ЧИСЛО ОБУСЛОВЛЕННОСТИ МАТРИЦЫ КАК ПОКАЗАТЕЛЬ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ПРИКЛАДНЫХ ЗАДАЧ

Р. Цей, М.М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Число обусловленности матрицы играет важную роль при численном решении различных прикладных задач, являясь показателем устойчивости решения задачи. В заметке на нескольких примерах иллюстрируется смысл числа обусловленности матрицы и показана важность этого понятия при решении задач.

1. Введение

При численном решении различных прикладных задач исследователи часто сталкиваются с таким понятием как число обусловленности. Это понятие описывается в учебниках по матричной алгебре. Число обусловленности является важнейшим «индикатором» для определения устойчивости решения той или иной задачи. Известные американские математики Форсайт и Молер по поводу числа обусловленности пишут следующее: «Широко распространено заблуждение, что малость $\det(A)$ влечет за собой плохую обусловленность матрицы A» [1, С. 35]. Далее, «… значение $cond(A)$ является гораздо более важным критерием трудности решения линейной системы $Ax = b$, чем малость $\det(A)$, либо громадность порядка n» [1, С. 37].

Цель настоящей заметки – еще раз подчеркнуть важность числа обусловленности при численном решении систем алгебраических уравнений, к которым, как правило, сводятся задачи прикладного характера.

Обусловленность оценивает близость матрицы коэффициентов A к вырожденной. Число обусловленности $cond(A)$ является количественной оценкой обусловленности. Отметим, что всегда $cond(A) \geq 1$. Если $cond(A) \geq 10^3$, то говорят, что матрица A плохо обусловлена. Если $1 \leq cond(A) \leq 100$, то матрица считается хорошо обусловленной.

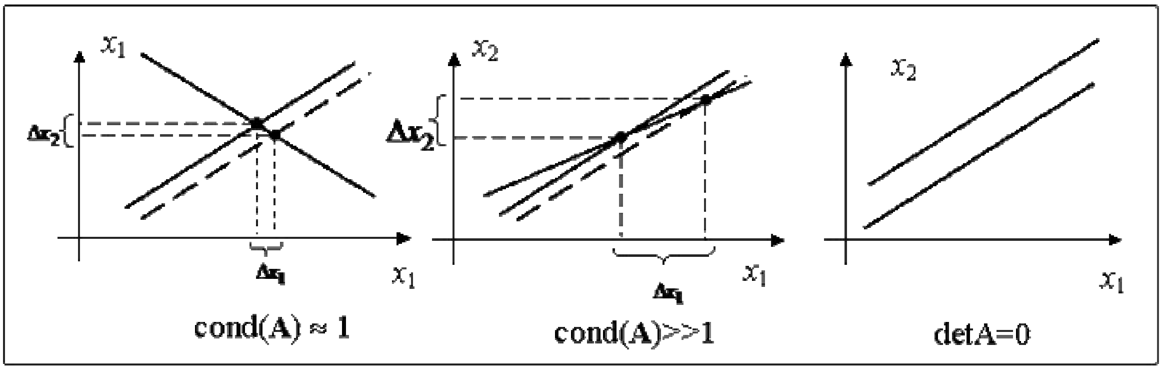
Причина появления больших погрешностей при решении плохо обусловленных систем хорошо иллюстрируется на примере следующей системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ) с двумя неизвестными [2]:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = b_1, \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 = b_2 . \end{cases}$$

На рис. 1 случай (*а*) соответствует случаю хорошо обусловленной системы уравнений. Случай (*в*) -- это случай системы с вырожденной матрицей A ($\det(A) = 0$); здесь прямые, отвечающие каждому из уравнений, параллельны друг другу (уравнения линейно зависимы). Примером плохо обусловленной системы уравнений является случай (*б*) – прямые, соответствующие двум уравнениям, почти параллельны.

Штриховые прямые (*а*) и (*б*) на рис. 1 отвечают одному из уравнений, в котором немного изменены коэффициенты a_{ij} или правая часть b_j. Как видно, в случае хорошо обусловленной СЛАУ малые возмущения в величинах a_{ij} и b_i приводят к небольшим изменениям решения (точка пересечения прямых смещается незначительно). В случае плохо обусловленной системы уравнений малые изменения в коэффициентах ведут к большим изменениям в решении (точка пересечения прямых смещается сильно).

Ниже на конкретных примерах проиллюстрируем важность числа обусловленности [3].



а) *б*) *в*)

Рис. 1. Иллюстрация СЛАУ с двумя неизвестными:
а – хорошо обусловленная; *б* – плохо обусловленная; *в* – вырожденная система уравнений.

2. Число обусловленности матрицы и устойчивость решения системы уравнений

Система уравнений считается *хорошо обусловленной*, если малые изменения в коэффициентах матрицы или в правой части вызывают малые изменения в решении.

Система уравнений считается *плохо обусловленной*, если малые изменения в коэффициентах матрицы или в правой части вызывают большие изменения в решении.

Рассмотрим несколько примеров [2].

Пример 1. Дана следующая СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3{,}999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7{,}999 \end{bmatrix}. \tag{1}$$

Решением уравнения (1) является следующее:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Теперь внесем небольшие изменения в правую часть системы (1):

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3{,}999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4.001 \\ 7{,}998 \end{bmatrix}. \tag{2}$$

Решением системы (2) является

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3{,}999 \\ 4{,}000 \end{bmatrix}.$$

Если теперь внесем малые изменения в коэффициентах системы (1)

$$\begin{bmatrix} 1{,}001 & 2{,}001 \\ 2{,}001 & 3{,}998 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7{,}999 \end{bmatrix}, \tag{3}$$

то получим следующее решение:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3{,}994 \\ 0{,}001388 \end{bmatrix}.$$

Очевидно, система (1) является «плохо обусловленной», так как малые изменения, внесенные в коэффициентах матрицы или в правую часть, повлекли за собой большие изменения в решении системы.

Пример 2. Дана система уравнений:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}. \tag{4}$$

Решением уравнения (1) является следующее:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

После внесения малых изменений в правую часть системы (1)

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4{,}001 \\ 7{,}001 \end{bmatrix}, \tag{5}$$

получим решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1{,}999 \\ 1{,}001 \end{bmatrix}.$$

Если внесем малые изменения в коэффициентах матрицы

$$\begin{bmatrix} 1{,}001 & 2{,}001 \\ 2{,}001 & 3{,}001 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix}, \tag{6}$$

то получим решение

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2{,}003 \\ 0{,}997 \end{bmatrix}.$$

Как видно, система (4) является «хорошо обусловленной», так как малые изменения, внесенные в коэффициентах матрицы или в правую часть, повлекли за собой малые изменения в решении системы.

Эти простые примеры показывают, насколько небольшие изменения коэффициентов матрицы или правой части (вызванные различными источниками погрешности: ошибки округления, погрешности различных численных методов и т.д.) могут существенно изменить решение. И, действительно, с этой проблемой исследователи часто сталкиваются при численном решении различных прикладных задач.

Теперь рассмотрим, как можно вычислить число обусловленности матрицы. Следует отметить, что число обусловленности матрицы напрямую связано с понятием *норма матрицы*. Как и определитель квадратной матрицы, норма матрицы – это число (скаляр). Норма матрицы (квадратной, прямоугольной, обратимой или необратимой) всегда является положительным числом.

Различают несколько норм матрицы, например:

1. ∞–норма матрицы – это максимальная сумма модулей элементов каждой из строк матрицы:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

2. 1-норма – это максимальная сумма модулей элементов каждого из столбцов матрицы:

$$\|A\|_1 = \max_{1 \le j \le n} \sum_{i=1}^{m} |a_{ij}|.$$

3. 2-норма (евклидова норма) – длина вектора в n-мерном пространстве (корень суммы квадратов всех элементов матрицы):

$$\|A\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij})^2}$$

Пример 3. Вычислим ∞–норму матрицы A:

$$A = \begin{bmatrix} 10 & -7 & 0 \\ -3 & 2{,}009 & 6 \\ 5 & -1 & 5 \end{bmatrix}.$$

∞–норма матрицы A равна:

$$\|A\|_\infty = \max_{1 \le i \le 3} \sum_{j=1}^{3} |a_{ij}| = \max\left[(|10| + |-7| + |0|), (|-3| + |2{,}099| + |6|), (|5| + |-1| + |5|) \right] =$$

$$= \max\left[(17), (11{,}099), (11) \right] = 17.$$

Теперь определим зависимость числа обусловленности от нормы матрицы. Вернемся к рассмотрению плохо-обусловленной системы (1). Запишем систему (1) в новых обозначениях:

$$[A][X]=[C].$$

Найдем ∞–нормы векторов *X* и *C*: $\|X\|_\infty = 2$, $\|C\|_\infty = 7{,}999$.

Выше после внесения малых изменений в правую часть системы (1) мы получили систему (2). Обозначим систему (2) так:

$$[A][X']=[C'].$$

Изменение правой части равно:

$$[\Delta C]=[C']-[C]=\begin{bmatrix}4{,}001\\7{,}998\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\7{,}999\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}001\\-0{,}001\end{bmatrix},$$

а изменение решения равно:

$$[\Delta X]=[X']-[X]=\begin{bmatrix}-3{,}999\\4\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-5{,}999\\3\end{bmatrix}.$$

Найдем ∞–нормы векторов ΔX и ΔC: $\|\Delta C\|_\infty = 0{,}001$, $\|X\|_\infty = 5{,}999$.

Отношение ∞–норм векторов ΔX, ΔC соответственно к *X*, *C* равно:

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty}=\frac{5{,}999}{2}=2{,}9995,$$

$$\frac{\|\Delta C\|_\infty}{\|C\|_\infty}=\frac{0{,}001}{7{,}999}=1{,}250\times10^{-4}.$$

Как видно, малое изменение в правой части $1{,}250\times10^{-4}$ вызвало большое изменение в решении: 2,9995. Отношение изменения решения к изменению правой части равно:

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty/\|X\|_\infty}{\|\Delta C\|_\infty/\|C\|_\infty}=\frac{2{,}9995}{1{,}250\times10^{-4}}=23993.$$

Вернемся теперь к хорошо обусловленной системе (4). Найдем ∞–нормы векторов *X* и *C*:

$$\|X\|_\infty = 2,\ \|C\|_\infty = 7.$$

После внесения малых изменений в правую часть системы (4) мы получили систему (5).

Найдем изменение правой части:

$$[\Delta C]=[C']-[C]=\begin{bmatrix}4{,}001\\7{,}001\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}4\\7\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0{,}001\\0{,}001\end{bmatrix},$$

и изменение решения:

$$[\Delta X]=[X']-[X]=\begin{bmatrix}1{,}999\\1{,}001\end{bmatrix}-\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-0{,}001\\0{,}001\end{bmatrix}$$

Найдем ∞–нормы векторов ΔX и ΔC: $\|\Delta C\|_\infty = 0{,}001$, $\|X\|_\infty = 0{,}001$.

Отношение ∞–норм векторов ΔX, ΔC соответственно к *X*, *C* равно:

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty}{\|X\|_\infty}=\frac{0{,}001}{2}=5\times10^{-4},$$

$$\frac{\|\Delta C\|_\infty}{\|C\|_\infty}=\frac{0{,}001}{7}=1{,}429\times10^{-4}.$$

Как видно, малое изменение в правой части $1{,}429\times10^{-4}$ вызвало небольшое изменение в решении: 5×10^{-4}. Отношение изменения решения к изменению правой части равно:

$$\frac{\|\Delta X\|_\infty / \|X\|_\infty}{\|\Delta C\|_\infty / \|C\|_\infty} = \frac{5\times 10^{-4}}{1{,}429\times 10^{-4}} = 3{,}5\,.$$

Приведем свойства норм:

1) $\|A\| \geq 0$, где $[A]$ – матрица,

2) $\|kA\| = |k|\|A\|$, где $[A]$ – матрица, k – скаляр,

3) $\|A+B\| \leq \|A\| + \|B\|$, где $[A]$ и $[B]$ – матрицы одинакового порядка,

4) $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$, где $[A]$ и $[B]$ – матрицы, которые можно умножить друг на друга.

Очевидно, между $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$ и $\frac{\|\Delta C\|}{\|C\|}$, а также между $\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|}$ и $\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}$ имеется некоторая связь. Эта связь выражается в следующих неравенствах:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X+\Delta X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta C\|}{\|C\|}, \tag{7}$$

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X\|} \leq \|A\|\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|} \tag{8}$$

Из неравенств (7), (8) следует, что отношение изменений нормы вектора правой части или нормы матрицы коэффициентов может увеличиваться почти в $\|A\|\|A^{-1}\|$-раз. Число $\|A\|\|A^{-1}\|$ и называется **числом обусловленности матрицы.** Используя число обусловленности вместе с машинным эпсилон, мы можем определить точность решения уравнения (1).

Докажем, что для уравнения $[A][X]=[C]$ верно следующее:

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X+\Delta X\|} \leq \|A\|\,\|A^{-1}\|\frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}.$$

Пусть дано уравнение

$$[A][X]=[C] \tag{9}$$

Обозначим через $[A']$ матрицу $[A]$ с измененными коэффициентами. Изменение коэффициентов матрицы $[A]$ повлечет за собой изменения в векторе решения $[X]$. Обозначим измененный вектор решения через $[X']$. Получим:

$$[A'][X']=[C]. \tag{10}$$

Из уравнений (8) и (9) следует, что

$$[A][X]=[A'][X'].$$

Обозначим изменения в матрице $[A]$ и векторе $[X]$ через $[\Delta A]$ и $[\Delta X]$ соответственно:

$$[\Delta A]=[A']-[A]$$
$$[\Delta X]=[X']-[X].$$

Имеем

$$[A][X]=([A]+[\Delta A])([X]+[\Delta X]).$$

Если раскрыть скобки, получим:

$$[A][X]=[A][X]+[A][\Delta X]+[\Delta A][X]+[\Delta A][\Delta X]$$
$$[0]=[A][\Delta X]+[\Delta A]([X]+[\Delta X])$$
$$-[A][\Delta X]=[\Delta A]([X]+[\Delta X])$$
$$[\Delta X]=-[A]^{-1}[\Delta A]([X]+[\Delta X])$$

Применим свойство 4) нормы матриц, которая гласит, что норма произведения матриц меньше произведения норм каждой матрицы:

$$\|\Delta X\| \leq \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|X + \Delta X\|.$$

Далее, умножим обе части на $\|A\|$. Получим:

$$\|A\| \|\Delta X\| \leq \|A\| \|A^{-1}\| \|\Delta A\| \|X + \Delta X\|, \tag{11}$$

$$\frac{\|\Delta X\|}{\|X + \Delta X\|} \leq \|A\| \|A^{-1}\| \frac{\|\Delta A\|}{\|A\|}. \tag{12}$$

Из приведенных неравенств (7), (8), (11), (12) видно, что чем больше число обусловленности, тем сильнее сказывается на решении линейной системы ошибка в исходных данных. Грубо говоря, если $cond(A) \approx 10^p$ и исходные данные имеют погрешность в l-ом знаке после запятой, то независимо от способа решения системы в результате можно гарантировать не более $(l - p)$ знаков после запятой.

Как отмечалось выше, если число $cond(A)$ велико, то система считается плохо обусловленной. Оценка снизу для числа обусловленности дает 1, т.е. $cond(A)$ не может быть меньше 1. Для конкретной ЭВМ можно указать также верхнюю границу, превышение которой может привести к заведомо ложным решениям: решение считается ненадежным, если $cond(A) \geq (u)^{-1}$ или даже $cond(A) \geq (u)^{-0,5}$, где u – единичная ошибка округления (машинная точность). При этом важно отметить, что масштабирование матрицы А путем умножения на скаляр а не меняет ее число обусловленности.

Пример 4. Найдем число верных цифр в решении следующей СЛАУ:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3,999 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

Найдем число обусловленности для матрицы A: $[A] = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3,999 \end{bmatrix}$.

Сначала найдем обратную матрицу и норму матрицы A и ее обратной матрицы:

$$[A]^{-1} = \begin{bmatrix} -3999 & 2000 \\ 2000 & -1000 \end{bmatrix},$$

$$\|A\|_\infty = 5,999,$$

$$\|A^{-1}\|_\infty = 5999,$$

Число обусловленности равно

$$Cond(A) = \|A\|_\infty \|A^{-1}\|_\infty =$$

$$= 5,999 \times 5999,4 = 35990.$$

Если учесть, что при представлении вещественных чисел на ЭВМ используются 24 значащие цифры, то машинная погрешность равна:

$$u = 2^{-23} = 0,119209 \times 10^{-6},$$

$$Cond(A) \times u = 35990 \times 0,119209 \times 10^{-6} = 0,4290 \times 10^{-2}.$$

Сравним полученный результат со значением $0,5 \times 10^{-m}$

$$0,5 \times 10^{-m} < 0,4290 \times 10^{-2}$$

$$m \leq 2.$$

Таким образом, в векторе решения будем иметь не более двух верных цифр после запятой.

3. Заключение

На нескольких примерах проиллюстрирован смысл числа обусловленности матрицы и важность этого понятия при решения различных прикладных задач. Отмечено, что число обусловленности является более важным критерием плохой обусловленности СЛАУ, чем малость определителя матрицы или ее большой порядок.

Литература

1. *Форсайт Дж., Молер К.* Численное решение систем линейных алгебраических уравнений (пер. с англ.). – М: Мир, 1969. – 168 с.
2. *Орлов О.В.* Лабораторные работы по курсу «Численные методы» (http://orloff.am.tpu.ru/).
3. Holistic Numerical Methods. Adequacy of solutions: General Engineering (http://numericalmethods.eng.usf.edu).

MATRIX CONDITION NUMBER AND AS A STABILITY CHARATERISTICS IN SOLVING OF APPLIED PROBLEMS

R. Tsej, M.M. Shumafov

The matrix condition number plays an important role in the numerical solution of various applied problems, as a characteristics of stability of solution. In this note on several examples the meaning of the matrix condition number is illustrated and showed the importance of this concept in solving of applied problems.

