О СТОХАСТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ НЕКОТОРЫХ ДВУМЕРНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ДВУМЯ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ

М.М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Проводится исследование стохастической устойчивости двумерных динамических систем, возмущенных гауссовским белым шумом. Предполагается нелинейный вектор сноса аддитивно разделяющимся по переменным, а интенсивность «шума» зависящим только от одного из двух компонент случайного процесса. Рассматриваются случаи, когда в нелинейном векторе сноса две из четырех функций являются нелинейными, а две – линейными. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости в целом и экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом решений рассматриваемых систем. Исследование проводится модифицированным методом функций Ляпунова.

1. Введение

Настоящая статья является продолжением исследований, проведенных в [1]. В статье [1] рассматривался случай, когда в нелинейном векторе сноса стохастической системы три из четырех функций являлись линейными, а одна функция – нелинейной. В настоящей работе рассматривается случай двух нелинейностей в выражении для нелинейного вектора сноса. Следует отметить, что одним из первых работ по теории устойчивости стохастических систем были работы Бертрама и Сарачика [2], Каца и Красовского [3], Гихмана и Дороговцева [4], Морозана [5], Вонэма [6], Хасьминского [7] и Кушнера [8].

Работы [9] и [10] были посвящены исследованию стохастической устойчивости линейных и нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка с помощью модифицированного метода функций Ляпунова. В работах [11,12] методом функций Ляпунова получены необходимые и достаточные условия стохастической устойчивости линейных двумерных стационарных систем, возмущенных гауссовским белым шумом. В упомянутой выше статье [1] для двумерных стохастических систем с одной нелинейностью получены достаточные условия асимптотической устойчивости по вероятности в целом и экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом.

В настоящей работе для двумерных систем с двумя нелинейностями получены аналогичные условия стохастической устойчивости. Исследование проводится с помощью стохастического аналога метода функций Ляпунова.

Полученные нами достаточные условия устойчивости представляют интерес с прикладной точки зрения. Они, в частности, дают оценку снизу «сектора устойчивости», где расположен график интенсивности белого шума.

2. Постановка задачи

Рассматривается нелинейная система двух стохастических дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} dx_1(t) = [f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2)]dt + \sigma(z)d\xi(t), \\ dx_2(t) = [f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2)]dt, \end{cases} \tag{1}$$

где две из функций $f_{ij}(x_j)$ $(i,\ j = 1,2)$ являются нелинейными, а две остальные – линейными; коэффициент диффузии $\sigma(z)$ является функцией или от x_1, или от x_2. В (1) $\xi(t)$ – винеровский процесс, дифференциалы $dx_1(t),\ dx_2(t),\ d\xi(t)$ понимаются в смысле Ито.

Относительно нелинейных функций $f_{ij}(x_j)$ предполагается, что они всюду непрерывно дифференцируемы по своему аргументу, а функция $\sigma(z)$ удовлетворяет условию Липшица.

Отметим, что детерминированный случай $\sigma(z) \equiv 0$ был рассмотрен Н.П. Еругиным [13] и И.Г. Малкиным [14].

Цель настоящей статьи – распространить на стохастический случай результаты работ [13, 14].

3. Формулировка результатов

Заметим, что при сделанных выше предположениях существует и единственно решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0)=x^0$. (Здесь $x(t)=(x_1(t),\ x_2(t))$, $x^0=(x_1^0,\ x_2^0)$). При этом решение представляет собой непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс. Имеет место следующая

Теорема 1. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1)=f(x_1),\quad f_{12}(x_2)=ax_2,\quad f_{21}(x_1)=bx_1,$$
$$f_{22}(x_2)=g(x_2),\quad \sigma(z)=\sigma(x_1).$$

Предположим, что существуют константы $\delta_i>0\ \ (\overline{1,4})$, $\sigma_0>0$ *и* Δ *такие, что выполнены условия:*

1) $c_1 f(x_1)/x_1-ab>\delta_1 \qquad \forall x_1\neq 0,$

2) $f(x_1)/x_1+c_1<-\delta_2 \qquad \forall x_1\neq 0,$

3) $c_2 g(x_2)/x_2-ab>\delta_3 \qquad \forall x_2\neq 0,$

4) $g(x_2)/x_2+c_2<-\delta_4 \qquad \forall x_2\neq 0,$

5) $c_1 f'(x_1)-ab<\Delta \qquad \forall x_1\in R,$

6) $0<\sigma(x_1)/x_1<\sigma_0 \qquad \forall x_1\neq 0,$

7) $\sigma_0^2<2\delta_1\delta_2/(c_1^2+\Delta),$

где числа c_1 *и* c_2 *выбраны так, чтобы* $c_1c_2=ab,\ \ ab\neq 0$.

Тогда нулевое решение ($x_1(t)\equiv 0,\ x_2(t)\equiv 0$ *) системы (1) асимптотически устойчиво (по вероятности) в целом.*

Если имеют еще неравенства

8) $c_1 f(x_1)/x_1-ab<\delta_5 \qquad \forall x_1\neq 0,$

9) $c_2 g(x_2)/x_2-ab<\delta_6 \qquad \forall x_2\neq 0,$

где $\delta_5>0,\ \delta_6>0$ *– некоторые константы, то ненулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.*

Замечание. В детерминированном линейном случае, когда $\sigma(x_1)\equiv 0,\ f_1(x_1)=f_0x_1,\ g(x_2)=g_0x_2\ \ (f_0,\ g_0\in R)$ условия теоремы 1 эквивалентны необходимым и достаточным условиям Рауса-Гурвица.

Теорема 2. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1)=ax,\quad f_{12}(x_2)=f(x_2),\quad f_{21}(x_1)=g(x_1),$$
$$f_{22}(x_2)=bx_2,\quad \sigma(z)=\sigma(x_1).$$

Пусть $a<0,\ b<0$. *Пусть, далее, существуют числа* $\delta_i>0\ \ (i=1,2)$ *и* $\sigma_0>0$ *такие, что выполнены условия*

1) $g(x_1)/x_1\geq\delta_1 \qquad \forall x_1\neq 0,$

2) $f(x_2)/x_2\leq-\delta_2 \qquad \forall x_2\neq 0,$

3) $0<\sigma(x_1)/x_1<\sigma_0 \qquad \forall x_1\neq 0$,

4) $\sigma_0^2 g'(x_1)+2ag(x_1)/x_1<0 \qquad \forall x_1\neq 0$.

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Теорема 3. *Пусть* $a<0,\ b<0$ *и кроме условий 1)-4) теоремы 2 выполнены еще условия:*

5) $g(x_1)/x_1 \le \delta_3 \qquad \forall x_1 \ne 0,$

6) $f(x_2)/x_2 \ge -\delta_4 \qquad \forall x_2 \ne 0,$

7) $g'(x_1) \le M \quad \forall x \in R,$

8) $\sigma_0^2 < 2(-a)\delta_1 / \mathrm{M},$

где δ_3, δ_4 *и* M *- некоторые положительные числа. Тогда нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.*

Теорема 4. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1) = f(x_1), \quad f_{12}(x_2) = g(x_2), \quad f_{21}(x_1) = ax_1,$$
$$f_{22}(x_2) = bx_2, \quad \sigma(z) = \sigma(x_1).$$

Пусть $a < 0, b > 0$. *Предположим, что существуют константы* $\delta_i > 0 \ (i = \overline{1,3})$, $\sigma_0 > 0$ *такие, что выполнены условия:*

1) $f(x_1)/x_1 + b < -\delta_1 \qquad \forall x_1 \ne 0,$

2) $bf(x_1)/x_1 - ac_1 > 0 \qquad \forall x_1 \ne 0,$

3) $-\delta_3 < ag(x_2)/x_2 - bc_2 < -\delta_2 \qquad \forall x_2 \ne 0,$

4) $0 < \sigma(x_1)/x_1 < \sigma_0 \qquad \forall x_1 \ne 0,$

5) $\delta_1 > \max\{-\dfrac{b+c_2}{2} - \dfrac{[\delta_3 - b(b+c_2)]^2}{8c_2\delta_2}; \ \dfrac{c_2(b+c_2)}{b-c_2}\},$

6) $\sigma_0^2 < 2\delta_1 + b + c_2 + \dfrac{[\delta_3 - b(b+c_2)]^2}{4c_2\delta_2},$

где числа $c_1 > 0$ *и* $c_2 < 0$ *выбраны так, чтобы*

$$ac_1 = bc_2, \quad b\delta_3 + c_2\delta_2 < 0.$$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Замечание. Условия теоремы 4 обеспечивают также экспоненциальную устойчивость в среднем квадратическом нулевого решения системы (1).

Сформулируем теперь одну теорему, относящуюся к случаю, когда $\sigma(z) = \sigma(x_2)$. Справедлива

Теорема 5. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1) = f(x_1), \quad f_{12}(x_2) = ax_2, \quad f_{21}(x_1) = g(x_1),$$
$$f_{22}(x_2) = bx_2, \quad \sigma(z) = \sigma(x_2).$$

Пусть $a < 0, b < 0$. *Пусть, далее, выполнены следующие условия:*

1) $f(x_1)/x_1 < 0 \qquad \forall x_1 \ne 0,$

2) $g(x_1)/x_1 < 0 \qquad \forall x_1 \ne 0,$

3) $bf'(x_1)/x_1 - ag'(x_1) \ge 0 \qquad \forall x_1 \in R,$

4) $0 < \sigma(x_2)/x_2 < \sigma_0 \qquad \forall x_2 \ne 0 \ (\sigma_0 \in R),$

5) *существует число* $m > 0$ *такое, что*

а) $g'(x_1) \ge -b^2/m \quad \forall x_1 \in R,$

б) $\sigma_0^2\{[b^2 + mg'(x_1)] + [bf'(x_1) - ag'(x_1)]\} < 2mab \qquad \forall x_1 \in R.$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Сформулированные выше теоремы доказываются с использованием специально построенных стохастических функций Ляпунова и применением стохастических аналогов теорем Ляпунова об устойчивости [7, 8].

Докажем теорему 1. Остальные теоремы доказываются аналогично.

4. Доказательство теоремы 1

Введем в рассмотрение стохастическую функцию Ляпунова

$$V(x_1,x_2)=(c_1^2-ab)x_1^2+(a^2-\gamma ab)x_2^2+2c_1\int_0^{x_1}f(\xi)\,d\xi+2\gamma c_2\int_0^{x_2}g(\eta)\,d\eta-2ac_1x_1x_2,$$

где $\gamma=a^2/c_1^2$, $c_1c_2=ab$.

Вычислим $LV(x,\ y)$, где L – производящий дифференциальный оператор системы (1):

$$L=[f_{11}(x_1)+f_{12}(x_2)]\frac{\partial}{\partial x_1}+[f_{21}(x_1)+f_{22}(x_2)]\frac{\partial}{\partial x_2}+\frac{1}{2}\sigma(x_1)^2\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}.$$

После некоторых элементарных преобразований получим

$$\begin{aligned}LV=2[&\big(f(x_1)/x_1+c_1\big)\big(c_1f(x_1)/x_1-ab\big)+\frac{1}{2}\frac{\sigma(x_1)^2}{x_1^2}(c_1^2+c_1f'(x_1)-ab)]x_1^2+\\&+[\frac{a^2}{c_2^2}\big(g(x_2)/x_2+c_2\big)\big(c_2g(x_2)/x_2-ab\big)]x_2^2.\end{aligned}\tag{2}$$

Оценим LV сверху. В силу условий 1)-7) теоремы 1 из (2) получаем

$$LV\le-2m(x_1^2+x_2^2)\qquad\forall(x_1,\ x_2)\in R^2,$$

где $m=\min\{\delta_1\delta_2-\frac{\sigma_0^2}{2}(\Delta+c_1^2),\ \frac{\delta_3\delta_4a^2}{c_1^2}\}>0$.

Следовательно, функция LV отрицательно определена. Установим теперь положительную определенность функции $V(x,\ y)$. Для этого представим V в следующем виде

$$V(x,\ y)=(c_1x_1-ax_2)^2+2\int_0^{x_1}[c_1f(\xi)-ab\xi]d\xi+2\gamma\int_0^{x_2}[c_2g(\eta)-ab\eta]d\eta.$$

Отсюда с учетом условий 1) и 3) теоремы 1 имеем следующую оценку

$$\begin{aligned}V(x,\ y)&\ge2\int_0^{x_1}[c_1f(\xi)/\xi-ab]\xi d\xi+2\gamma\int_0^{x_2}[c_2g(\eta)/\eta-ab]\eta d\eta\ge\\&\ge\delta_0x_1^2+\gamma\delta_2x_2^2\ge\alpha(x_1^2+x_2^2),\end{aligned}\tag{3}$$

где $\alpha=\min\{\delta_1,\ \gamma\delta_3\}>0$.

Из оценки (3) следует положительная определенность функции $V(x,\ y)$ и предельное соотношение $\lim\limits_{|x|+|y|\to\infty}V(x,\ y)=+\infty$.

Таким образом, выполнены все условия теоремы 4.4. из [7, с. 215]. Следовательно, нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво по вероятности в целом. Первая часть теоремы 1 доказана.

Вторая часть теоремы 1 следует из оценки

$$V(x,\ y)\le(c_1x_1-ax_2)^2+\delta_5x_1^2+\gamma\delta_6x_2^2\le\beta(x_1^2+x_2^2),$$

где $\beta>0$ – некоторая константа. Следовательно, в силу теоремы 7.1 [7, с. 232] нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом. Теорема 1 доказана.

Литература

1. *Шумафов М.М.* Об устойчивости двумерных стохастических систем дифференциальных уравнений с одной нелинейностью в векторе сноса // Труды ФОРА. – 2010. – № 15. – С. 61-67.

2. *Bertram J.E., Carachik P.E.* Stability of circuits with randomly time-varying parameters // Proc. of the Intern. Sympos. on Circuit and Inform Theory. IRE Transactions, CT-6. Los-Angelos, Calif. – 1959. – P. 809-823.
3. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. матем. и мех. – 1960. – Т. 24. – Вып. 5. – С. 809-823.
4. *Гихман И.И., Дороговцев А.Я.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. – 1965. – Т. 17. – №6. – С. 3-21.
5. *Морозан Т.* Об устойчивости регулируемых систем со случайными параметрами // Rev. Roum. math. pures et appl. –1967. – Vol. 12. – № 4. – P. 545-552.
6. *Wonham W.M.* Lyapunov criteria for weak stability stochastic equation // Journ. Diff. Equat. – 1966. – Vol. 2. – № 2. – P. 195-207.
7. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. – М.: Наука, 1969. – 367 с.
8. *Кушер К. Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. – М.: Мир, 1969. – 199 с.
9. *Kushner H.J.* On the construction of stochastic Liapunov functions // IEEE Trans. Automat. Control. – 1965. – V. 10. – № 4. – P. 477-478.
10. *Шумафов М.М.* О построении функций Ляпунова для некоторых нелинейных стохастических дифференциальных уравнений 2-го порядка и вопросы устойчивости // Дифф. уравн.– 1981. – Т. 17. – № 6. – С. 1143-1145.
11. *Шумафов М.М.* Об устойчивости по вероятности линейных стохастических систем второго порядка // Труды ФОРА. – 2009. – № 14. – С. 61-66.
12. *Шумафов М.М.* Стохастическая устойчивость двумерных линейных стационарных систем // Вестник АГУ. – 2010. – № 1. – С. 9-21.
13. *Малкин И.Г.* Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования // Прикл. матем. и мех. – 1952. – Т. 16. – Вып. 3. – С. 365-358.
14. *Еругин Н.П.* Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования // Прикл. матем. и мех. – 1952. – Т. 16. – Вып. 5. – С. 620-628.

ON THE STOCHASTIC STABILITY OF SOME OF TWO-DIMENSIONAL SYSTEMS OF DIFFERENTIAL EQUATIONS WITH TWO NONLINEARITIES

M.M. Shumafov

In this paper the investigation of stochastic stability of two-dimensional systems of differential equations perturbed by Gaussian white noise is carried out. It is supposed that the nonlinear vector is additively divided on variables and noise intensity depending only from one of two components of random process. The cases, when in the expression of the nonlinear vector two of four functions are linear, and two ones of them are nonlinear are considered. Sufficient conditions of asymptotic stability on probability in the whole and exponential stability on the quadratic average of solutions of the systems are obtained. The investigation of stochastic stability is carry out by modificated Lyapynov's functions method.

