СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ СИСТЕМЫ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВОЛЬТЕРРА

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп
Кубанский государственный университет, г. Краснодар

В статье доказываются теоремы о регулярном представлении сингулярно возмущенных интегродифференциальных уравнений в виде возмущенных интегральных уравнений. Построены специальные методы последовательных приближений, в случае нарушения условия устойчивости в отдельных точках и исследованы их сходимости. Проведено доказательство теорем существования и единственности решения для систем линейных сингулярно возмущенных интегродифференциальных уравнений Вольтерра.

В качестве банахового пространства B будем рассматривать линейное пространство векторнозначных функций $X(t):[0,1] \to E^n$, непрерывных на $[0,1]$, с нормой

$$\left\| X \right\| = \max_{t\in[0,1]} \left\| X_{it} \right\|_{E^n},$$

обозначенное через $C\,[0,1]$.

Через $C^1[0,1]$ обозначим подпространство $C\,[0,1]$ один раз непрерывно дифференцируемых на $[0,1]$ векторнозначных функций.

Для построения асимптотического разложения или итерационного метода нахождения решения систем интегродифференциальных уравнений необходимы, как правило, соответствующие процедуры для матриц Коши, которые приведены в нашей работе [1].

Рассмотрим систему интегродифференциальных уравнений типа Вольтерра

$$\sigma(\mu)x' = A(t)x + \int_0^t \Gamma(t,s)x(s,t)ds + f(t); \tag{1}$$

$$x(0,\mu) = x_0,\ 0 \le t \le 1, \tag{2}$$

где $\Gamma(t,s) = \{\Gamma_{ij}(t,s)\}_{i,j}^n$, $\Gamma_{i,j}(t,s)$ - непрерывно дифференцируемы в $0 \le s \le t \le 1$, $f(t):[0,1] \to E^n$ непрерывна. Не нарушая общности в (2), можно считать $x_0 = 0$, и поэтому в дальнейшем уравнение (1) рассматривается с условием

$$x(0,\mu) = 0. \tag{3}$$

Обозначим

$$X = \{\, x \in C[0,1] : x(0) = 0, x \in C^1[0,1] \,\};$$
$$Y = C[0,1];$$
$$F_\mu(x)(t) = \sigma(\mu)\frac{dx}{dt} - A(t)x - \int_0^t \Gamma(t,s)x(s)ds.$$

Тогда задача Коши (1), (3) эквивалентна уравнению:

$$F_{\mu}(x)= f \qquad (4)$$

на паре (X,Y).

При $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$, $\mu \neq \mu_0$, где $det(\sigma(\mu)) \neq 0$, существует $\sigma^{-1}(\mu)$ т.е. при каждом $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ задача Коши (1), (3), а, следовательно, и уравнение (4) на паре (X,Y) при каждом $f \in Y = C[0,1]$ имеют единственное решение $x \in Y$.

С другой стороны, будем предполагать, что $det(\sigma(\mu_0)) = 0$, т.е., что хотя бы одно собственное число матрицы $\sigma(\mu)$ равно нулю, поэтому задача Коши (1), (3) и, следовательно, (4) на паре (X,Y), вообще говоря, не имеют решений.

Таким образом, задача Коши (1), (3) является сингулярно возмущенной задачей.

Теорема 1

Пусть выполнены условия леммы 1 из [1] и требования:

1. Существует такое число $\beta \geq 0$, что

$$0 < \lim_{t \to 0} \left| t^{-\beta} det A(t) \right| < \infty.$$

2. Функция

$$\overline{\Gamma}(t,s) = \begin{cases} t^{-\beta}\Gamma(t,s), 0 \leq s \leq t \leq 1, t > 0 \\ \lim\limits_{t \to 0, 0 \leq s \leq t} t^{-\beta}\Gamma(t,s), t = 0 \end{cases}$$

непрерывно дифференцируема в $0 \leq s \leq t \leq 1$, тогда сингулярно возмущенная задача Коши (1), (3) имеет регулярное представление.

Доказательство. 1. Обозначим

$$\Gamma_0(t,s) = \frac{1}{det A(t)} \Gamma(t,s), 0 \leq s \leq t \leq 1,\ t \neq 0.$$

Доопределим $\Gamma_0(t,s)$ по непрерывности в $t = 0$. Матрица $\Gamma_0(t,s)$ непрерывно дифференцируема в силу условия 2) теоремы. Пусть $\widetilde{A}(t)$ матрица, ассоциированная с матрицей $A(t)$.

Рассмотрим матрицу

$$D(t,\tau,\mu) = \int_{\tau}^{t} K(t,s,\mu)\sigma^{-1}(\mu)\Gamma(s,\tau)df$$

и операторы

$$T(x)(t) = x(t) + \widehat{A}(t)\int_0^t \Gamma_0(t,s)x(s)ds : X \to X;$$

$$Z_{\mu}(x)(t) = \int_0^t \left\{ D(t,s,\mu) + \widehat{A}(t)\Gamma_0(t,s) \right\} x(s)ds : X \to X.$$

Очевидно, $T(C[0,1]) = C[0,1], Z_{\mu}(C[0,1]) = C[0,1]$.

Пусть

$$\varphi(t,\mu)=\int_0^t K(t,s,\mu)\sigma^{-1}(\mu)f(s)ds.$$

Рассмотрим уравнение

$$T(x)+Z_\mu(x)=\varphi.$$

Из теоремы 4 [1] следует, что (1), (3) эквивалентно (5) (см. ниже), если положить

$$L_\mu(x)(t)=\sigma(\mu)\frac{d}{dt}x(t)-A(t)x(t);$$

$$L_\mu^{-1}(y)(t)=\int_0^t K(t,s,\mu)\sigma^{-1}(\mu)y(s)ds;$$

$$F(x)(t)=-\int_0^t \Gamma(x,t)x(s)ds;$$

$$Q(x)(t)=\int_0^t \Gamma_0(t,s)x(s)ds.$$

2. Для доказательства теоремы достаточно теперь показать, что

$$\lim_{\mu\to\mu_0}\left\|Z_\mu\right\|_L=0.$$

Так как

$$D(t,\tau,\mu)=\int_\tau^t K(t,s,\mu)\sigma^{-1}(\mu)\Gamma(s,\tau)ds=\int_\tau^t K(t,s,\mu)\sigma^{-1}(\mu)A(s)\tilde{A}(s)\Gamma_0(s,\tau)ds,$$

то в силу леммы 1 [1] имеем

$$D(t,\tau,\mu)=-\int_\tau^t \frac{\partial}{\partial s}K(t,s,\mu)\tilde{A}(s)\Gamma_0(s,\tau)ds.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$D(t,\tau,\mu)=-\tilde{A}(t)\Gamma_0(s,\tau)+K(t,\tau,\mu)\tilde{A}(\tau)\Gamma_0(\tau,\tau)+\int_\tau^t K(t,s,\mu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\tilde{A}(s)\Gamma_0(s,\tau)\right]ds.$$

Таким образом,

$$Z_\mu(x)(t)=\int_0^t\{K(t,\tau,\mu)\tilde{A}(\tau)\Gamma_0(\tau,\tau)+\int_\tau^t K(t,s,\mu)\frac{\partial}{\partial s}\left[\tilde{A}(s)\Gamma_0(s,\tau)\right]x(\tau)ds.$$

Из леммы 2 [1] следует

$$\lim_{\mu\to\mu_0}\left\|Z_\mu\right\|_L=0.$$

Что требовалось доказать.

Из доказательства теоремы мы получаем следующее регулярное представление для (1), (2):

$$x(t,\mu)+\tilde{A}(t)\int_0^t \Gamma_0(t,s)x(\delta,\mu)d\tau =$$
$$=\int_0^t\left(\int_\tau^t K(t,s,\mu)\sigma^{-1}(\mu)\Gamma(s,\tau)ds+\tilde{A}(t)\Gamma_0(t,\tau)\right)x(\delta,\mu)d\tau, \tag{5}$$

где $K(t,s,\mu)$ - функция Коши:

$$\sigma(\mu)\frac{\partial K}{\partial t}=A(t)K\ , \tag{6}$$
$$K(s,s,\mu)=I\ , \tag{7}$$

а $\varphi(t,\mu)$ является решением задачи Коши:

$$\sigma(\mu)\frac{\partial \varphi}{\partial t}=A(t)\varphi+f(t); \tag{8}$$
$$\varphi(0,\mu)=0\ . \tag{9}$$

Очевидно, что регулярное представление (5) – (9) порождает много различных итерационных и асимптотических методов решения задачи Коши (1), (2). Для примера приведем два итерационных метода.

1. Если предположить, что функция Коши $K(t,s,\mu)$ известна, то получаем, например, следующий итерационный метод:

$$x_i(t,\mu)+\tilde{A}(t)\int_0^t \Gamma_0(t,\tau)x_i(\tau,\mu)d\tau =$$
$$=\int_0^t\left[\int_\tau^t K(t,s,\mu)\sigma^{-1}(\mu)\Gamma(s,\tau)ds+\tilde{A}(t)\Gamma_0(t,\tau)\right]x_{i-1}(\tau,\mu)d\tau+\varphi(t,\mu); \tag{10}$$
$$x_1(\tau,\mu)\equiv 0, i=0,1\ldots \tag{11}$$
$$\varphi_i(\tau,\mu)=\int_0^t K(t,s,\mu)\sigma^{-1}(\mu)f(s)ds\ . \tag{12}$$

2. Предполагая, что $\{K(t,s,\mu)\}_{i=0,1,\ldots}$ некоторая последовательность матриц, сходящихся к матрице Коши $K(t,s,\mu)$, можно предложить следующий итерационный метод:

$$x_i(t,\mu)+\tilde{A}(t)\int_0^t \Gamma_0(t,\tau)x_i(\tau,\mu)d\tau =$$
$$=\int_0^t\left[\int_\tau^t K_i(t,s,\mu)\sigma^{-1}(\mu)\Gamma(s,\tau)ds+\tilde{A}(t)\Gamma_0(t,\tau)\right]x_{i-1}(\tau,\mu)d\tau+\varphi_i(t,\mu); \tag{13}$$

$$\varphi_i(\tau,\mu)=\int_0^t K_i(t,s,\mu)\sigma^{-1}(\mu)f(s)ds\,; \tag{14}$$

$$x_{-1}(t,\mu)\equiv 0,\ i=0,1... \tag{15}$$

Замечание 1. Отметим, что для реализации итерационных методов необходимо на каждом шаге решать интегральные уравнения Вольтерра с ядром $\widetilde{A}(t)\Gamma_0(t,\tau)$. При поиске одновременно нескольких приближений, может оказаться полезным сначала найти резольвенту ядра $\widetilde{A}(t)\Gamma_0(t,\tau)$, а затем - $x_i(t,\mu)$ при помощи квадратур.

Замечание 2. Оценка скорости сходимости итерационных методов, порождаемых регулярным представлением (5), получается простой переформулировкой теорем из [2].

Итерационный процесс (13) – (15) может сходиться в случае $U=R$, $U_0=(0,\overline{\mu}]$, $\mu_0=0$, $\overline{\mu}_0>0$, $\sigma(\mu)=\mu I$ и при более слабых условиях, чем условие 2) теоремы 1, а именно, достаточно потребовать, чтобы

а) матричная функция $\Gamma_0(t,s)$ была непрерывной в $0\le s\le t\le 1$;

б) $$\left\|\frac{\partial}{\partial t}\Gamma_0(t,s)\right\|=0\left(\frac{1}{s}\right), s\to 0 \tag{16}$$

равномерно относительно $t\in[0,1]$.

Обозначим:

$$D_1(t,\tau,\mu)=K(t,\tau,\mu)\widehat{A}(\tau)\Gamma_0(t,\tau)\,;$$
$$D_2(t,\tau,\mu)=D(t,\tau,\mu)+\widehat{A}(\tau)\Gamma_0(t,\tau)-D_1(t,\tau,\mu).$$

Лемма 1. Пусть выполнены условия теоремы 1, тогда

1. $$\int_0^t\left\|D_1(t,\tau,\mu)\right\|d\tau\le C\mu^{\frac{1}{\beta+1}}, 0\le t\le 1, 0\le\mu\le\overline{\mu}\,. \tag{17}$$

2. $$\tau\left\|D_2(t,\tau,\mu)\right\|d\tau\le C\mu^{\frac{1}{\beta+1}}, 0\le\tau\le t\le 1, 0\le\mu\le\overline{\mu}\,. \tag{18}$$

Доказательство. 1. Из леммы 4 [1] и теоремы 1 следует, что

$$\int_0^t\left\|D_1(t,\tau,\mu)\right\|d\tau\le\int_0^t\left\|K(t,\tau,\mu)\widehat{A}(\tau)\Gamma_0(t,\tau)\right\|\alpha\tau\le$$

$$\le C\int_0^t\left\|K(t,\tau,\mu)\right\|d\tau\le C\mu^{\frac{1}{\beta+1}}, 0\le t\le 1, 0\le\mu\le\overline{\mu}.$$

2. Докажем неравенство (18)

Обозначим $V=\{(t,\tau,\mu):0\le\tau\le t\le 1, 0\le\mu\le\overline{\mu}\}$. Возьмем любое $\mu\in(0,\overline{\mu}]$. Очевидно, $V=V_0\cap V_1$, где

$$V_0 = \left\{ (t,\tau,\mu): \mu^{\frac{1}{\beta+1}} \le \tau \le t \le 1,\ 0 \le \mu \le \overline{\mu} \right\};$$

$$V_1 = \left\{ (t,\tau,\mu): 0 \le \tau \le \mu^{\frac{1}{\beta+1}},\ 0 \le \tau \le t \le 1,\ 0 \le \mu \le \overline{\mu} \right\}.$$

Докажем неравенство (18) в области V_0. Интегрируя в

$$D(t,\tau,\mu) = \frac{1}{\mu} \int_\tau^t K(t,s,\mu) \Gamma(s,\tau) ds$$

по частям, получаем

$$D_2(t,\tau,\mu) = \int_\tau^t K(t,s,\mu) \frac{\partial}{\partial s} \left[\tilde{A}(s) \Gamma_0(s,\tau) \right] ds.$$

Учитывая (16) и лемму 4 [1], имеем

$$\left\| D_2(t,\tau,\mu) \right\| d\tau \le \frac{C}{\tau} \mu^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Рассмотрим теперь неравенство (18) в области V_1. Из

$$D_2(t,\tau,\mu) = D(t,\tau,\mu) + \widehat{A}(\tau) \Gamma_0(t,\tau) - D_1(t,\delta,\mu)$$

имеем

$$\left\| D_2(t,\tau,\mu) \right\| \le \left\| D(t,\tau,\mu) \right\| + \left\| \widehat{A}(\tau) \Gamma_0(t,\tau) \right\|_{matr} + \left\| D_1(t,\tau,\mu) \right\| \le C_1 \left[1 + \left(\frac{\tau}{\mu \frac{1}{\beta+1}} \right)^\beta \right] \le C.$$

Так как в области V_1 имеем $0 \le \tau \le \mu^{\frac{1}{\beta+1}}$, то $\tau \left\| D_2(t,\tau,\mu) \right\| \le C \mu^{\frac{1}{\beta+1}}$. Лемма доказана.

Теорема 2

Пусть выполнены условия леммы 2 [1], условие теоремы 1 и условия а) и в), тогда последовательные приближения $x_i(t,\mu)$, определяемые равенствами (13) – (15), сходятся равномерно относительно $t \in [0,1]$ и $\mu \in (0,\overline{\mu}]$ к решению $x(t,\mu)$ задачи (1); (2) при достаточно малом $\overline{\mu}$, причем

$$\left\| x(t,\mu) - x_i(t,\mu) \right\| \le c \left(c \mu^{\frac{1}{\beta+1}} \right)^{i+1} \frac{t}{\mu}$$

при $0 \le t \le 1, 0 \le \mu \le \overline{\mu}$, c не зависит от (t,μ).

Доказательство. Сделаем замену

$$x_i(t,\mu) = \frac{y_i(t,\mu)}{\mu},$$

используя которую, запишем итерационный процесс (13) – (15) в виде:

$$y_i(t,\mu)+\int_0^t \widetilde{A}(t)\Gamma_0(t,\tau)y_i(\tau,\mu)d\tau=\int_0^t D_1(t,\tau,\mu)y_{i\text{-}1}(\tau,\mu)d\tau+\int_0^t D_2(t,\tau,\mu)y_{i\text{-}1}(\tau,\mu)d\tau+$$

$$+\varphi_i(t,\mu);$$

$$y_{\text{-}1}(t,\mu)\equiv 0,\ i=0,1...$$

$$\varphi_i(\tau,\mu)=\mu\varphi(\tau,\mu).$$

Пусть $\Phi(t,\tau)$ - резольвента ядра $\widetilde{A}(t)\Gamma_0(t,\tau)$.

Обозначим

$$M=max\left\{1,\max_{0\le t\le 1}\int_0^t \left\|\Phi_1+\tau\right\|_{matr}d\tau\right\}. \tag{19}$$

Из определения $\varphi_1(\tau,\mu)$ и леммы 4 [1] следует существование такой постоянной c_1, что

$$\left\|\varphi_1(\tau,\mu)\right\|\le c_1t\ . \tag{20}$$

Положим

$$U_i(t,\mu)=y_i(t,\mu)-y_{i-1}(t,\mu),u_{-1}\equiv 0,i=0,1...$$

Покажем, что

$$\left\|U_i(t,\mu)\right\|\le 2C_1M\left(2CM\mu^{\frac{1}{\beta+1}}\right)^i t,\ t\in[0,1],\ \mu\in(0,\overline{\mu}], \tag{21}$$

где c определено как в лемме 1.

Пусть $i=0$. Тогда $U_0(t,\mu)=y_0(t,\mu)$ и удовлетворяет уравнению

$$y_0(t,\mu)+\int_0^t \widetilde{A}(t)\Gamma_0(t,\tau)y_0(\tau,\mu)d\tau=y_1(t,\mu).$$

Откуда с учетом (19), (20) получим

$$\left\|y_0(t,\mu)\right\|\le 2MC_1t,\ t\in[0,1],\ \mu\in(0,\overline{\mu}].$$

Пусть (21) выполнено при i = k. Покажем, что тогда справедлива оценка

$$\left\|U_{k+1}(t,\mu)\right\|\le 2C_1M\left(2CM\mu^{\frac{1}{\beta+1}}\right)^{k+1} t,\quad t\in[0,1],\quad \mu\in(0,\overline{\mu}]. \tag{22}$$

Обозначим

$$H_k(t,\mu)=\int_0^t D_1(t,\tau,\mu)U_k(\tau,\mu)d\tau+\int_0^t D_2(t,\tau,\mu)U_k(\tau,\mu)d\tau.$$

Оценим $H_k(t,\mu)$

$$\left\|H_k(t,\mu)\right\| \le 2C_1M\left(2CM\mu^{\frac{1}{\beta+1}}\right)^k t\int_0^t \left\|D_1(t,\tau,\mu)\right\| d\tau + 2C_1M\left(2CM\mu^{\frac{1}{\beta+1}}\right)^k \times$$

$$\times \int_0^t \left[\max_{0\le\tau\le t\le1} \tau\left\|D_2(t,\tau,\mu)\right\|\right] d\tau \le 2C_1M\,2^{k+1}C^{k+1}M^k t\mu^{\frac{k+1}{\beta+1}}.$$

Откуда и следует неравенство (22).

Пусть $\overline{\mu}$ настолько мало, что $q = 2CM\overline{\mu}^{\frac{1}{\beta+1}} < 1$. Тогда ряд $\sum_{i=0}^{\infty} u_i(t,\mu)$ можарируется рядом $\sum_{i=0}^{\infty} q^i$, что и доказывает теорему.

В заключение рассмотрим вопрос о приближенном решении сингулярно возмущенного уравнения Вольтерра, при достаточно общем виде нарушения условия устойчивости в $t = 0$.

Рассмотрим уравнение

$$\mu x = \int_0^t \Gamma(t,s)x(s,\mu)ds + f(t);$$

$$0 \le t \le 1, \quad 0 \le \mu \le \overline{\mu}$$

при следующих условиях:

1. $\Gamma(t,s) = t^p s^1 q(t,s), 0 \le s \le t \le 1, \; p \ge 0, 1 \ge 0$,

где q – дважды непрерывно дифференцируема в $0 \le s \le t \le 1$.

2. $Q(t,t) < 0$, $0 \le t \le 1$.

3. $f(t)$ – непрерывно дифференцируема в $[0,1]$.

Заметим, что в условиях 1̃3 вырожденное уравнение:

$$t^p \int_0^t s^1 Q(t,s)V(s)ds + f(t) = 0,$$

вообще говоря, не имеет непрерывных решений.

Полагая $x(t,\mu) = \frac{1}{\mu} f(t) + \frac{t^p}{\mu^2} y; \quad \beta = p + 1$

и дифференцируя, получим для $y(t,\mu)$ задачу

$$\mu y' = t^{\beta} Q(t,t) y + \int_0^t s^{\beta} \frac{\partial}{\partial t} Q(t,s) y(s,\mu) ds + \mu \int_0^t s^1 f(s) \Gamma(t,s) ds, y(0,\mu) = 0,$$

к которой применима теорема 2.

Интересно отметить, что если $p = 0$ и уравнение

$$\int_0^t Q(t,s)u(s)ds + f(t) = 0$$

имеет единственное непрерывное на [0,1] решение $u(t)$, то и вырожденное уравнение имеет единственное решение

$$V(t)t^{-1}u(t), t \in [0,1],$$

и решение сингулярно возмущенного уравнения $x(t,\mu)$ существует, единственно и выполняется условие

$$\lim_{\mu \to 0} x(t,\mu) = v(t), t \in (0,1).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках темы 1.4.08 Единого заказ/наряда.

Литература

1. *Мамий Д.К., Лаврентьев А.В., Коваленко А.В., Уртенов М.Х.* Некоторые свойства матриц Коши для систем линейных сингулярно возмущенных дифференциальных уравнений. // Труды ФОРА. – 2010. - № 15. – С.
2. *Мамий Д.К., Лаврентьев А.В., Уртенов М.Х.* Итерационные методы решения сингулярно возмущенных операторных уравнений Фредгольма// Вестник АГУ, 2009. Выпуск 1(43). С. 9-14.

SINGULARLY PERTURBED SYSTEM VOLTERRA INTEGRODIFFERENTIAL EQUATIONS

D.K.Mamy, A.V.Lavrentev, A.V.Kovalenko, M.H.Urtenov

In this paper we prove theorems on regularly to the singularly perturbed integrodifferential equations in a perturbed integral equations. Construct special methods of successive approximations, in case of violation of conditions of stability at some points and investigated their convergence. Conducted to prove theorems of existence and uniqueness of solutions for systems of linear singularly perturbed Volterra integro-differential equations.

