ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФИЛЬТРАЦИОННО-ЕМКОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ ГАЗОНОСНОГО ПЛАСТА ПРИ ПЛОСКОРАДИАЛЬНОЙ ФИЛЬТРАЦИИ ГАЗА В ПОРИСТОЙ СРЕДЕ МЕТОДОМ МОДУЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ

Р. Цей, М.М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Методом модулирующих функций решается задача определения фильтрационных и ёмкостных параметров газоносного пласта при плоскорадиальной неустановившейся фильтрации газа в пористой среде. Определяемыми параметрами являются коэффициенты нелинейного дифференциального уравнения в частных производных, описывающего данный процесс.

1. Введение

Задача определения фильтрационных и ёмкостных параметров нефтегазоносного пласта по натурным наблюдениям – одна из самых актуальных задач нефтегазовой науки. Ниже мы рассмотрим одну из таких задач.

Для решения обратной задачи плоскорадиальной фильтрации газа в пористой среде нами применяется метод модулирующих функций (далее, М-метод). Идея этого метода для решения обратных задач восходит к работам Дж. Лоэба и Г. Кахена [1, 2]. Возможность применения М-метода для решения задач нефтегазовой науки, насколько нам известно, впервые была высказана В.Б. Георгиевским, разработавшим унифицированные алгоритмы для решения обратных задач подземной гидрогазодинамики [3]. Идея М-метода с примерами подробно описана в работе [4].

2. Постановка задачи и ее решение

Рассмотрим следующую обратную задачу плоскорадиальной фильтрации газа. Дано дифференциальное уравнение, описывающее процесс радиальной фильтрации газа в пористой среде [5]:

$$\frac{\partial^2 p^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial p^2}{\partial r} = \frac{\varphi\bar{\mu}}{kp}\frac{\partial p^2}{\partial t}, \quad r \in \boldsymbol{R},\ t \in (0,T), \tag{1}$$

с начально-граничными условиями

$$p^2(r,0) = p_k^2,\ r \in \boldsymbol{R},\ t \in [0,T], \quad p^2(r,t) = const, \tag{2}$$

где $p(r,t)$ – давление на расстоянии r от центра кругового пласта в момент времени t, k – коэффициент проницаемости пласта, φ и $\bar{\mu}$ – коэффициенты пористости пласта и вязкости газа соответственно, принимаемые постоянными величинами.

Требуется найти коэффициенты φ, $\bar{\mu}$, k в уравнении (1) при условии, что функция $p(r,t)$ – известна.

Введем в рассмотрение функцию от давления

$$P(p) = 2\int_0^{p(r)} \frac{k\xi d\xi}{\mu(\xi)z(\xi)}. \tag{3}$$

Тогда из (3) следует, что:

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 2\frac{kp}{\mu(p)z(p)}\frac{\partial p}{\partial r},$$

$$\frac{\partial P}{\partial r} = 2\frac{kp}{\mu(p)z(p)}\frac{\partial p}{\partial t}.$$

Сделаем замену в уравнении (1):

$$l = \frac{\varphi\overline{\mu}}{k}, \qquad Q = P^2, \tag{4}$$

где l – обобщенный фильтрационно-ёмкостный параметр кругового пласта. Тогда уравнение (1) с учетом (3) и (4) можно переписать так:

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial Q}{\partial r} = l\frac{1}{P}\frac{\partial Q}{\partial t}. \tag{5}$$

Умножим уравнение (5) на $rP,\ r \neq 0,\ P \neq 0$. Получим:

$$rP\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} + P\frac{\partial Q}{\partial r} = lr\frac{\partial Q}{\partial t}, \qquad r \neq 0,\ P \neq 0. \tag{5}$$

Умножим получившееся уравнение на гладкие модулирующие функции $f_1(r)$, $f_2(t)$, удовлетворяющие условиям $f_1(r_1) = f_1(r_2) = 0$, $f_1'(r_1) = f_1'(r_2) = 0$, $f_2(t_1) = f_2(t_2) = 0$, и проинтегрируем полученное соотношение по отрезкам $[r_1, r_2]$, $[t_1, t_2]$:

$$\int_{r_1}^{r_2}\int_{t_1}^{t_2} rP\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} f_1(r) f_2(t)dtdr + \int_{r_1}^{r_2}\int_{t_1}^{t_2} P\frac{\partial Q}{\partial r} f_1(r) f_2(t)dtdr = \int_{r_1}^{r_2}\int_{t_1}^{t_2} lr\frac{\partial Q}{\partial t} f_1(r) f_2(t)dtdr. \tag{6}$$

Далее, имеем

$$\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\left(\int_{r_1}^{r_2} rP\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} f_1(r)dr\right)dt + \int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\left(\int_{r_1}^{r_2} P\frac{\partial Q}{\partial r} f_1(r)dr\right)dt = l\int_{r_1}^{r_2} rf_1(r)\left(\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial Q}{\partial t} f_2(t)dt\right)dr. \tag{7}$$

В уравнении (7) применим формулу интегрирования по частям к интегралу $\int_{r_1}^{r_2} rP\frac{\partial^2 Q}{\partial r^2} f_1(r)dr$ дважды, а к интегралам $\int_{r_1}^{r_2} P\frac{\partial Q}{\partial r} f_1(r)dr$ и $\int_{t_1}^{t_2}\frac{\partial Q}{\partial t} f_2(t)dt$ – один раз. Получим:

$$\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\left(\int_{r_1}^{r_2} rPQf_1''(r)dr\right)dt - \int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\left(\int_{r_1}^{r_2} PQf_1'(r)dr\right)dt = -l\int_{r_1}^{r_2} rf_1(r)\left(\int_{t_1}^{t_2} Qf_2'(t)dt\right)dr. \tag{8}$$

Уравнение (8) есть интегральный аналог уравнения (5).

Теперь из уравнения (8) найдем искомый коэффициент l:

$$l = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\left(\int_{r_1}^{r_2} PQf_1'(r)dr\right)dt - \int_{t_1}^{t_2} f_2(t)\left(\int_{r_1}^{r_2} rPQf_1''(r)dr\right)dt}{\int_{r_1}^{r_2} rf_1(r)\left(\int_{t_1}^{t_2} Qf_2'(t)dt\right)dr} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)dt\left[\int_{r_1}^{r_2} P^3 f_1'(r)dr - \int_{r_1}^{r_2} rP^3 f_1''(r)dr\right]}{\int_{t_1}^{t_2} P^2 f_2'(t)dt\int_{r_1}^{r_2} rf_1(r)dr} =$$

$$= \frac{\int_{t_1}^{t_2} f_2(t)dt\left[\int_{r_1}^{r_2} P^3\left(f_1'(r) - rf_1''(r)\right)dr\right]}{\int_{t_1}^{t_2} P^2 f_2'(t)dt\int_{r_1}^{r_2} rf_1(r)dr}.$$

Модулирующие функции $f_1(r)$, $f_2(t)$ можно выбрать, например, следующим образом:

$$f_1(r) = (r - r_1)^2 (r_2 - r)^2, \quad r \in [r_1, r_2],$$
$$f_2(t) = (t - t_1)(t_2 - t), \quad t \in [t_1, t_2].$$

3. Заключение

В заметке решена одна типичная обратная задача теории фильтрации, а именно задача определения фильтрационно-емкостных параметров газоносного пласта. Эти параметры являются коэффициентами дифференциального уравнения, описывающего процесс плоскорадиальной фильтрации газа в пористой среде. Для решения рассматриваемой задачи нами использован метод модулирующих функций.

На основе решения обратной задачи составлен алгоритм численного решения задачи и составлена компьютерная программа.

Литература

1. *Loeb J., Cahen G.* Extraction, a partik des enregistrements de mesures, des parametres dynamiques d um system. // Automatisme. – 1963. – № 12. – P. 17-28.

2. *Loeb J., Cahen G.* More about process identification. // Trans. on Automatic Control. – 1965. – PP. 359-361.

3. *Георгиевский В.Б.* Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1971. – 328 с.

4. *Шумафов М.М., Цей Р.* Метод модулирующих функций и его применение при решении обратных задач // Вестник Адыгейского гос. ун-та. Серия «Естественно-математические и технические науки». – Майкоп: изд-во АГУ. – 2008. – Вып. № 9 (37). – С. 9-22.

5. *Васильев Ю.Н., Дубина Н.И.* Математические основы обработки результатов газодинамических исследований скважин. – М.: Недра, 2008. – 115 с.

DETERMINATION OF FILTRATION AND CAPACITIVE PARAMETRS FOR TWO-DIMENSIONAL RADIAL GAS FILTRATION IN POROUS MEDIUM BY MODULATING FUNCTIONS

R. Tsej, M.M. Shumafov

The filtration and capacitive parameters for the non-stationary two-dimensional radial gas filtration in porous medium are determined. These parameters are coefficients of the nonlinear differential equation with partial derivatives. In solving this problem the modulating functions method is used.

