2011 г № 16
Труды ФОРА

О МАТЕМАТИЧЕСКИХ ОСНОВАХ КВАЗИЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

А.И. Куев, Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический университет, г. Майкоп

Рассматриваются математические основы квазилинейного программирования в случае, когда функция релаксации является дробно-линейной. Изучены некоторые свойства функции релаксации и осуществлена ее корректировка. Показано, что корректировку функции релаксации можно осуществить методами матричного исчисления. Оказалось, что в квазилинейном программировании с дробно-линейной функцией релаксации параметры расположены на поверхности второго порядка, представляющей себе гиперболический параболоид. Установлены виды связей между параметрами дробно-линейной функции и корректирующими параметрами функции релаксации. Предложенная модель квазилинейного программирования может быть использована для математического анализа экономических моделей. В частности, авторы рассматривают экономико-математический смысл корректирующих параметров в функции релаксации.

Постановка задачи

Рассмотрим обобщенную задачу квазилинейного программирования, сформулированную в работе [1-3]:

$$\begin{aligned} &Ax \geq b_0 - \beta(y), \\ &A'y \leq c_0 + \gamma(x), \\ &F = (c_0 + \gamma(x))'x - y'(b_0 - \beta(y)) \to \min, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x \in R^n, y \in R^m, c \in R^n, b \in R^m, A \in R^{nm}$;

x – вектор интенсивности применения некоторых способов деятельности (технологий, производств и программ);

$c = c_0 + \gamma(x)$ – вектор нормативных затрат в расчете на единичную интенсивность;

c_0 – вектор достижимых затрат;

$\gamma(x)$ – векторная функция векторного аргумента, характеризующая повышенные затраты; функция релаксации нормативных затрат;

y – вектор оценок учитываемых факторов;

$b = b_0 - \beta(y)$ – вектор требований на производство учитываемых факторов;

b_0 – вектор абсолютных (возможно не достижимых) требований;

$b_0 - \beta(y)$ – вектор заниженных требований;

$\beta(y)$ – векторная функция векторного аргумента, характеризующая занижение («размягчение») требований; функция релаксации задания требований;

A – матрица условий; A' – транспонированная матрица.

В работах [4,5] была предпринята попытка описания геометрического подхода к модели квазилинейного программирования, поскольку была обнаружена связь между группой дробно-линейных преобразований, функцией релаксации и геометрическим представлением параметров, входящих в эту функцию. Оказалось, что корректирующие параметры, входящие в функцию релаксации, находятся на поверхности второго порядка в пространстве корректирующих параметров. С точки зрения экономики это означает, что производство и управление находятся в дополняющих друг друга пространствах и границей их взаимного соприкосновения и разделения является функция релаксации, на которой стыкуются производственные переменные и корректирующие параметры.

В алгоритме квазилинейного программирования важную роль играет корректировка функции релаксации:

$$\beta(y) = \lambda + \frac{k}{y+\delta}, \tag{2}$$

где y – двойственные оценки, λ, k, δ – параметры: $0 \le \lambda \le \beta_{\max}$; $\beta_{\max} = \max \beta(y)$ при $0 \le y < +\infty$.

Отметим некоторые свойства функции релаксации. Рассмотрим дробно-линейную функцию

$$y = \frac{ax+b}{cx+d}, \tag{3}$$

где $ad - bc \ne 0, c \ne 0$.

Запишем равенство (3) в виде (2).

$$y = \frac{a}{c} + \frac{\frac{bc-ad}{c^2}}{x + \frac{d}{c}}.$$

Введем обозначения

$$\lambda = \frac{a}{c}, \delta = \frac{d}{c}, k = \frac{bc-ad}{c^2}. \tag{4}$$

Исключая параметры a и d из системы (4), получаем соотношение между параметрами λ, k, δ:

$$k + \lambda\delta = b/c. \tag{5}$$

Таким образом, можно сформулировать следующее свойство функции релаксации. В квазилинейном программировании с дробно-линейной функцией релаксации параметры λ, k, δ расположены на поверхности второго порядка, представляющей себе гиперболический параболоид.

Из этого свойство вытекает, что точка с координатами (λ, k, δ) лежит на поверхности, имеющей два семейства прямолинейных образующих. Это обстоятельство указывает на то, что параметры λ, k, δ связаны между собой линейными соотношениями.

В последнее время наблюдается повышенный интерес к квазилинейному программированию, как со стороны математического анализа экономических моделей [6], так и при разработке учебных пособий и спецкурсов по линейному программированию [7].

Функции $\gamma(x)$ и $\beta(y)$, оставаясь векторными функциями векторного аргумента, тем не менее, рассматривались в модели как функции от одной компоненты векторов x и y. Это означало, что в модели квазилинейного программирования учитывалось влияние двойственных оценок только для одного из видов продукции, или, по-крайней мере, продукции, производство которой было аналогично производству исходной. Обстоятельство того, что в каждую компоненту векторной функции релаксации можно задействовать значения всех компонент вектора двойственных оценок, первоначально не было исключено из рассматриваемой модели. Однако для практических расчетов достаточно было рассмотреть двойственные оценки по одной из ограничений, что неоднократно воспроизводилось в алгоритме квазилинейного программирования. При этом рассмотренная ранее модель квазилинейного программирования была частным случаем по отношению к модели, в которой учитываются воздействия всех двойственных оценок, а относительно введенных матриц прежняя корректировка представляла собой диагональный случай.

Возможен вариант, когда в качестве векторной функции $\beta(y)$ предлагается выбрать функцию

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m),$$

где компоненты вектора $\beta(y)$ задаются следующим образом:

$$\beta_j = \sum_{i=1}^{n} \left(\lambda_{ij} + \frac{k_{ij}}{y_j + \delta_{ij}} \right), \quad j = 1,2,...,m. \tag{6}$$

Матрица $\Lambda = (\lambda_{ij})$ – представляет собой матрицу, составленную покомпонентно из всевозможных предельных ограничений по ресурсам.

В одномерном случае предельное ограничение ресурса есть коэффициент λ в функции релаксации $\beta(y) = \lambda + \frac{k}{y+\delta}$.

Надо сказать, что функция релаксации, имеющая вид (2), более приемлема для многомерного случая. Это *обстоятельство* исходит из того, что когда корректируется одно ограничение задачи линейного программирования заранее известно направление корректировки, если предусмотрен анализ в общей схеме вычисления равновесного решения. Для многомерного случая результаты анализа решения задачи линейного программирования теряют определенный смысл.

Первоначальные значения оценок ограничений не столь важны для разработки даже конкретной функции релаксации. Однако, необходимо отметить, что и в одномерном случае оценки не дают значительной информации, кроме направления корректировки для разработки конкретной функции релаксации. К такому утверждению мы пришли в результате многомерных расчетов по решению обобщенной задачи квазилинейного программирования. На практике возникает достаточно много задач, где изменение оценок является значительным в результате небольшой корректировки компоненты вектора-столбца ограничений. Поэтому закономерность выбора функции (2) является достаточно обоснованным.

Если в общей схеме решения задач квазилинейного программирования предусмотрен предварительный анализ решения задачи линейного программирования можно эффективно использовать функции релаксации, принимающие положительное или отрицательное значения.

Матрица $K = (k_{ij})$ – матрица, составленная из коэффициентов k_{ij}, смысл которых будет объяснен ниже.

Матрица $\Delta = (\delta_{ij})$ – матрица сдвигов двойственных оценок y_i при корректировке функции релаксации.

Следовательно, функция релаксации (2) запишется как векторная функция от векторного аргумента $y = (y_1, y_2, ..., y_m)$ и матричных аргументов Λ, K, Δ:

$$\beta = \beta(y, \Lambda, K, \Delta). \tag{7}$$

Естественно назвать матрицы Λ, K, Δ корректирующими или управляющими, а элементы этих матриц – корректирующими или управляющими параметрами.

При таком введении функции релаксации, очевидно, что в каждую компоненту векторной функции входят двойственные оценки по всем ограничениям. Однако стремление к максимальной общности не является самоцелью. В.А. Булавский, определяя функцию релаксации, с самого начала предполагает зависимость от всех переменных, так что максимальная общность по переменным была обеспечена. Вопрос о том, что кроме производственных переменных в функцию релаксации могут войти и корректирующие параметры, в явном виде был реализован в работах [1,3].

Кроме того, нужно иметь в виду тот факт, что левые части в задаче квазилинейного программирования подвергаются алгебраическим преобразованиям, в то время как правые части корректируются как функции. Достаточно сказать, что в алгоритме квазилинейного программирования одновременно используются симплекс-метод и обобщенный метод итерации (последовательных приближений). Для того, чтобы согласовать эти два подхода к преобразованию переменных, необходимо было и в правую часть задействовать некоторые матрицы, состоящие как из x и y, так и корректирующих параметров (λ, k, δ). Удачный подбор функции релаксации позволяет разрешить и этот вопрос.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Покажем, что рассмотренная ранее модель квазилинейного программирования, является диагональным случаем для корректирующих матриц.*

В самом деле, в одномерном случае имеем

$$\beta(y) = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m),$$

$$\beta_j = \lambda_j + \frac{k_j}{y_j + \delta_j}, \quad j = 1,2,...,m. \tag{5}$$

Параметры функции релаксации запишутся в виде диагональных матриц.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \Delta = \begin{pmatrix} \delta_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \delta_2 & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \delta_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом, показано, что рассмотренная ранее модель квазилинейного программирования с точки зрения корректирующих матриц является диагональным случаем.

Отметим, что в случае функции релаксации (2) алгоритм квазилинейного программирования аналогичен алгоритму квазилинейного программирования в одномерном случае функции релаксации.

Экономико-математический смысл корректирующих параметров

1. *Экономико-математический смысл корректирующей матрицы $\Lambda = (\lambda_{ij})$.*

В одномерном случае из равенства $\beta(y) = \lambda + \dfrac{k}{y + \delta}$ следует, что параметр λ представляет собой предельное значение функции релаксации при неограниченном возрастании двойственной оценки y (горизонтальная асимптота).

Таким образом, корректирующая матрица Λ = (λij) составлена из всевозможных предельных значений соответствующих функций релаксации при неограниченном возрастании двойственных оценок $y = (y_1, y_2,..., y_m)$.

2. *Экономико-математический смысл корректирующей матрицы $\Delta = (\delta_{ij})$.*

Из равенства (5) имеем

$$y(\beta) = -\delta + \frac{k}{\beta - \lambda} \tag{6}$$

Следовательно, параметр $(-\delta)$ представляет собой предельное значение двойственных оценок при неограниченном возрастании значений функции релаксации (вертикальная асимптота).

Таким образом, корректирующая матрица $\Delta = (\delta_{ij})$ составлена из всевозможных предельных значений двойственных оценок $y = (y_1, y_2,..., y_m)$ при неограниченном возрастании соответствующих значений функций релаксации.

3. *Экономико-математический смысл корректирующей матрицы $K = (k_{ij})$.*

Из равенства (5) имеем

$$k = (\beta - \lambda)(y - \delta). \tag{7}$$

Рассмотрим функцию от двух переменных β и y:

$$k(\beta, y) = (\beta - \lambda)(y - \delta). \tag{8}$$

Тогда, очевидно, что при постоянных значениях k линия (6) представляет собой линии уровня функции (8). Исследуем функцию (8) на экстремум и выясним характер особой точки $k = 0, \beta = \lambda, y = \delta.$

Вычислим частные производные:

$$\frac{\partial k}{\partial \beta} = y - \delta, \quad \frac{\partial k}{\partial y} = \beta - \lambda, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial \beta^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^2 k}{\partial \beta \partial y} = 1.$$

Составим матрицу $\begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 k}{\partial\beta^2} & \dfrac{\partial^2 k}{\partial\beta\partial y} \\ \dfrac{\partial^2 k}{\partial\beta\partial y} & \dfrac{\partial^2 k}{\partial y^2} \end{pmatrix}$. Определитель этой матрицы отрицателен, следовательно, в особой точке экстремума нет. Точка $k=0, \beta=\lambda, y=\delta$ представляет собой *седловую* точку для функции (8). Это означает, что существуют направления, вдоль которых функция возрастает, а вдоль других направлений – убывает.

Заметим, что при $k=0$ функция релаксации (5) превращается в постоянную функцию, а сама задача квазилинейного программирования вырождается в задачу линейного программирования. Естественно назвать точку $k=0, \beta=\lambda, y=\delta$ точкой *стыковки* линейного и квазилинейного программирования.

Существенным моментом обобщения задачи линейного программирования на квазилинейный случай явилось то обстоятельство, что обобщение было произведено через некоторую седловую точку, которая обеспечила дальнейшие минимаксные возможности, присущие симплексному методу. Из множества возможностей изменения правых частей линейной задачи было выбрано такое изменение, которое сохранило свойство линейной задачи находить как минимум, так и максимум целевой функции. Геометрически это означает, что к симплексу из пространства переменных была добавлена поверхность из пространства управляющих параметров и эта поверхность имела седловую точку.

В экономической литературе часто встречаются обобщения, при которых правые части линейной задачи подвергаются тем или иным изменениям (например, случай параметрического программирования [8]). Мотивировки таких обобщений, как правило, чисто математические, поскольку формально любая функция годится для изменения правой части. Однако теперь мы можем утверждать, что обобщение должно быть произведено таким образом, чтобы правые части не потеряли возможность минимаксных исследований и были связаны с управляющими параметрами.

Корректировка функции релаксации

Заметим, что в случае $k=0$ при определенной модификации алгоритма рассмотренного в [1] решается так называемая обратная задача. Суть ее заключается в поиске решения задачи линейного программирования при условии принадлежности решения двойственной задачи к определенной окрестности $U(y^*,\varepsilon)$, где y^* – фиксирована, а ε – некоторый наперед заданный вектор $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_m)$.

Рассмотрим взаимодвойственные классические задачи линейного программирования:

$$\min\left\{c'x \,\middle|\, Ax \ge b,\ \mathrm{x} \in \mathrm{R}_+^{\mathrm{n}}\right\}$$

$$\max\left\{b'y \,\middle|\, Ay \le c,\ \mathrm{y} \in \mathrm{R}_+^{\mathrm{m}}\right\}$$

Обратная задача формируется следующим образом. Найти $x \in R_+^n$ при условии $y \in U(y^*,\varepsilon)$, где $\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\dots,\varepsilon_m)$.

Такие задачи возникают на практике довольно часто в моделировании экономических процессов иерархических систем.

Для сведения решения задачи квазилинейного программирования к обратным задачам в алгоритме [1] условия останова: $\left\{\left\|\beta(y^k)-\beta(y^{k-1})\right\|,\ \left\|y^k\text{-}y^{k\text{-}1}\right\|\right\} \le \varepsilon$ заменяется условием $\left\{\left\|\beta(y^k)-\beta(\tilde{y})\right\|,\ \left\|\mathrm{y}^{\mathrm{k}}-\tilde{\mathrm{y}}\right\|\right\} \le \varepsilon$, где $\tilde{y} \in U(y^*,\varepsilon)$.

Уточнение функции релаксации сводится к корректировке λ тем или иным способом (например, метод половинного деления).

Квазилинейное программирование требует, чтобы функция релаксации подвергалась изменениям с помощью корректирующих параметров с таким расчетом, чтобы при каждой итерации опорные решения соответствующей линейной задачи стремились к оптимальному решению.

В работе [1] была произведена корректировка функции релаксации с помощью изменения корректирующих параметров.

В данной статье мы покажем, что корректировку функции релаксации можно осуществить методами матричного исчисления. Это удается сделать по причине того, между функциями релаксации и матрицами второго порядка устанавливается соответствие. Каждой функции релаксации сопоставляется матрица второго порядка, составленная из параметров функции релаксации, и корректировка функции релаксации сводится к перемножению исходной матрицы на некоторую матрицу перехода. Сопоставление определяется по формуле:

$$f_i(y)=\frac{a_i y+b_i}{c_i y+d} \quad \leftrightarrow \quad M_i=\begin{pmatrix} a_i & b_i \\ c_i & d_i \end{pmatrix} \quad i=1,2,...,n\,.$$

Пусть M_i матрица, соответствующая функции релаксации на i-ой итерации. Тогда соотношение

$$M_{i+1}=C_i M_i \tag{9}$$

показывает связь двух матриц M_{i+1} и M_i посредством матрицы перехода C_i. Из соотношения (8) следует, что если известны матрицы M_{i+1} и M_i, то матрица перехода вычисляется по формуле:

$$C_i=M_{i+1}M_i^{-1} \tag{10}$$

Назовем *корректировкой* матричных параметров следующую цепочку отображений:

$$M_1\overset{C_1}{\longrightarrow}M_2\overset{C_2}{\longrightarrow}\cdots\overset{C_{n-1}}{\longrightarrow}M_n \tag{11}$$

Для того чтобы при корректировке функции релаксации не сталкиваться с проблемой зацикливания, необходимо потребовать условие:

$$M_i\neq M_j \quad i,j=1,2,...,n\,.$$

При этом на матрицу C_i накладываются следующие условия:

$\prod_{s=i}^{j-1} C_s \neq E$, где E − единичная матрица второго порядка.

Связь между параметрами дробно-линейной функции и корректирующими параметрами функции релаксации

Воспользуемся некоторыми результатами работы [6]. Рассмотрим дробно-линейную функцию $f(y)=\dfrac{ay+b}{cy+d}$. Очевидно, что с самого начала можно предположить, что $c=1$.

Тогда соответствие между параметрами (a,b,d) и (λ,δ,k) запишется в виде:

$$\begin{cases} \lambda=a \\ \delta=d \\ k=b-ad \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} a=\lambda \\ d=\delta \\ b=k+\lambda\delta. \end{cases}$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть* $M_i=\begin{pmatrix} \lambda_i & k_i+\lambda_i\delta_i \\ 1 & \delta_i \end{pmatrix}$, $i=1,2,...,n$ *матрица параметров корректировки при каждой итерации i=1,2,…n. Тогда матрица перехода C_i вычисляется по формуле:*

$$C_i=-\frac{1}{k_i}\begin{pmatrix} -k_i+\delta_i(\lambda_{i+1}-\lambda_i) & \delta_i k_{i+1}-\delta_{i+1}k_i+\delta_i\delta_{i+1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i) \\ -(\lambda_{i+1}-\lambda_i) & -k_{i+1}+\delta_{i+1}(\lambda_{i+1}-\lambda_i) \end{pmatrix}. \tag{12}$$

Доказательство следует из непосредственных вычислений.

Замечание. В численных методах параметры корректировки подвергаются приращениям:

$$\begin{cases} \lambda \to \lambda + \Delta\lambda \\ \delta \to \delta + \Delta\delta \\ k \to k + \Delta k. \end{cases}$$

Тогда матрица перехода (12) запишется в виде:

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Delta\delta + \frac{1}{k}\left(\begin{pmatrix} -\delta & -\delta^2 \\ 1 & \delta \end{pmatrix} \Delta\lambda + \begin{pmatrix} 0 & -\delta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} (\Delta k + \Delta\lambda\Delta\delta) \right).$$

Матричное исчисление имеет важное значение в процессе реализации моделей квазилинейного программирования.

На первом этапе разрабатываются функции релаксации, имеющие вид (2). Допустим, что по условиям постановки экономической задачи допускается корректировка параметров в пределах $(1+\alpha_i)$ от заранее заданных экспертом уровней b_i^0. Тогда $\overline{b_i}(y_i)$, $\underline{b_i}(y_i)$ соответственно максимально или минимально допустимые значения корректируемым параметров определяются следующим образом:

$$\overline{b_i}(y_i) = b_i^0 + \alpha_i b_i^0 = (1+\alpha_i) b_i^0 = b_i^0 - \beta_i(y_i)_{\min}$$

$$\underline{\mathrm{b_i}}(y_i) = b_i^0 - \alpha_i b_i^0 = (1-\alpha_i) b_i^0 = b_i^0 - \beta_i(y_i)_{\max}.$$

Далее на основе формулы (5) установим:

$$\lim_{y_i \to +\infty} \beta_i(y_i) = \lim_{y_i \to +\infty} (\lambda_i - \frac{K_i}{\delta_i + y_i}) = \lambda_i .$$

Следовательно, $\beta_i(y_i)_{\max} = \lambda_i = \alpha_i b_i^0$.

Параметры k_i, δ_i можно найти, решая систему линейных уравнений:

$$\beta_i(0) = \lambda_i - \frac{k_i}{\delta_i} = \beta_i(y_i)_{\min} = \alpha_i b_i^0$$

$$\beta_i(c_i) = \lambda_i - \frac{k_i}{\delta_i + c_i} = 0.$$

Из этой системы находим $k_i = 2c_i\alpha_i b_i^0$, $\delta_{\mathrm{i}} = c_i$.

Приведенные преобразования являются значительной степени важными для реализации моделей квазилинейного программирования.

Линейная связь между корректирующими параметрами функции релаксации

Важным обстоятельством является тот факт, что параметры корректировки при некоторых линейных преобразованиях остаются на заданной поверхности. Это достигается по причине того, что поверхность второго порядка, на которой расположены корректирующие параметры, инвариантна относительно линейных преобразований, в частности, относительно группы гиперболических поворотов.

Введем обозначения:

$\varPi = \{(\lambda, \delta, k) \mid k + \lambda\delta = b\}$ − поверхность второго порядка, на которой расположены корректирующие параметры (λ, δ, k).

Очевидно, что при растяжениях вида

$$\begin{cases} \lambda \to \alpha\lambda, \\ \delta \to \dfrac{1}{\alpha}\delta, \\ k \to k, \end{cases}$$

где α − некоторый параметр, поверхность П остается инвариантной.

В самом деле, $b = k + \lambda\delta = k + \alpha \cdot \lambda \cdot \dfrac{1}{\alpha} \cdot \delta = k + \lambda\delta = b.$

Кажущаяся простота этих преобразований не должна вводить нас в заблуждение. При корректировке функции релаксации знание этих преобразований позволяет брать корректирующие параметры из наперед заданного множества. Более точно, имеем место

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Пусть* $(\lambda_1, \delta_1, k_1) \in \Pi$.

Тогда, если выполняются условия:

$$\begin{cases} \lambda_2 = e^{t}\lambda_1, \\ \delta_2 = e^{-t}\delta_1, \\ k_2 = k_1, \end{cases} \tag{13}$$

где t − действительный параметр (угол гиперболического поворота), то $(\lambda_2, \delta_2, k_2) \in \Pi$.

Доказательство. Преобразование

$$\begin{cases} \lambda = Y - X, \\ \delta = Y + X, \\ k = Z + b \end{cases} \tag{14}$$

переводит поверхность

$$\Pi = \{(\lambda, \delta, k) \,|\, k + \lambda\delta = b\} \tag{15}$$

в поверхность

$$Z = X^2 - Y^2, \tag{16}$$

которая инвариантна относительно линейного преобразования:

$$\begin{cases} X \to Xcht + Ysht, \\ Y \to Xsht + Ycht\ , \\ Z \to Z, \end{cases}$$

где t − действительный параметр (угол гиперболического поворота).

Следовательно, обратное преобразование к преобразованию (14)

$$\begin{cases} X = \dfrac{\delta - \lambda}{2}, \\ Y = \dfrac{\delta + \lambda}{2}, \\ Z = k - b \end{cases}$$

переведет поверхность (15) в (16).

Таким образом, поверхность (15) инвариантна относительно преобразования

$$\begin{cases} \dfrac{\delta - \lambda}{2} \to \dfrac{\delta - \lambda}{2} cht + \dfrac{\delta + \lambda}{2} sht, \\ \dfrac{\delta + \lambda}{2} \to \dfrac{\delta - \lambda}{2} sht + \dfrac{\delta + \lambda}{2} cht, \\ k - b \to k - b. \end{cases}$$

Переходя от стрелок к равенствам, получаем преобразование.

$$\begin{cases} \dfrac{\delta_2-\lambda_2}{2} = \dfrac{\delta_1-\lambda_1}{2} cht + \dfrac{\delta_1+\lambda_1}{2} sht, \\ \dfrac{\delta_2+\lambda_2}{2} = \dfrac{\delta_1-\lambda_1}{2} sht + \dfrac{\delta_1+\lambda_1}{2} cht, \\ k_2 - b = k_1 - b, \end{cases}$$

откуда следует преобразование (13).

Утверждение 3 доказано.

Литература

1. *Куев А.И.* Модели наилучшего использования ресурсов в сельском хозяйстве. – М.: Финансы и статистика, 1994. – 216 с.
2. *Булавский В.А.* Релаксация и многокритериальные задачи //Оптимизация. – Новосибирск, 1981, вып. 26(43). - С. 5-20.
3. *Куев А.И.* Математическое моделирование экономических процессов в сельском хозяйстве. – Майкоп, Изд-во МГТУ, 2004. - 448 с.
4. *Паланджянц Л.Ж.* О функции релаксации в квазилинейном программировании // Экономика и технологии. − Майкоп: изд. МГТУ, 2005. - С. 88-90.
5. *Куев А.И., Паланджянц Л.Ж.* Об одной задаче квазилинейного программирования // Экономика и технологии. − Майкоп: изд. МГТУ, 2006. – С. 3-8.
6. *Коннов И.В.* Об одном классе моделей экономического равновесия // Экономика и математические методы. – 2004. – Т. 40. – №3. - С. 103-109.
7. *Захарова Е.И., Куев А.И., Титаренко Е.А., Шевякова О.П.* Элементы линейного программирования. Учебное пособие. − Майкоп: изд-во «Дебют», 2000. − 179 с.
8. *Акулич И.А.* Математическое программирование в примерах и задачах: Учебное пособие. − 2-е изд. испр. и доп. − М.: Высш. шк., 1993. − 336 с.

ON MATHEMATICAL FOUNDATIONS OF QUASI-LINEAR PROGRAMMING

A.I. Kuev, L.J. Palandzhyants

The mathematical bases quasi-linear programming with fractional-linear relaxation function are considered. Some properties of relaxation function are studied and its updating is carried out. It is shown, that updating of relaxation function can be carried out methods of matrix calculation. It has appeared, that in quasi-linear programming with is fractional-linear function of a relaxation parametres are located on the surface of the second order imagining a hyperbolic paraboloid. Kinds of communications between parametres of is fractional-linear function and correcting parametres of relaxation function are established. The offered model quasi-linear programming can be used for the mathematical analysis of economic models. In particular, the authors consider economic-mathematical sense of correcting parametres in relaxation function.

