

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_{11}(x_1) \\ f_{21}(x_1) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} f_{12}(x_2) \\ f_{22}(x_2) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_{11}(x_1, x_2) \\ \sigma_{21}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \xi_1(t,\omega) + \begin{pmatrix} \sigma_{12}(x_1, x_2) \\ \sigma_{22}(x_1, x_2) \end{pmatrix} \xi_2(t,\omega), \qquad (1)$$

где $f_{ij}(x_j),\ \sigma_{ij}(x_1, x_2)\ \ (i, j = 1,2)$ – заданные функции от своих аргументов, а $\xi_i(t, \omega)\ (i = 1,2)$ – случайный процесс. (Здесь ω – элементарное событие.) Точка над символом обозначает производную.

Рассматривается случай, когда две из функций $f_{ij}(x_j)$ являются нелинейными, а остальные две – линейными.

Будем предполагать, что функции $f_{ij}(x_j),\ \sigma_{ij}(x_1, x_2)\ \ (i, j = 1,2)$ удовлетворяют локальному условию Липшица относительно своих аргументов, причем функция $\sigma_{ij}(x_1, x_2)$ – ограничена, а $\xi_i(t, \omega)\ (i = 1,2)$ – измеримый случайный процесс, локально абсолютно интегрируемый с вероятностью 1.

В детерминированном случае $\sigma_{ij}(x_1, x_2) \equiv 0$ различные свойства решений системы (1) изучались в работах [5-7], [8] и [9-11]. В работах [1,2] и [12,13] получены достаточные условия диссипативности систем, определяемых типичными для нелинейной механики дифференциальными уравнениями второго порядка со случайными правыми частями.

В настоящей заметке нами получены эффективные достаточные условия принадлежности системы (1) к классу диссипативных стохастических систем.

3. Диссипативность

При сделанных предположениях относительно функций $f_{ij}(x_j)$, $\sigma_{ij}(x_1, x_2)$ и случайного процесса $\xi(t, \omega)$ существует и единственно решение системы (1), удовлетворяющее начальным условиям: $x_1(t_0) = x_1^0(\omega)$, $x_2(t_0) = x_2^0(\omega)$, представляющее абсолютно непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс [2]. Здесь $x_1^0(\omega)$ и $x_2^0(\omega)$ – заданные случайные величины.

Определение [2]. *Система* (1) *называется диссипативной, если случайные величины* $\left|x_i(t,\omega;t_0,x_1^0,x_2^0)\right|$ $(i=1, 2)$, $x_1^0 = x_1^0(\omega)$, $x_2^0 = x_2^0(\omega)$ *ограничены по вероятности равномерно относительно* $t \ge t_0$ *и относительно случайных величин* $(x_1^0(\omega), x_2^0(\omega)) \in A_r$, *т. е.*

$$\sup_{t\ge t_0} P\left\{\left\|\left(x_1(t, \omega; x_1^0, x_2^0), x_2(t, \omega; x_1^0, x_2^0)\right)\right\| > R\right\} \to 0$$

при $R \to \infty$, *где* A *– класс случайных величин таких, что*

$$P\left\{\left\| x_1^0(\omega), x_2^0(\omega)\right\| < r\right\} = 1$$

(Здесь $\|\cdot\|$ обозначает норму вектора, а P – вероятность).

В нижеследующей теореме о диссипативности также утверждается неограниченная продолжаемость решений при $t \ge t_0$ [2, с. 28].

Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть в системе* (1)

$$f_{11}(x_1) = f(x_1), \quad f_{12}(x_2) = ax_2, \quad f_{21}(x_1) = bx_1, f_{22}(x_2) = g(x_2).$$

Пусть, далее, функции $\sigma_{ij}(x_1, x_2)$ $(i, j = 1, 2)$ *ограничены, а случайные процессы* $\xi_1(t, \omega)$ *и* $\xi_2(t, \omega)$ *имеют ограниченное математическое ожидание:* $\sup_{t\ge t_0} M\left|x_i(t, \omega)\right| < \infty$ $(i = 1, 2)$.

Предположим, что существуют положительные числа δ_i $(i = \overline{1,6})$ *и число* Δ *такие, что выполнены следующие условия:*

1) $\delta_1 < c_1\, f(x_1)/x_1 - ab < \delta_2$ *для* $|x_1| > X_1^0$,

2) $f(x_1)/x_1 + c_1 < -\delta_3$ *для* $|x_1| > X_1^0$,

3) $\delta_4 < c_2\, g(x_2)/x_2 - ab < \delta_5$ *для* $|x_2| > X_2^0$,

4) $g(x_2)/x_2 + c_2 < -\delta_6$ *для* $|x_2| > X_2^0$,

5) $c_1 f'(x_1) - ab < \Delta$ *для* $|x_1| > X_1^0$,

где константы c_1 *и* c_2 *выбраны так, чтобы* $c_1c_2 = ab$, $ab \ne 0$, *а* X_1^0, X_2^0 *– некоторые положительные числа.*

Тогда система (1) *диссипативна.*

Доказательство. Введем в рассмотрение функцию

$$V(x_1, x_2) = \begin{cases} [W(x_1, x_2)]^\alpha - C & \text{при } [W(x_1, x_2)]^\alpha > C, \\ 0 & \text{при } [W(x_1, x_2)]^\alpha < C, \end{cases} \qquad (2)$$

где

$$W(x_1,\,x_2)=(c_1^2-ab)\,x_1^2+(a^2-\gamma ab)\,x_2^2-2ac_1x_1x_2+$$
$$+2c_1\int_0^{x_1}f(\xi)\,d\xi+2\gamma c_2\int_0^{x_2}g(\eta)\,d\eta, \tag{3}$$

$\gamma=a^2/c_1^2,\ c_1c_2=ab;\ \ \alpha\in(0,1/2]$, C – достаточно большое число, которое будет выбрано позже.

Вычислим производную функции W в силу укороченной системы – детерминированной части $(\sigma_{ij}:=0)$ системы (1). Имеем после некоторых элементарных преобразований:

$$\frac{1}{2}\dot W=\left(f(x_1)/x_1+c_1\right)\left(c_1f(x_1)/x_1-ab\right)x_1^2+\frac{a^2}{c_2^2}\left(g(x_2)/x_2+c_2\right)\left(c_2g(x_2)/x_2-ab\right)x_2^2.$$

Оценим сверху $\dot W/2$ вне прямоугольника $\prod=\left\{(x_1,\,x_2)\big|\ \ |x_1|\le X_1^0,\ \ |x_2|\le X_2^0\right\}$. Для $|x_1|>X_1^0$ и $|x_2|>X_2^0$ в силу условий 1)-5) теоремы 1 получим оценку

$$\dot W/2\le-k_0(x_1^2+x_2^2)\,, \tag{4}$$

где $k_0=\min\left\{\delta_1\delta_3;\ \dfrac{\delta_4\delta_6\,a^2}{c_1^2}\right\}$.

В областях $\mathrm{D}_1=\left\{|x_1|>\widetilde X_1^0;\ |x_2|\le X_2^0\right\}$ и $\mathrm{D}_2=\left\{|x_1|\le X_1^0;\ |x_2|>\widetilde X_2^0\right\}$, где $\widetilde X_1^0\ge X_1^0,\ \ \widetilde X_2^0\ge X_2^0$, с учетом условий теоремы будем иметь соответственно оценки

$$\dot W/2\le-k_1x_1^2,\quad \dot W/2\le-k_2x_2^2. \tag{5}$$

Здесь $k_1>0,\,k_2>0$ – некоторые константы, зависящие от $\delta_1,\delta_3,\delta_4,\delta_6$. Оценим теперь функцию $W(x_1,x_2)$ из (3). При $|x_1|>X_1^0,\ |x_2|>X_2^0$, с учетом условий 1)-3), получаем

$$\beta_1(x_1^2+x_2^2)\le W(x_1,\,x_2)\le\beta_2(x_1^2+x_2^2)\,, \tag{6}$$

где $\beta_1,\ \beta_2>0$ – некоторые числа, зависящие от $\delta_1,\delta_2,\delta_4,\delta_5$.

В областях D_1 и D_2 будем иметь соответственно оценки

$$\beta_3x_1^2\le W(x_1,\,x_2)\le\beta_4x_1^2, \tag{7}$$
$$\beta_5x_2^2\le W(x_1,\,x_2)\le\beta_6x_2^2, \tag{8}$$

где $\beta_i\ \ (i=\overline{3,6})$ – некоторые константы, зависящие от $\delta_1,\delta_2,\delta_4,\delta_5$.

Сопоставляя оценки для $\dot W$ и W в соответствующих областях, из неравенств (4), (5) и (6)-(8) получим, что оценка

$$\dot W\le\varepsilon_0W \tag{9}$$

выполняется вне достаточно большого прямоугольника

$$\widetilde\Pi=\left\{(x_1,x_2)\big|\ |x_1|\le\widetilde X_1^0,\ |x_2|\le\widetilde X_2^0\right\}\supset\Pi$$

при достаточно малом $\varepsilon_0>0$.

Выберем теперь C в (2) таким образом, чтобы $C>\left(\widetilde X_1^{0\,2}+\widetilde X_2^{0\,2}\right)^{1/2}$.

Из неравенств (6)-(8) следует, что для функции $V(x_1,\,x_2)$ из (2) выполняется предельное соотношение: $V(x_1,\,x_2)\to+\infty$ при $|x_1|+|x_2|\to+\infty$.

Нетрудно проверить, что функция $V(x_1, x_2)$ удовлетворяет глобальному условию Липшица во всей плоскости (x_1, x_2) (достаточно проверить, что частные производные $\partial V / \partial x_1$ и $\partial V / \partial x_2$ ограничены во всей плоскости (x_1, x_2)).

Так как $\dot{V} = \alpha W^{\alpha-1} \dot{W}$, то из (9) следует аналогичная оценка $\dot{V} \le -\varepsilon V$, где $\varepsilon = \alpha\varepsilon_0 > 0$.

Таким образом, выполнены все условия общей теоремы 4.1, гл. 1 [2, с.31], в силу которой система (1) диссипативна. Теорема 1 доказана.

Замечание. Достаточные условия, даваемые теоремой 1, являются обобщенными в какой-либо форме условиями Рауса-Гурвица.

Аналогичные теореме 1 утверждения могут быть сформулированы и для других случаев двух нелинейностей $f_{ij}(x_j)$ в детерминированной части системы (1).

Литература

1. *Хасьминский Р.З.* О диссипативности случайных процессов, определяемых дифференциальными уравнениями // Проблемы передачи информации. – 1965. – Т. 1. – № 1. – С. 88-104.
2. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
3. *Levinson N.* Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order // Ann. of Math. – 1944. – V. 45. –№ 4. – P. 723-737.
4. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 318 с.
5. *Еругин Н.П.* О некоторых вопросах теории устойчивости движения и качественной теории дифференциальных уравнений // ПММ. – 1950. – Т.14. – Вып. 5. – С. 650-658.
6. *Еругин Н.П.* Качественное исследование интегральных кривых системы дифференциальных уравнений // ПММ. – 1950. – Т.14. – Вып. 6. – С. 659-664.
7. *Еругин Н.П.* Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования // Прикл. матем. и мех. – 1952. – Т. 16. – Вып. 5. – С. 620-628.
8. *Малкин И.Г.* Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования // Прикл. матем. и мех. – 1952. – Т. 16. – Вып. 3. – С. 365-368.
9. *Красовский Н.Н.* Теоремы об устойчивости движений, определяемых системой двух уравнений // ПММ. – 1952. – Т. 16. – Вып. 5. – С. 547-554.
10. *Красовский Н.Н.* Об устойчивости решений системы двух дифференциальных уравнений // ПММ. – 1953. – Т. 17. – Вып. 6. – С. 651-672.
11. *Красовский Н.Н.* Об одной задаче устойчивости движения в целом // Докл. АН СССР. – 1953. – Т. 88. – № 3. – С. 401-404.
12. *Шумафов М.М.* О диссипативности случайных процессов, определяемых некоторыми нелинейными дифференциальными уравнениями второго порядка // Дифф. ур. – 1993. – Т.29. – №1. – С. 175-176.
13. *Шумафов М.М.* О диссипативности решений стохастических дифференциальных уравнений второго порядка // Вестник Адыг. гос. ун-та. – 2008. –№ 4. – С. 11-17.
14. *Шумафов М.М.* Диссипативность двумерных динамических систем, определяемых стохастическими дифференциальными уравнениями второго порядка с одной нелинейностью // Труды ФОРА. – 2010. –№ 15. – С. 56-60.

ON DISSIPATIVITY OF TWO-DIMENSIONAL SYSYTEMS OF NONLINEAR DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH RANDOM RIGHT-HAND SIDES

M.M. Shumafov

In this paper the property of dissipativity of the two-dimensional stochastic systems of differential equations is studied. Effective sufficient conditions of dissipativity of the systems of nonlinear differential equations with random right-hand sides are obtained. The investigation of the systems are carried out by modificated Lyapunov’s functions method.

