2011 г **№ 16**

Труды ФОРА

НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ ТЕОРИИ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА И ТЕОРИИ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ ГРУПП И АЛГЕБР ЛИ ТИПА A_1

В.А. Козлов, Л.Ж. Паланджянц

Армавирская государственная педагогическая академия, г., Армавир
Майкопский государственный технологический университет, г., Майкоп

Сформулирована задача о связи между представлениями алгебры Ли A_1 и дробными степенями оператора Штурма-Лиувилля. Установлена также связь между преобразованием линейных дифференциальных уравнений и представлениями алгебр Ли.

1. Дифференциальные операторы, порожденные представлениями алгебры Ли типа A_1 нечетной размерности

Сформулируем задачу о связи между представлениями алгебры Ли A_1 со старшим весом $\overset{k}{\circ}$, $k \in N$ и дробными степенями оператора Штурма-Лиувилля $L = \partial^2 - u$. Для этого используем мультипликативные интегралы, соответствующие дробным степеням оператора Штурма-Лиувилля нечетной степени, и калибровочное преобразование подынтегральных матричных функций соответствующих мультипликативных интегралов [1-3].

Мультипликативный интеграл, соответствующий оператору Штурма-Лиувилля $L = \partial^2 - u$, имеет вид: $\overset{\frown}{\int} E + A(t)dt$, где $A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ u & 0 \end{pmatrix}$, $u = u(x)$ – некоторая функция от переменной x.

Пример 1. Представление $\Phi = \overset{2}{\circ}$ переводит матрицу $A(t)$ в матрицу

$$\Phi(A(t)) = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ u & 0 & 2 \\ 0 & u & 0 \end{pmatrix}.$$

При этом соответствующее данной матрице линейное уравнение третьего порядка примет вид:

$$y''' = 4uy' + 2u'y. \tag{1.1}$$

Уравнение (1.1) равносильно системе линейных уравнений с матрицей

$$\tilde{A}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 2u' & 4u & 0 \end{pmatrix}.$$

принадлежащей пространству представлений алгебры Ли A_2 со старшим весом $\overset{1}{\circ}\!-\!\circ$.

С другой стороны, матрица, соответствующая дробной степени оператора Штурма-Лиувилля $L_+^{03/2} = \partial^3 - \frac{3}{2}u\partial - \frac{3}{4}u'$, имеет вид:

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ \frac{3}{2}u' & \frac{3}{4}u & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

При этом соответствующее матрице (1.2) линейное уравнение третьего порядка примет вид:

$$y''' = \frac{3}{4}uy' + \frac{3}{2}u'y\,. \tag{1.3}$$

Уравнение (1.3) есть уравнение типа (1.1). Найдем матрицу калибровочного преобразования $T(t)$, удовлетворяющую условию

$$A(t) = T\Phi(A(t))T^{-1} + TT^{-1}\,. \tag{1.4}$$

Пусть $T = (x_{ij})$ из уравнения (1.4). Вычислим x_{ij}, $i,j = 1,2,3$. Из условия (8) получаем:

$$\begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -u \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -u \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -u \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix} + a \cdot \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix} + b \cdot \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix},$$

где $a = \frac{3}{4}u'$, $b = \frac{3}{2}u$. Введем обозначения:

$$x_1 = \begin{pmatrix} x_{11} \\ x_{12} \\ x_{13} \end{pmatrix}, \; x_2 = \begin{pmatrix} x_{21} \\ x_{22} \\ x_{23} \end{pmatrix}, \; x_3 = \begin{pmatrix} x_{31} \\ x_{32} \\ x_{33} \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -2 & 0 & -u \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix}.$$

Тогда для вычисления элементов матрицы T получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} x_1' = Ax_1 + x_2\,, \\ x_2' = Ax_2 + x_3\,, \\ x_3' = Ax_3 + ax_1 + bx_2\,. \end{cases} \tag{1.5}$$

Система (1.5) имеет решение в виде мультипликативного интеграла:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \overset{\frown}{\int} \left(E + \begin{pmatrix} A & E & 0 \\ 0 & A & E \\ aE & bE & A \end{pmatrix} dt \right) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}_0, \tag{1.6}$$

где подынтегральную матрицу можно записать в виде кронекеровой суммы следующим образом:

$$C \oplus A = C \otimes E + E \otimes A\,.$$

Вычисление мультипликативного интеграла (1.6) в явном виде представляет трудную задачу, поэтому решение задачи можно сформулировать в терминах линейных дифференциальных уравнений третьего порядка.

2. Дифференциальные операторы, порожденные представлениями алгебры Ли типа A_1 четной размерности

В этом пункте мы применим метод Гельфанда-Дикого для вычисления дробных степеней оператора четвертого порядка, порожденного представлением алгебры Ли типа A_1 со старшим весом $\overset{3}{\circ}$. Такой оператор нами уже вычислен:

$$P = \partial^4 - 10u\partial^2 - 10u'\partial - 3(u'' + 3u^2)\,. \tag{2.1}$$

Используя расширение кольца дифференциальных операторов, вычислим формальный ряд Лорана

$$\lambda = \xi^2 + a_1\xi + a_0 + a_{-1}\xi + a_{-2}\xi^{2} + \cdots,$$

такой, что имеет место равенство: $\lambda \circ \lambda = P$, где в операторе (2.1) осуществлена замена $\partial \to \xi$.

Используя известную формулу умножения рядов Лорана в расширении алгебры дифференциальных операторов,

$$\lambda \circ \lambda = \lambda \cdot \lambda + \lambda'_\xi \cdot \lambda'_x + \frac{1}{2}\lambda''_{\xi\xi} \cdot \lambda''_{xx} + \cdots,$$

получаем:

$$\begin{aligned}
&\lambda \circ \lambda = (\xi^2 + a_1\xi + a_0 + a_{-1}\xi + a_{-2}\xi^2 + \cdots)\cdot(\xi^2 + a_1\xi + a_0 + a_{-1}\xi + a_{-2}\xi^2 + \cdots) + \\
&+(2\xi + a_1 - a_{-1}\xi^{-2} - 2a_{-2}\xi^{-3} - \cdots)\cdot(a'_1\xi + a'_0 + a'_{-1}\xi^{-1} + a'_{-2}\xi^{-2} +) + \\
&+\frac{1}{2}(2 + a_{-1}\xi^{-2} + 6a_{-2}\xi^{-4} + \cdots)\cdot(a''_1\xi + a''_0 + a''_{-1}\xi_{-1} + \cdots) + \cdots = \\
&= \xi^4 + a_1^2\xi^2 + a_0^2 + a_{-1}^2\xi^{-2} + a_{-2}^2\xi^{-4} + 2a_1\xi^3 + 2a_0\xi^2 + 2a_{-1}\xi + 2a_{-2} + \\
&+ 2a_1a_0\xi + 2a_1a_{-1} + 2a_1a_{-2}\xi^{-1} + 2a_0a_{-1}\xi^{-1} + 2a_0a_{-2}\xi^{-2} + 2a_{-1}a_{-2}\xi^{-3} + \cdots \\
&\cdots + 2a'_1\xi^2 + 2a'_0\xi + 2a'_{-1} + 2a'_{-2}\xi^{-1} + a_1a'_1\xi + a_1a'_0 + a_1a'_{-1}\xi^{-1} + a_1a'_{-2}\xi^{-2} - \\
&- a_{-1}a'_{-1}\xi^{-1} - a_{-1}a'_0\xi^{-2} - a_{-1}a'_{-2}\xi^{-3} - 2a_{-2}a'_1\xi^{-2} - 2a_{-2}a'_0\xi^{-3} - \cdots \\
&\cdots + a''_1\xi + a''_0 + a''_{-1}\xi^{-1} + a_{-1}a''_1\xi^{-2} + a_{-1}a''_0\xi_{-4} + \cdots
\end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях, из условия $\lambda \circ \lambda = P$ получаем:

$$\begin{cases}
2a_1 = 0, \\
a_1^2 + 2a_0 + 2a' = -10u_1, \\
2a_{-1} + 2a_1a_0 + a_1a'_1 + 2a'_0 + a''_1 = -10u', \\
a_0^2 + 2a_{-2} + 2a_1a_{-1} + 2a'_{-1} + a_1a' + a''_{00} = -3(u'' + 3u^2).
\end{cases} \tag{2.2}$$

Решая систему (2.2), получаем:

$$a_1 = 0,\ a_0 = -5u,\ a_{-1} = 0,\ a_{-2} = u'' - 17u^2.$$

Таким образом, имеем $L = \lambda_+ = \partial^2 - 5u$.

Найдем коммутатор дифференциальных операторов P и L.

$$\begin{aligned}
&PL = \partial^6 - 5u^{(4)} - 20u'''\partial - 30u''\partial^2 - 20u'\partial - 5u\partial^4 - 10u\partial^4 + 50u''u + \\
&+100u'u\partial + 50u^2\partial^2 + 50u'^2 + 50u'u\partial - 3(u'' + 3u^2)\partial + 15u(u'' + 3u^2), \\
&LP = \partial^6 - 10u''\partial^2 - 20u'\partial^3 - 10u\partial^4 - 20u''\partial^2 - 10u'\partial^3 - 3(u'' + 3u^2)'' - \\
&- 6(u'' + 3u^2)'\partial - 3(u'' + 3u^2)\partial^2 - 5u\partial^4 + 50u^2\partial^2 + 50uu'\partial + 15u(u'' + 3u^2).
\end{aligned}$$

Следовательно, $[P,L] = -4(u''' - 34uu')\partial - 2(u''' - 34uu')'$.

Из условия $[P,L] = 0$ получаем уравнение Кортевега – де Фриза:

$$u''' - 34uu' = 0.$$

Интересно распространить сформулированную задачу для представлений алгебры Ли типа A_1 со старшим весом $\overset{2m+1}{\circ}$, $m \in N$.

3. Преобразование линейных дифференциальных уравнений и представления групп и алгебр Ли

1. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y'' + u(x)y = 0, \tag{3.1}$$

где функция $u(x) \in C(R)$.

Известно (см., например, [4, С. 117]), что преобразованием

$$z=\alpha(x)y+\beta(x)y',\ \alpha,\beta\in C^2(R), \tag{3.2}$$

уравнение (3.1) можно привести к виду

$$z''+v(x)z=0. \tag{3.3}$$

При этом функции α и β связаны между собой следующими соотношениями:

$$\alpha''+(v-u)\alpha-2u\beta'-\beta u'=0, \tag{3.4}$$

$$\beta''+(v-u)\beta+2\alpha'=0. \tag{3.5}$$

С точки зрения мультипликативного интеграла имеем следующее калибровочное преобразование T:

$$\overset{\frown}{\int} E+A(x)dx \xrightarrow{T} \overset{\frown}{\int} E+B(x)dx,$$

где $A=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -u & 0\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -v & 0\end{pmatrix}$, $T'=BT-TA$, $T=\begin{pmatrix}\alpha & \beta\\ \alpha'-u\beta & \alpha+\beta'\end{pmatrix}$.

Важную часть этих преобразований (3.2) занимает случай, когда уравнение (3.1) преобразуется в себя. При этом имеем $T'=AT-TA$ или $T'=Ad_T(A)$, где Ad_TA – присоединенное представление алгебры Ли типа A_1. С другой стороны, присоединенное представление алгебры Ли типа A_1 задается схемой Дынкина со старшим весом $\overset{2}{\circ}$.

Выясним, каким образом связаны между собой эти представления? Чтобы решить эту задачу, выразим функцию β из соотношений (3.4) и (3.5). Тогда получим известное соотношение

$$\beta'''+4u\beta'+2u'\beta=0, \tag{3.6}$$

из которого следует, что решения уравнения (3.6) можно записать в виде квадратичной формы $\beta=c_1y_1^2+c_2y_1y_2+cy_2^2$, где y_1 и y_2 – линейно независимые решения уравнения (3.1). При этом подынтегральные матричные функции связаны между собой представлением алгебры Ли типа A_1 со старшим весом $\Phi=\overset{2}{\circ}$:

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -u & 0\end{pmatrix} \xrightarrow{\Phi} \begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ -u & 0 & 2\\ 0 & -u & 0\end{pmatrix}.$$

При обычном подходе это обстоятельство остается неупомянутым. Матрица калибровочного преобразования T принимает вид:

$$T=\begin{pmatrix}\frac{1}{2}(c-\beta) & \beta\\ -\frac{1}{2}\beta''-u\beta & \frac{1}{2}(c+\beta)\end{pmatrix}.$$

Интересно распространить эту задачу на случай алгебры Ли типа A_n. При этом имеем присоединенное представление $Ad_T(A)$ алгебры Ли типа A_n и, с другой стороны, присоединенное представление алгебры Ли типа A_n, заданной схемой Дынкина со старшим весом $\overset{1}{\circ}-\circ-\cdots-\circ-\overset{1}{\circ}$.

2. Рассмотрим линейное дифференциальное уравнение второго порядка

$$y''+u(x)y=0,$$

где функция $u(x)\in C(R)$.

Известно (см., например, [4, С. 78]), что преобразованием Куммера-Лиувилля

$$y=v(x)z,\ dt=u(x)dx \tag{3.7}$$

уравнение (3.1) можно привести к виду

$$z'' + w(x)z = 0\,. \tag{3.8}$$

Функции $u(x)$, $t(x)$, $v(x)$ называются соответственно амплитудой, параметризацией и ядром преобразования (3.7).

Дифференциальное уравнение Ермакова-Пинни возникает как условие на амплитуду преобразования (3.7):

$$v'' + u(x)v = Kv^{-3},\ K = const\,. \tag{3.9}$$

Условия на параметризацию и ядро также известны. Уравнение Ермакова-Пинни (3.9) имеет решение в вида

$$v^2 = Ay_1^2 + 2Cy_1y_2 + By_2^2\,, \tag{3.10}$$

где y_1 и y_2 – линейно независимые решения уравнения (3.1).

Это обстоятельство позволяет описать уравнение Ермакова-Пинни с точки зрения мультипликативного интеграла и теории представлений групп и алгебр Ли.

Имеем следующее калибровочное преобразование T :

$$\overset{\frown}{\int} E + A(x)dx \xrightarrow{T} \overset{\frown}{\int} E + B(t)dt\,,$$

где $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -u & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -w & 0 \end{pmatrix}$, $T' = BT - TA$, $T = \begin{pmatrix} v & 0 \\ v' & v \end{pmatrix}$, $dt = u(x)dx$.

Как следует из равенства (3.10), в преобразовании (3.7) участвует представление алгебры Ли типа A_1 со старшим весом $\overset{2}{\circ}$.

Интересно распространить задачу обобщения уравнения Ермакова-Пинни на случай представления алгебры Ли типа A_1 со старшим весом $\overset{k}{\circ}$, $k \in N$.

Литература

1. *Паланджянц Л.Ж.* Геометрия мультипликативного интеграла. − Майкоп. МП «Качество», 1997. − 94 с.

2. *Козлов В.А., Паланджянц Л.Ж.* Развитие теории мультипликативного интегрирования полиномиальных матричных функций. – Майкоп: ИП Магарин О.Г., 2010. – 109с.

3. *Паланджянц Л.Ж., Куижева С.К., Шевякова О.П.* О дробных степенях дифференциальных операторов. //Труды Физического общества Республики Адыгея, 1997, № 2, с. 35–40.

4. *Беркович Л.М.* Факторизация и преобразования дифференциальных уравнений. Методы и приложения. – Москва: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2002. – 464 с.

SOME APPLICATIONS OF THE THEORY MULTIPLICATIVE INTEGRAL AND GROUP REPRESENTATION THEORY AND LIE ALGEBRAS OF TYPE A_1

V.A. Kozlov, L.Zh. Palandzhyants

The problem of the connection between the representations of Lie algebras A_1 and fractional powers of the Sturm-Liouville problem is considered. The connection between the transformation of linear differential equations and representations of Lie algebras is determined.

