Послесловие

Не может быть сомнений в том, что учащиеся при изучении математики должны не только обогащать свою память обоснованным справочным материалом, но и также должны успешно приобретать опыт применения усвоенных знаний к решению задач.

Знания, творчески усвоенные с акцентом практической их направленности, будем называть активными знаниями. Активные знания наиболее результативно приобретаются учащимися только в ходе применения учителем активных методов преподавания. Одним из таких методов является вопросно-ответная беседа с элементами проблематики и краткими исследовательскими экскурсами.

Методическое кредо «Беседы» (так будем кратко называть этот метод) – прийти к эффективному раскрытию темы урока на основе удачных ответов на вопросы учителя, требующих проявления как репродуктивной, так и творческой активности учащихся. Систематическое применение метода «Беседы» ведет к углубленному усвоению математических закономерностей, что открывает возможности учителю постепенно предлагать для решения более трудные, нестандартные задачи. В пользу этого метода свидетельствует исторически достоверный факт: с помощью оживленной диалогической системы «наводящих вопросов», то есть «Беседы», ее основоположник античный мудрец Сократ воспитал целую плеяду ярких мыслителей, в том числе и автора знаменитой «Атлантиды» известного философа древности Платона.

Урок, посвященный решению нестандартной задачи, несколько смахивает на телевизионную передачу «Что? Где? Когда?». В самом деле, группа интеллектуалов (команда знатоков), получив задание, бьется над распутыванием причинно-следственных связей, изложенных в этом задании. При этом почти все члены команды вслух, перебивая друг друга (подгоняет время – 1 мин.), высказывают свои версии (догадки) и одновременно слушают, что говорят другие члены команды. Стоит тихий шум – это вполне приемлемая, рабочая атмосфера.

Учитель вместе с классом, отыскивая решение трудной математической задачи, не может позволить учащимся спонтанно высказывать свои соображения по поводу решения задачи. Он поступает более цивилизованно (методически целесообразно): спрашивает тех, кто поднимает руку. Ответ ученика комментирует. Задавая второй вопрос, поступает аналогично и т.д., постепенно шаг за шагом приближаясь к идее решения или к полному решению задачи. Что роднит учащихся и интеллектуалов в этом процессе? Их роднит напряженный творческий поиск, их роднит предельное умственное напряжение каждого. И этот процесс является увлекательным для учащихся и интеллектуалов.

В «Методическом пособии» (так кратко будем называть данную книгу) дана психолого-дидактическая парадигма применения «Беседы« к решению поставленных задач на примерах раскрытия некоторых тем школьного курса математики. Всего освещено четырнадцать вопросов. Этого вполне достаточно, чтобы усвоить суть метода. Творчески с целью оптимальной отдачи деформируя метод «Беседы», очевидно, можно практиковать его и в классах с невысоким математическим развитием, и в классах с дисциплиной не совсем благоприятной для изучения математики. Особенно этот метод эффективен в классах, в которых число недельных часов математики не превышает четырех часов, в так называемых непрофильных классах.

Домашние задания в данной работе составлены с учетом требований инновационного обучения. На их выполнение, естественно, требуется больше времени, чем рекомендуется методикой. Поэтому сдавать учителю тетради с домашним заданием можно не всем сразу, а постепенно, в течение недели.

Никто кроме учителя не может результативно помочь ученику усвоить методы решения нестандартных задач: ни родители, ни репетиторы, ни любой другой человек с алгоритмическими знаниями. Так как для этого, во-первых, необходимо значительное время, во-вторых, необходим высокий уровень подготовки «помощника«. Научить или хотя бы показать, как отыскивать решения сложных задач, может только учитель в классе, из урока в урок, постепенно, развивая одновременно репродуктивную и творческую активность учащихся, вырабатывая у них активные знания. Это дидактическая догма. Учитель, убедив учащихся проявлять умственные усилия при решении конкретных нестандартных задач и упражнений, рассматривать многовариантные пути поиска правильного их решения, должен поставить перед каждым задачу – выработать свой «почерк» в мыслительном процессе отыскания способов решения математической задачи на основе специфических особенностей склада своего ума.

С этой целью учитель предлагает ученикам решить в течение недели не менее семи задач из определенного набора заданий. Учащиеся могут сдавать на проверку свои решения раньше, но не позже установленного срока. Кроме специально подобранных учителем задач, развитию творческих способностей учащихся способствует решение психологических тестов, опубликованных в книге Г. Ю. Айзенка «Проверь свои способности« (изд. «Мир», Москва, 1972 г.). Решение заданий тестов способствует развитию универсальных возможностей интеллекта выполнять самые разные, не связанные одной идеей, задания, что также ориентирует задатки ума на проявление творчества, т.е. косвенно влияет на развитие математического мышления. Поэтому учитель может посоветовать учащимся в качестве активного отдыха на каникулах заняться тестами Г.Ю. Айзенка чтобы «не разучиться думать».

Есть, конечно, ученики с выдающимися математическими способностями по многочисленным «решебникам», которые самостоятельно штурмуют математические бастионы школьной математики. Тем не менее, в силу информационной насыщенности современной жизни обычный российский школьник достаточно развит, требователен и чутко реагирует на все нюансы педагогического процесса. Поэтому для эффективной организации процесса обучения учителю математики необходимо применять технические средства: кодоскоп, кинопроектор и др. А это требует преподавания математики в специальном математическом кабинете, удовлетворяющем требованиям современной методики, дидактики, духу науки математики и, конечно же, эстетики.

Само собой разумеется, что хозяин такого кабинета обязан держать в своей голове некоторые замечательные математические формулы, замечательные равенства, неравенства из разделов математики, граничащих со школьной программой, например:

1. Если $x^3 + px + q = 0$, то $x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$;

2. $\sqrt{A \pm \sqrt{B}} = \sqrt{\frac{A + \sqrt{A^2 - B}}{2}} \pm \sqrt{\frac{A - \sqrt{A^2 - B}}{2}}$;

3. $a_{n+1} = a_n + a_{n-1}$; $a_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right\}$;

4. $n! \approx \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$;

5. $d^2 = R^2 - 2Rr$;

6. $\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \ldots$;

7. $e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \ldots$;

8. $e^{\pi i} = -1$;

9. $e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi$;

10. $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \le \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \le \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, где $a_i > 0\ (i = 1, 2, \ldots n)$.

Находясь под постоянным «математическим« прицелом десятков любопытных, озорных, неусидчивых школьников, учитель должен быть в курсе всех событий и не только математических, но и вообще научных, использовать в процессе обучения астрономические и физические знания, помнить квадраты двузначных чисел, хотя бы до 30, владеть приемами сокращенных устных вычислений, знать алгоритм извлечения квадратного корня из действительных чисел, и, вообще, должен знать, знать, …, уметь, уметь,…

В учебной и методической литературе недостаточно уделено внимание числовым неравенствам (их обоснованию), мало тренировочных упражнений, особенно, на неравенства с обыкновенными дробями.

Ниже приводится раскрытие этого ощутимого пробела методом «Беседы».

Неравенства обыкновенных дробей

Дроби – это числа, поэтому свойства числовых неравенств являются свойствами дробных неравенств. Тем не менее, имеются некоторые специфические особенности решения примеров на неравенства, которые присущи обыкновенным дробям.

1.Пропедевтика

Определение неравенства.

Ответ. Отношение, связывающее два выражения (или числа) с помощью одного из знаков: $<, \le, >, \ge, \ne$.

Уточните значение символа «не равно» ($\ne$) .

Ответ. Если $a \ne b$, то это может быть $a < b$ или $a > b$.

У неравенства чаще всего две части: левая часть – ЛЧ и правая часть – ПЧ.

Есть ли неравенства, у которых три части?

Ответ. Да, есть. Такие неравенства называют двойными, например,

$$a < c < b;\ a \le c \le b.$$

Как читается последнее неравенство?

Ответ. Неравенство $a \le c \le b$ читается так: «c не меньше a, но не больше b».

Определения «равно», «больше», «меньше».

Ответ. a называется равным b, т.е. $a = b$, если $a - b = 0$. И, наоборот, если $a - b = 0$, то $a = b$.

a называется большим b, т.е. $a > b$, если $a - b > 0$. И, наоборот, если $a - b > 0$, то $a > b$.

a называется меньшим b, т.е. $a < b$, если $a - b < 0$. И, наоборот, если $a - b < 0$, то $a < b$.

Эти определения часто применяются при доказательстве и решении неравенств.

Рассмотрим равенство: $\underleftrightarrow{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

Это равенство применяется как «слева – направо», так и «справа – налево».

Дайте формулировку этому равенству.

Ответ. Степень частного двух чисел равна частному степеней делимого и делителя. Обратно: частное одинаковых степеней двух чисел равно той же степени частного этих чисел.

Аналогично для равенства: $\underleftrightarrow{(abc)^n = a^n b^n c^n}$

Будем иметь: степень произведения нескольких чисел равна произведению степеней этих чисел с тем же показателем.

Обратно: произведение степеней нескольких чисел с одним и тем же показателем равно степени произведения этих же чисел с тем же показателем.

Основное свойство дроби.

Ответ. Величина дроби не изменится, если ее числитель и знаменатель умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю.

Сформулируйте свойство числового неравенства, если математическая запись этого свойства такова, если $a > b$ и $m > 0$, то $am > bm$ и $\frac{a}{m} > \frac{b}{m}$.

Ответ. Обе части неравенства можно умножить или разделить на положительное число, при этом знак исходного неравенства сохраняется.

Поиск решений примеров на неравенства обыкновенных дробей

Установите знак неравенства $\frac{12}{17} \neq \frac{15}{19}$.

Ответ. Надо компоненты первой дроби умножить на 5, а второй на 4, тогда получим: $\frac{60}{85} \neq \frac{60}{76}$, откуда следует $\frac{60}{85} < \frac{60}{76}$. Т.к. при равенстве числителей та дробь меньше, знаменатель которой больше, то $\frac{12}{17} < \frac{15}{19}$.

Установите знак неравенства $\frac{43}{45} \neq \frac{29}{30}$.

Ответ. Надо компоненты первой дроби умножить на 2, а второй на 3, тогда получим: $\frac{86}{90} \neq \frac{87}{90}$, откуда $\frac{86}{90} < \frac{87}{90}$, т.е. при равенстве знаменателей та дробь меньше, числитель которой меньше, следовательно $\frac{43}{45} < \frac{29}{30}$.

Какая дробь больше: $\frac{23}{45}$ или $\frac{18}{37}$? Какова особенность этих дробей?

Ответ. Удвоенные числители этих дробей на единицу разнятся со своими знаменателями.

Как будем поступать в связи с этим?

Ответ. Надо ЛЧ и ПЧ неравенства $\frac{23}{45} \neq \frac{18}{37}$ умножить на 2, а потом сравнить с единицей каждую полученную дробь. Будем иметь: $\frac{46}{45} \neq \frac{36}{37}$, $\frac{46}{45} > 1; \frac{36}{37} < 1$, или $\frac{46}{45} > 1 > \frac{36}{37}$,откуда по свойству транзитивности $\frac{46}{45} > \frac{36}{37}$, тогда $\frac{23}{45} > \frac{18}{37}$.

Сравните дроби $\left(\frac{7}{11}\right)^2 \neq \left(\frac{7}{11}\right)^3$.

Что можно сказать о разных степенях одной и той же правильной положительной дроби?

Ответ. Из двух степеней одной и той же правильной положительной дроби та больше, показатель которой меньше, значит: $\left(\frac{7}{11}\right)^2 > \left(\frac{7}{11}\right)^3$.

Надо обосновать.

Ответ. Рассмотрим функцию $f(x) = \left(\frac{7}{11}\right)^x$. Эта функция монотонно убывающая: меньшему значению аргумента (показатель степени) соответствует большее значение функции, поэтому $\left(\frac{7}{11}\right)^2 > \left(\frac{7}{11}\right)^3$.

Имеем неравенство $\left(\frac{5}{3}\right)^4 \neq \left(\frac{5}{3}\right)^3$. Конкретизировать знак «≠» (не равно).

Ответ. Из двух степеней одного и того же числа, большего единицы, та степень больше, у которой показатель степени больше, т.е. $\left(\frac{5}{3}\right)^4 \neq \left(\frac{5}{3}\right)^3$ (1)

Почему?

Ответ. Функция $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ – монотонно возрастающая. Это означает, что большему значению аргумента (показатель степени) соответствует и большее значение функции, поэтому (1) является ответом.

Кто докажет, что $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ – монотонно возрастающая функция?

Ответ. Я могу доказать только с помощью производной.

$$f'(x) = \left(\left(\frac{5}{3}\right)^x\right)' = \left(\frac{5}{3}\right)^x \cdot \ln\frac{5}{3} > 0 \text{ , т.к. } \left(\frac{5}{3}\right)^x > 0$$

при любом действительном x, $\ln\frac{5}{3} > 0$, т.к. $\frac{5}{3} > 1$.

Итак, $f'(x) > 0$, значит $f(x)$ – монотонно возрастающая функция, график $f(x) = \left(\frac{5}{3}\right)^x$ – гладкая кривая, поднимающаяся вверх с ростом значений x.

Какая из дробей меньше $\frac{31}{36}$ или $\frac{22}{27}$?

Ответ. Этот пример нетрудный.

Т.к. $\frac{93}{108} \neq \frac{88}{108}$, то $\frac{88}{108} < \frac{93}{108} \Rightarrow \frac{22}{27} < \frac{31}{36}$.

Кто предложит другой способ?

Ответ. Дробь $\frac{22}{27}$ дальше от 1, чем $\frac{31}{36}$, т.к. $\frac{5}{27} > \frac{5}{36}$, поэтому $\frac{22}{27} < \frac{31}{36}$.

Кто предложит третий способ?
Ответ. Надо обе части неравенства умножить на 108, тогда получаем

$$108 \cdot \frac{22}{27} \neq 108 \cdot \frac{31}{36}, \quad 88 \neq 93, \; 88 < 93. \qquad (1)$$

Умножим обе части (1) на $\frac{1}{108}$, получим $\frac{22}{27} < \frac{31}{36}$.

Кто предложит еще один способ решения?
Ответ. Установим знак разности между ЛЧ и ПЧ:

$$\frac{31}{36} - \frac{22}{27} = \frac{93-88}{108} = \frac{5}{108} > 0 \text{ , т.к.} \frac{31}{36} - \frac{22}{27} > 0, \text{ то } \frac{31}{36} > \frac{22}{27}.$$

Установить знак неравенства $\frac{11 \cdot 115}{56 \cdot 163} \neq \frac{13 \cdot 23}{32 \cdot 64}$.

Кто предложит алгоритм решения этого примера?

Ответ. Надо установить знак неравенства у дробей $\frac{11}{56} \neq \frac{13}{64}$ и $\frac{115}{163} \neq \frac{23}{32}$ затем перемножить (почленно) дроби одинакового смысла с положительными частями. Итак,

$\frac{11}{56} \neq \frac{13}{64}$, $\quad \frac{55}{56} \neq \frac{65}{64}$,

$\frac{55}{56} < \frac{65}{64}$, т.к. $\frac{55}{56} < 1$, $\frac{65}{64} > 1$, т.е.

$\frac{65}{64} > 1 > \frac{55}{56}$, тогда по свойству транзитивности

$\frac{65}{64} > \frac{55}{56}$ или $\frac{11}{56} < \frac{13}{64}$. $\qquad$ (2)

$$\frac{115}{163} \neq \frac{23}{32}, \quad \frac{115}{163} \neq \frac{115}{160},$$

$$\frac{115}{163} < \frac{115}{160},$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{115}{163} < \frac{23}{32}. \qquad (3)$$

Кто выполнит заключительное равносильное преобразование?
Ответ. Неравенства (2) и (3) одинакового смысла с положительными частями, поэтому их можно почленно перемножить, получим неравенство того же смысла, т.е. $\frac{11 \cdot 115}{56 \cdot 163} < \frac{13 \cdot 23}{32 \cdot 64}$, что и требовалось установить.

Установите знак неравенства $\left(\frac{5}{7}\right)^2 \neq \left(\frac{7}{11}\right)^3$.

Кто выполнит математическое исследование структуры этого примера?
Ответ. Имеем две степени разных правильных положительных дробей. Показатели степеней разные числа.
Имеем также:

$$\left(\frac{5}{7}\right)^2 < \frac{5}{7}, \qquad (4)$$

$$\left(\frac{7}{11}\right)^3 < \frac{7}{11}. \qquad (5)$$

Из (4) и (5) следует, что ЛЧ этих неравенств не поддаются сравнению. Надо искать новые пути сравнения предложенных степеней двух правильных дробей.
Кто результативно осуществит этот поиск?
Ответ. Можно мне?
Пожалуйста.
Разделим обе части исходного неравенства на $\left(\frac{7}{11}\right)^2$, получим $\left(\frac{5}{7} \cdot \frac{11}{7}\right)^2 \neq \left(\frac{7}{11}\right)$, $\left(\frac{55}{49}\right)^2 \neq \left(\frac{7}{11}\right)$, $\left(\frac{55}{49}\right)^2 > 1$, т.к. $\frac{55}{49} > 1$; $\frac{7}{11} < 1$, поэтому $\left(\frac{55}{49}\right)^2 > \left(\frac{7}{11}\right)$.

Умножим обе части полученного неравенства на $\left(\frac{7}{11}\right)^2$, получим $\left(\frac{55}{49} \cdot \frac{7}{11}\right)^2 > \frac{7}{11} \cdot \left(\frac{7}{11}\right)^2$, $\left(\frac{5}{7}\right)^2 > \left(\frac{7}{11}\right)^3$.

Домашнее задание:

Подготовиться к «Обзору» свойств числовых неравенств:

1) формулировка свойств числовых неравенств «слева направо« и «справа налево», их математическая запись;

2) доказательство необратимости, транзитивности и монотонности;

3) неравенства, содержащие модуль;

4) неравенство (двойное) о средних величинах.

Каждому ученику выдается карточка с записями свойств числовых неравенств. По этим карточкам каждый ученик тщательно готовится дома.

Завершается учебный год, согласно идее инновационного обучения и психолого-педагогическим установкам, на «высокой учебной ноте». А именно, после повторения программного материала и контрольной работы в духе ЕГЭ учащимся рекомендуется принять участие в «Конкурсе математической эрудиции и смекалки». Карточки с задачами «Конкурса» размножаются на ксероксе. По ним учащиеся готовятся дома. Решения и ответы оформляют письменно на развернутом листе школьной тетради. На следующий день, после получения задания, сдают учителю.

На занятии, посвященном окончанию учебного года, учитель поощряет отличников по математике и призеров «Конкурса». Результаты «Конкурса» вывешиваются в кабинете математики. Примерная карточка с вопросами «Конкурса» прилагается к тексту данного «Пособия«. Прилагаются также тексты примерных «Обзоров», а также указания и ответы к ним.

Обзор свойств числовых неравенств. Замечательные неравенства

1. $a = b \Leftrightarrow a - b = 0$;

2. $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$;

3. $a < b \Leftrightarrow a - b < 0$;

4. Необратимость неравенства $a > b \Leftrightarrow b < a$;

5. Транзитивность неравенства $a > b > c \Rightarrow a > c$;

6. Монотонность неравенства $a > b$ и m – любое действительное число, тогда $a + m > b + m$;

7. $a > b + m$, и m – любое действительное число, тогда $a - m > b$;

8. $a > b$, и $c > d$, тогда $a + c > b + d$;

9. $a > b$, и $c < d$, тогда $a - c > b - d$;

10. $a > b$, и $m > 0$, тогда $a \cdot m > b \cdot m$;

11. $a > b$, и $m < 0$, тогда $a \cdot m < b \cdot m$;

12. $\begin{matrix} a > b > 0, \\ c > d > 0. \end{matrix} \quad \Rightarrow \quad a \cdot c > b \cdot d$;

13. $a > b > 0$, и $n \in N$, тогда $a^n > b^n$ и $\sqrt[n]{a} > \sqrt[n]{b}$;

14. $a > b > 0 \Longleftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$;

15. $|a + b| \leq |a| + |b|$;

16. $|a - b| \geq |a| - |b|$;

17. $|x| \leq c \Longleftrightarrow -c \leq x \leq c$;

18. $|x| \geq c \Longleftrightarrow \left[\begin{matrix} x \geq c, \\ x \leq -c. \end{matrix}\right.$

19. $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots a_n} \leq \dfrac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$, где $a_i > 0\ (i = 1, 2, \ldots n)$.

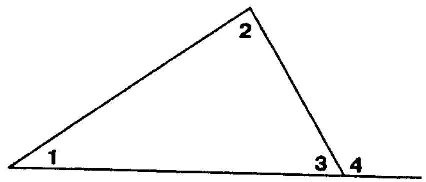
Приводим краткие решения задач, заданных на дом.

Тема «Сумма углов треугольника».

Следствия из теоремы о сумме углов треугольника.

Следствие 1. Любой внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

Доказательство:



$\angle 4 + \angle 3 = 180°$ (сумма двух смежных углов).

$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 180°$,

ПЧ этих равенств равны, поэтому равны и ЛЧ:

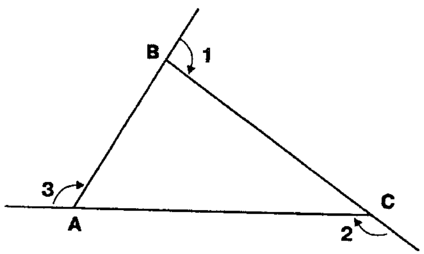
$\angle 4 + \angle 3 = \angle 1 + \angle 2 + \angle 3$,

$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$, ч.т.д.

Следствие 2. В треугольнике может быть только один прямой угол. Если допустить, что в треугольнике могут быть два и более прямых угла, тогда сумма всех углов треугольника будет больше 180°, что невозможно. Противоречие.

Следствие 3. В треугольнике может быть только один тупой угол. Доказывается это следствие также как и следствие 2.

Теорема. Сумма внешних углов треугольника равна 360°. Новый способ доказательства.



Повернем AB на $\angle 1$ по ходу часовой стрелки около (•)B.

Тогда AB займет положение BC. Затем, $BC \equiv AB$ около точки C повернем на $\angle 2$. Тогда $BC \equiv AB$ займет положение CA.

Наконец, $CA \equiv BC \equiv AB$ повернем около вершины A на $\angle 3$. Тогда AB займет свое первоначальное положение. Сумма углов вращения (поворотов), равная сумме внешних углов треугольника, равна 360°, т.к. прямая AB совершила полный оборот на угол, равный сумме всех его внешних углов, ч.т.д.

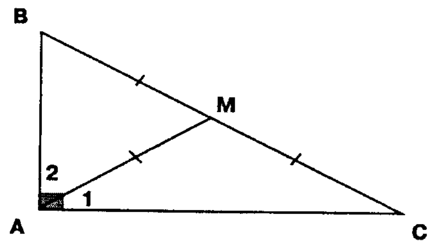
Традиционный способ.

$$+\begin{cases}\angle A + \angle 3 = 180°;\\ \angle B + \angle 1 = 180°;\\ \angle C + \angle 2 = 180°;\end{cases}$$

$$(\angle A + \angle B + \angle C) + (\angle 1 + \angle 2 + \angle 3) = 540°;$$
$$180° + \angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 540°;$$
$$\angle 1 + \angle 2 + \angle 3 = 360° \quad \text{ч.т.д.}$$

№ 231. (стр. 68, «Геометрия 7–9», Атанасян Л. С. и др.).

Медиана AM $\triangle ABC$ равна $\frac{1}{2}$ BC. Докажите что $\triangle ABC$ – прямоугольный.



Т.к. $AM = MB = MC$, то треугольники AMB и AMC – равнобедренные.

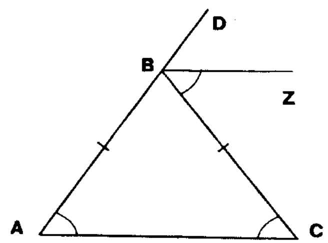
$$+\begin{cases}\angle 1 = \angle C;\\ \angle 2 = \angle B.\end{cases}$$

$\angle 1 + \angle 2 = \angle B + \angle C = 180° - \angle A$; $\angle 1 + \angle 2 = 180° - \angle A$, но $\angle 1 + \angle 2 = \angle A$, тогда $\angle A + \angle A = 180°$, $2\angle A = 180°$, $\angle A = 90°$, ч.т.д.

Примечание редактора к задаче № 231. Можно доказать и так. Точки A, B, C равноудалены от точки M, следовательно, лежат на окружности с центром в точке M и радиусом AM. $\angle A$ – вписанный угол, опирающийся на диаметр BC окружности. Поэтому $\angle A = 90°$.

№ 233.

Докажите, что биссектриса внешнего угла при вершине равнобедренного треугольника, параллельна основанию этого треугольника, т.е. $BZ \parallel AC$.



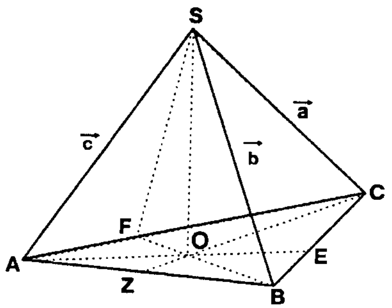
$\angle DBC = \angle A + \angle C = 2\angle C$, т.к. $\angle C = \angle A$.

$\angle ZBC = \frac{1}{2} \angle DBC$, BZ – биссектриса $\angle DBC$.

Но $\angle ZBC = \angle C$, как накрест лежащие углы, поэтому $BZ \| AC$, ч.т.д.

К задаче № 1.

1. Высота треугольной пирамиды, у которой плоские углы при вершине прямые, проектируется в ортоцентр основания. Докажите двумя способами: традиционным и методом векторов.



Дано:
$SABC$ – треугольная пирамида, у которой $\angle ASC = \angle ASB = \angle BSC = 90°$;
$SO \perp (ABC)$

Доказать, что $(\bullet)O$ – ортоцентр ΔABC.

Доказательство:

Проводим прямую AE через точку O.

Т.к. $AS \perp SB$ и $AS \perp SC$, то $AS \perp (BSC)$, тогда $BC \perp AS$ и $BC \perp SO$, значит $BC \perp (ASE)$, но $AE \subset ASE$, тогда $BC \perp AE$, следовательно, AE – высота ΔABC.

Аналогично докажем, что CZ – тоже высота ΔABC. Точка O – основание высоты пирамиды лежит на двух пересекающихся высотах ΔABC, значит $(\bullet)O$ совпадает с точкой их пересечения, ч.т.д.

Доказательство с помощью векторов.

Пусть $\overrightarrow{SA} = \vec{c}$; $\overrightarrow{SC} = \vec{a}$; $\overrightarrow{SB} = \vec{b}$, тогда $\overrightarrow{AC} = \vec{a} - \vec{c}$.

Находим $\overrightarrow{AC} \cdot \overrightarrow{SB} = (\vec{a} - \vec{c}) \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 - 0 = 0$, тогда $\overrightarrow{AC} \perp \overrightarrow{SB}$ следовательно, $BF \perp AC$ по теореме о трех перпендикулярах.

Аналогично доказываем, что CZ – тоже высота и т.д., ч.т.д.

2. Докажите, что любое натуральное число

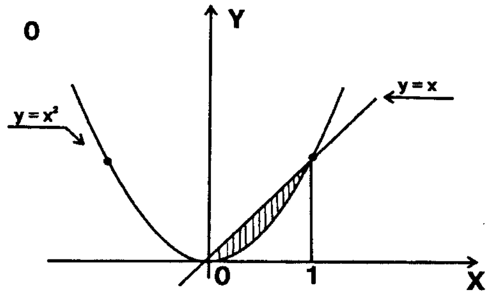
$$n = -\ln \ln \underbrace{\sqrt[e]{\sqrt[e]{\ldots \sqrt[e]{e}}}}_{n}$$

Доказательство:

$$-\ln \ln \underbrace{\sqrt[e]{\sqrt[e]{\ldots \sqrt[e]{e}}}}_{n} = -\ln \ln e^{\frac{1}{e^n}} = -\ln\left(\frac{1}{e^n} \cdot \ln e\right) = -\ln\left(\frac{1}{e^n} \cdot 1\right) = -(\ln 1 - \ln e^n) = \ln e^n = n, \text{ ч.т.д}$$

3. Параболический сегмент – фигура, ограниченная прямой, пересекающей параболу и параболической дугой, ограниченной точками пересечения прямой и параболы.

Возьмем простейший случай: $y = x$; $y = x^2$.



$$S_{пс} = \int_0^1 (x - x^2)dx = \left(\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6} \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: $\frac{1}{6}$ кв. ед.

К задаче № 2.

1. Решите в натуральных числах систему уравнений:

$$\begin{cases} x + yz = 19, \\ x + y + z = 14, \end{cases} \text{ где } y < z$$

Решение

$$\begin{cases} x + y + z = 14, \\ x = 19 - yz \Rightarrow 19 - yz + y + z = 14 \iff -yz + y + z = -5 \iff \end{cases}$$

$$\iff yz - y - z = 5 \iff y(z-1) - z + 1 = 6;$$

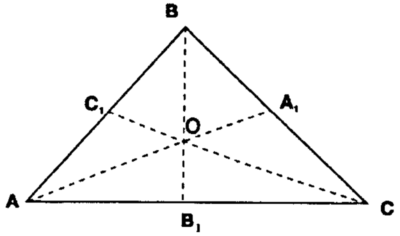
$$y(z-1) - (z-1) = 6 \iff (z-1)(y-1) = 6 = 1 \cdot 6 = 2 \cdot 3 \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y - 1 = 1; \\ z - 1 = 6, \end{cases} \\ \begin{cases} y - 1 = 2, \\ z - 1 = 3. \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} y = 2; \\ z = 7, \end{cases} \\ \begin{cases} y = 3, \\ z = 4. \end{cases} \end{array}\right.$$

Имеем: $x + y + z = 14$; $x + 2 + 7 = 14$; $x + 3 + 4 = 14$, $x_1 = 5$, $x_2 = 7$.

Ответ. $\{(5;2;7),(7;3;4)\}$.

2. В треугольнике проведены три медианы. Образовалось шесть равновеликих треугольников.
Докажите.



$$S_{AOB_1} = \frac{1}{2}S_{AOC} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}S_{ABC}\right) = \frac{1}{6}S_{ABC}.$$

Т.к. площадь треугольника, взятого наугад, оказалась $\frac{1}{6}S_{ABC}$, то площадь каждого из оставшихся треугольников равна $\frac{1}{6}S_{ABC}$, т.е. все шесть треугольников равновелики, ч.т.д.

3. Решите систему уравнений:

$$\begin{cases}\sqrt{(x+3)^2} = x+3,\\ \sqrt{(x-3)^2} = 3-x.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}|x+3| = x+3,\\ |x-3| = 3-x.\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x+3 \ge 0\\ x-3 \le 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x \ge -3\\ x \le 3\end{cases} \Leftrightarrow -3 \le x \le 3.$$

Ответ: [–3; 3].

4. Найти $max(ab)$, если $a + 2b = 1$ (1), где $a \ne b \ne 0$.
Умножив обе части (1) на $b \ne 0$, получим: $ab + 2b^2 = b$, т.к. $b \ne 0$.

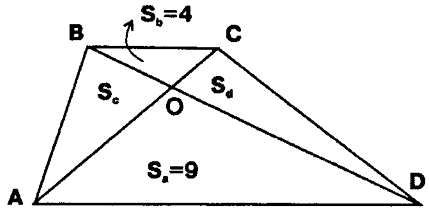
$$ab = -2b^2 + b = -2(b^2 - \frac{1}{2}b) = -2(b^2 - 2\cdot\frac{1}{4}b + \frac{1}{16} - \frac{1}{16}) = -2((b-\frac{1}{4})^2 - \frac{1}{16}) =$$
$$= -2(b-\frac{1}{4})^2 + \frac{1}{8}.$$

Т.к. $-2(b-\frac{1}{4})^2 \le 0$, то $\max(ab) = \frac{1}{8}$.

Ответ. $\max(ab) = \frac{1}{8}$.

5. Трапеция разделена диагоналями на четыре треугольника.
Чему равна площадь трапеции, если площади треугольников, прилежащих к ее основаниям равны 4 и 9.

Решение



$$\frac{S_a}{S_c} = \frac{DO^2}{BO^2}, \quad (1)$$

$$\frac{S_c}{S_b} = \frac{AO^2}{CO^2}. \quad (2)$$

Т.к. $\Delta BOC \sim \Delta AOD$, то $\frac{DO}{BO} = \frac{AO}{CO}$. (3)

Из (1) и (2) с учетом (3) имеем:

$$\frac{S_a}{S_c} = \frac{S_c}{S_b};\ S_c^2 = S_a \cdot S_b;\ S_c = \sqrt{S_a \cdot S_b};\ S_c = S_d,$$

$$S_{трап.} = S_a + S_b + S_c + S_d = S_a + S_b + 2\sqrt{S_a \cdot S_b} = \left(\sqrt{S_a} + \sqrt{S_b}\right)^2.$$

Ответ. $\left(\sqrt{9} + \sqrt{4}\right)^2 = (3+2)^2 = 25$ (кв. ед.).

К задаче №3.

1. Сколько нулей в конце числа 100!

В развернутом факториале числа: $100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 99 \cdot 100$; каждое второе делится на 2, а каждое пятое делится на 5. Количество чисел, делящихся на 5 определяют число нулей в конце числа 100!, т.к. пятерок меньше, чем двоек, а их произведение дает ноль, то надо сосчитать число пятерок.

$$\sum_{k=1}^{3}\left[\frac{100}{5^k}\right] = \left[\frac{100}{5}\right] + \left[\frac{100}{5^2}\right] + \left[\frac{100}{5^3}\right] + \ldots = 20 + 4 + 0 + \ldots = 24.$$

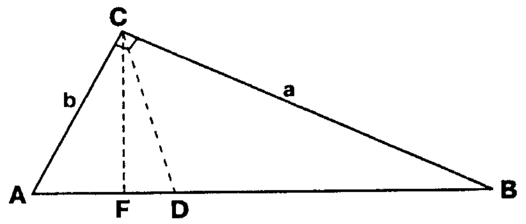
Ответ. 24.

2. Выделим из НР (натуральный ряд) множество k последовательных чисел. Докажем, что одно из этих чисел делится на k.

Пусть $M = \{n + 1, n + 2, ..., n + k\}$, n – любое натуральное число.

Числа из M при делении на k дают разные остатки: 0, 1, 2, ..., k-1. Действительно, если, например, $1 \le i < j \le k$ было бы $n + i = kt_1 + z$ и $n + j = kt_2 + z$, то $j - i = k(t_2 - t_1)$, т.е. $j - i$ делится на k, чего быть не может. Так как количество чисел в M и количество возможных остатков совпадают, то какое-то из M дает при делении на k остаток 0.

3. Биссектриса прямого угла треугольника делит противолежащую сторону в отношении 1:3. В каком отношении делит ее высота треугольника, проведенная из вершины прямого угла?



CD – биссектриса $\angle C$, тогда $\frac{AD}{DB} = \frac{1}{3}$, но $\frac{AD}{DB} = \frac{b}{a}$, поэтому $\frac{b}{a} = \frac{1}{3}$.

$b^2 = AB \cdot AF;$

$a^2 = AB \cdot FB;$ $\quad \frac{b^2}{a^2} = \frac{AF}{FB}; \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{AF}{FB}, \frac{AF}{FB} = \frac{1}{9};$

Ответ. $\frac{AF}{FB} = \frac{1}{9}$;

4. Решите неравенство:

$||||31x - 147| + 157| - 167| + 77| \le 93,$

$|||31x - 147| + 157| - 167| \le 16,$ т.к. $|||31x - 147| + 157| - 167| \ge 0 \quad 77 > 0,$

$-16 \le ||31x - 147| + 157| - 167 \le 16,$ $\quad 151 \le ||31x - 147| + 157| \le 183,$

$151 \le |31x - 147| + 157 \le 183,$ $\quad -6 \le |31x - 147| \le 26,$

$|31x - 147| \le 26,$ $\quad -26 \le 31x - 147 \le 26,$

$121 \le 31x \le 173,$ $\quad \frac{121}{31} \le x \le \frac{173}{31};$

$3\frac{28}{31} \le x \le 5\frac{18}{31}.$

Ответ. $x \in \left[3\frac{28}{31}; 5\frac{18}{31}\right].$

5. Решите уравнение $x - \frac{1}{2}(\log_{21} 9 + \log_{21} 49) = 0$

Решение:

$x - \frac{1}{2}(\log_{21} 9 + \log_{21} 49) = 0,$ $\quad x - (\log_{21} 3 + \log_{21} 7) = 0,$

$x - \log_{21}(3 \cdot 7) = 0,$ $\quad x - \log_{21} 21 = 0,$

$x - 1 = 0,$

$x = 1.$

Ответ. 1.

К задаче № 4.

1. На стене висит портрет. Спросили N: «Чей портрет?». N ответил: «Отец висящего есть единственный сын отца говорящего». Отец висящего и сын говорящего – одно и тоже лицо.

Ответ. Сын N.

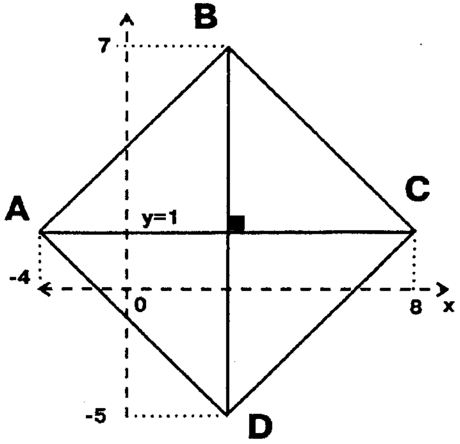
2. Новогодний гусь на 25% тяжелее утки. На сколько процентов утка легче гуся?

Имеем: $x = y + \frac{1}{4}y$, где x – вес гуся; y – вес утки.

$x = \frac{5}{4}y$, откуда $y = \frac{4}{5}x = 80\% \cdot x$, т.е. вес утки составляет только 80% веса гуся.

Ответ. На 20%.

3. Вычислить площадь фигуры, заданной неравенством: $|x - 2| + |y - 1| \le 6.$



Строим фигуру. Полагаем $|y-1|=0$, тогда $y=1$.
$y=1$ – это прямая, параллельная оси OX.
Если $|y-1|=0$, то $|x-2|\le 6$, откуда $-6\le x-2\le 6 \Rightarrow -4\le x\le 8$
Итак, если $y=1$, то $-4\le x\le 8$.
Теперь, пусть $|x-2|=0$, $x=2$ – это прямая, параллельная оси OY.

$$|y-1|\le 6 \Rightarrow -6\le y-1\le 6 \Rightarrow -5\le y\le 7.$$

Итак, если $x=2$, то $-5\le y\le 7$. Это квадрат. Его площадь равна

$$S_{ABCD}=\frac{1}{2}AC\cdot BD=\frac{1}{2}\cdot 12^2=\frac{1}{2}\cdot 144=72 \text{ (кв. ед.)}$$

Ответ: 72 кв. ед.

Обзор способов решений систем уравнений степени выше первой

1. $\begin{cases} x+y=5, \\ xy=4. \end{cases}$

2. $\begin{cases} x+y=2, \\ xy=-15. \end{cases}$

3. $\begin{cases} x^2+xy=2, \\ y-3x=7. \end{cases}$

4. $\begin{cases} 2x-y=10, \\ xy=12. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{x}=\dfrac{34}{15}, \\ x^2+y^2=34. \end{cases}$

6. $\begin{cases} x^2+xy=6, \\ x^2-xy=4. \end{cases}$

7. $\begin{cases} x^2+y^2=4, \\ xy=30. \end{cases}$

8. $\begin{cases} x^3+y^3=35, \\ x+y=5. \end{cases}$

9. $\begin{cases} x^2-5y^2=-1, \\ x^2+y^2=41. \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x^2-6xy+5y^2=29, \\ 7x^2-8xy+7y^2=43. \end{cases}$

11. $\begin{cases} x^3y+xy^3=300, \\ xy+x^2+y^2=37. \end{cases}$

12. $\begin{cases} (x+y)(8-x)=10, \\ (x+y)(5-y)=2. \end{cases}$

13. $\begin{cases} x^2-5y^2-3x-y+22=0, \\ (x-3)(y-2)=y^2-3y+2. \end{cases}$

14. $\begin{cases} x^2+y^2=41, \\ xy=20. \end{cases}$

15. $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{x}{y}}-\sqrt{\dfrac{y}{x}}=\dfrac{5}{6}, \\ x-y=5. \end{cases}$

16. $\begin{cases} x^4+y^4=32, \\ x^2+y^2=8. \end{cases}$

17. $\begin{cases} x^2-5y^2=-1, \\ 3xy+7y^2=1. \end{cases}$

18. $\begin{cases} x^2-3xy+y^2=-1, \\ 3x^2-xy+3y^2=13. \end{cases}$

19. $\begin{cases} \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}, \\ \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{y^2}=\dfrac{5}{4}. \end{cases}$

20. $\begin{cases} x^3-y^3=218, \\ x^2+xy+y^2=109. \end{cases}$

21. $\begin{cases} xy=2, \\ yz=6, \\ xz=3. \end{cases}$

22. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=5, \\ \sqrt{xy}=6. \end{cases}$

23. $\begin{cases} \sqrt{x}+\sqrt{y}=3, \\ xy=4. \end{cases}$

Ответы и указания к заданиям по теме «Обзор способов решений систем уравнений степени выше первой»

1. $\{(4;1),(1;4)\}$.

2. $\{(-3;5),(5;-3)\}$.

3. $\left\{\left(\frac{1}{4};7\frac{3}{4}\right),(-2;1)\right\}$.

4. $\{(6;2),(-1;-12)\}$.

5. $\{(\pm 5;\pm 3),(\pm 3;\pm 5)\}$.

6. $\left(\pm\sqrt{5};\pm\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$.

7. $\varnothing$

8. $\{(3;2),(2;3)\}$.

9. $\{(\sqrt{34};\pm\sqrt{7}),(-\sqrt{34};\pm\sqrt{7})\}$.

10. $\{(3;2),(-3;-2),(-2;-3),(2;3)\}$.

11. Указание

$$\begin{cases} x^3y+xy^3=300,\\ xy+x^2+y^2=37 \end{cases}\Rightarrow$$

$\Rightarrow t^2-37t+300=0,\ t=xy.$

12. $\left\{\left(7\frac{1}{6};4\frac{5}{6}\right),(-2;3)\right\}$.

13. Указание

$$\begin{cases} x^2-5y^2-3x-y+22=0,\\ (x-3)(y-2)=y^2-3y+2. \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^2-5y^2-3x-y+22=0,\\ (y-2)(x-y-2)=0. \end{cases}\text{ и т.д.}$$

14. $\{(\pm5;\pm4),(\pm4;\pm5)\}$.

15. $\{(9;4)\}$.

16. Указание

$$\begin{cases} x^4+y^4=32,\\ x^2+y^2=8. \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} x^4+2x^2y^2+y^4-2x^2y^2=32,\\ x^2+y^2=8. \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2=32+2x^2y^2,\\ x^2+y^2=8. \end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\begin{cases} 64=32+2x^2y^2,\\ x^2+y^2=8. \end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} 16=x^2y^2,\\ x^2+y^2=8. \end{cases}\text{ и т.д.}$$

17. $\left\{(\pm2;\pm1),\left(\pm\frac{1}{2};\pm\frac{1}{2}\right)\right\}$.

18. $\{(\pm2;\pm1),(\pm1;\pm2)\}$.

19. $\{(1;2),(2;1)\}$.

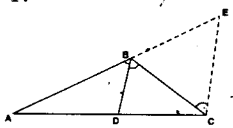
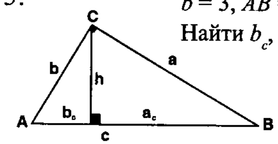
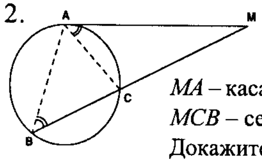
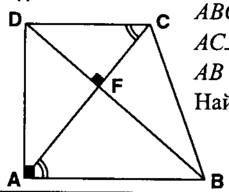
20. $\{(7;5),(-5;-7)\}$.

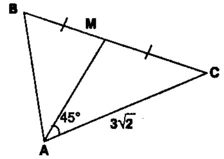
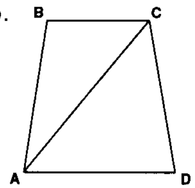
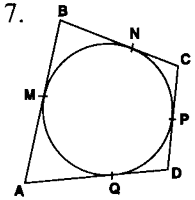
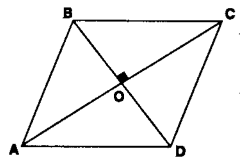
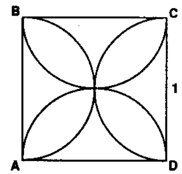
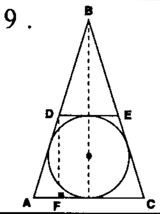
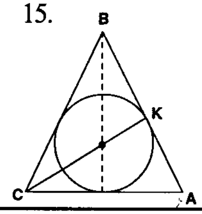
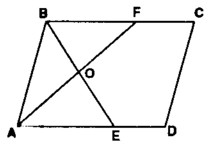
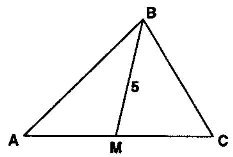
21. $\{(\pm1;\pm2;\pm3)\}$.

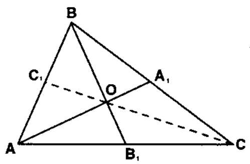
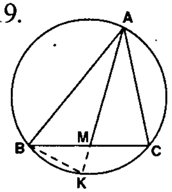
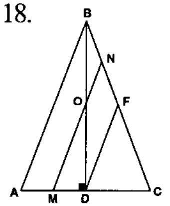
22. $\{(9;4),(4,9)\}$.

23. $\{(4;1),(1;4)\}$.

Обзор способов решения избранных задач планиметрии

1. p 135  BD - биссектриса. Докажите, что $\frac{AD}{DC}=\frac{AB}{BC}$.	3.  $b=3$, $AB=5$, $a=4$ Найти b_c, a_c, h.
2.  MA – касательная, MCB – секущая. Докажите, что $MA^2=MB\cdot MC$.	4.  $ABCD$ – трапеция, $AC\perp DB$, $\angle DAB=90°$, $AB=6$, $AD=4$. Найти DC.

5.  $BC=10$, $AC=3\sqrt{2}$, $\angle MAC=45°$, $MB=MC$ Найти S_{ABC}	11. Найти углы ромба, если его диагонали равны $2\sqrt{3}$ и 2.
6.  $ABCD$, $AD=8$, $AB=CD$, $AB=9$, $AC=11$, $\angle BCA=\angle CAD$ Найти BC.	12. Построить треугольник по серединам его сторон.
7.  Доказать, что $AB+CD=$ $=AD+BC$.	13. Треугольник, у которого P = 18 см, делится медианой на два треугольника с $P_1=14$ см и $P_2=16$ см. Вычислить длину медианы.
8.  $ABCD$ – ромб, $\angle DAB=60°$, $P_{ABCD}=24$. Найти $S_{ABCD.}$	14.  $ABCD$ – квадрат со стороной 1. Вычислить площадь всех лепестков розетки.
9 .  $AB=BC$, $DE=8$, $AC=18$, $DE\parallel AC$, $DF\perp AC$. Найти r.	15.  $AB=BC$, $BK=12$, $AK=6$. Вычислить P_{ABC} .
10.  $ABCD$ – параллелограмм, AF – биссектриса $\angle A$, BE – биссектриса $\angle B$. Доказать, что $\angle AOB=90°$.	16.  $AB=8$, $BM=5$, $S_{\Delta ABM}=10\sqrt{3}$, $AM=MC$, $AB>AM$. Вычислить AC.

17.  $BA_1 = A_1C$, $AB_1 = B_1C$, $S_{BOA} = 7$ кв.ед. Вычислить S_{ABC}.	19.  $BM = MC$, $AM = 18$, $MK = 8$, $BK = 10$. Вычислить AC.
18.  $AB = BC, AB = 4$, $BO = OD$, $MN \parallel AB$, $BD \perp AC$. Вычислить MN.	20. Высоты АН и BK ΔABC пересекаются в (•) М, находящейся внутри треугольника. $\angle AMB = 105°$. Вычислить $\angle$АВО, где (•) О – центр окружности, описанной около этого треугольника.

Ответы и указания к задачам «Обзора» по планиметрии

1. Строим $CE \parallel BD$, используем теорему Фалеса.
2. $\Delta MAC \sim \Delta MAB$, $\frac{MA}{MC} = \frac{MB}{MA}$.
3. $b^2 = AB \cdot b_c$; $9 = 5 \cdot b_c$; $b_c = \frac{9}{5}$; и т.д. $1\frac{4}{5}; 3\frac{1}{5}; 2\frac{2}{3}$.
4. $\Delta DFC \sim \Delta AFB$, из ΔDAB находим DF и BF, $DC = 2\frac{2}{3}$.
5. 21 кв.ед.

Указание. Из ΔAMC по теореме косинусов вычисляем AM, затем находим S_{AMC}, тогда $S_{ABC} = 2 \cdot S_{AMC}$.

6. По теореме косинусов вычислим $\angle CAD$. $BC = \sqrt{85}$.
7. Использовать свойство касательных, проведенных из одной точки.
8. $S_{ABCD} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot AD \cdot Sin60^0 = 9\sqrt{3}$, $9\sqrt{3} = \frac{1}{2} \cdot P_{ABCD} \cdot r$, $r = \frac{3}{4}\sqrt{3}$.
9. $AF = 5$, $AD = 13$, $DF = 12$, $r = 6$.
10. $\angle BAD + \angle ABC = 2d$, $\frac{1}{2}\angle BAD + \frac{1}{2}\angle ABC = d$ и т. д.

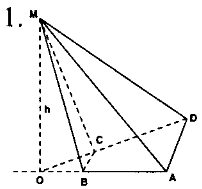
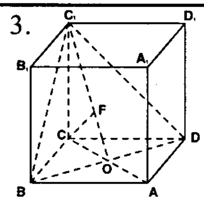
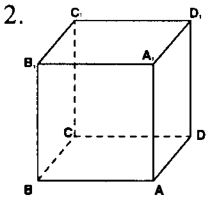
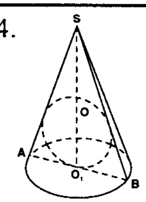
11. $60^0; 120^0$.
12. Использовать среднюю линию треугольника.
13. 6 *см*.
14. $\frac{\pi - 2}{2}$.
15. $P_{ABC} = 45$. Указание. CK – биссектриса, поэтому $\frac{AK}{KB} = \frac{CA}{CB}$ и т. д.
16. Найти $\angle ABM$ по формуле $S_{ABM} = \frac{1}{2} \cdot AB \cdot BM \cdot Sin\varphi$ и т. д. AC=14.
17. Построить третью медиану. Образовалось шесть треугольников, они равновелики. $S_{ABC} = 21$ кв.ед.
18. $MO = \frac{1}{2}AB$, $ON = \frac{1}{2}DF$, MN=MO+1=3.
19. 15.

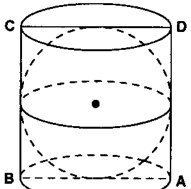
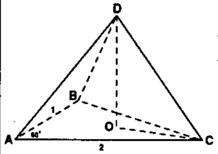
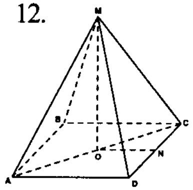
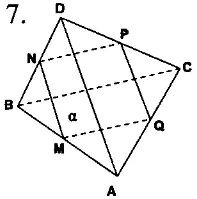
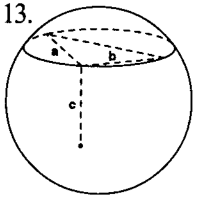
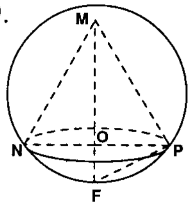
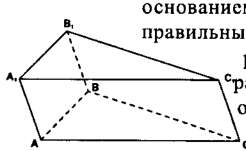
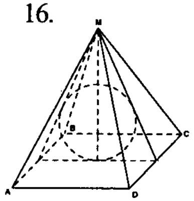
Указание. $AM \cdot MK = BM^2$, $\Delta AMC \sim \Delta BMK$ по двум углам и т. д.

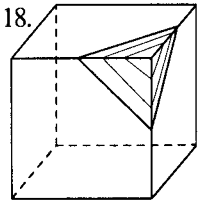
20. 15^0.

Указание. Вписанный угол и центральный опираются на дугу = 150^0.

Обзор способов решения избранных задач стереометрии

1.  $ABCD$ – трапеция, $BC \parallel AD$. $(MAB) \perp (ABC)$, $(MCD) \perp (ABC)$. Построить высоту пирамиды. Что будет высотой пирамиды?	3.  Ребро куба равно $\sqrt{3}$. Найти расстояние от C до (BC_1D).
2.  Дан куб, ребро которого равно 1. Вычислить кратчайшее расстояние между A и C_1 по поверхности куба	4.  В конус вписан шар, $\angle SAB = 60°$, Найти $\frac{V_k}{V_ш}$.

5.  В цилиндр вписан шар. Найти $\frac{Vш}{Vц}$.	11.  Каждое боковое ребро пирамиды равно $\sqrt{13}$. $AB = 1$, $DO \perp (ABC)$, $AC = 2$. (•)O – центр описанной окружности, $\angle BAC = 60°$. Вычислить V_{DABC}.
6. В цилиндр вписан шар (см. рис. в п.5). Найти $\frac{Sш}{Sц}$.	12.  Дана правильная четырехугольная пирамида, $ABCD$ – квадрат, $\angle MNO = 60°$, $MO \perp (ACD)$, $MO = 2\sqrt{3}$. Вычислить $S_{бок}$.
7.  $ABCD$ – правильный тетраэдр, α‖AD, α‖BC, MQ – средняя линия. Докажите, что $MNPQ$ – квадрат.	13.  Из одной точки сферы проведены три попарно перпендикулярные хорды a, b, c. Найти радиус сферы.
8. V, R, Y – число вершин, ребер и граней усеченной пирамиды. $R = 33$. Найти $V + R + Y$.	14. Диагональ куба равна 6 см. Найдите площадь полной поверхности куба.
9.  Около конуса описана сфера, $MO = NP$, $S_{осн} = 2{,}4$. Найти площадь сферы.	15.  Высота наклонной призмы, основанием которой служит правильный треугольник, равна $\sqrt{3}$, радиус окружности, описанной около основания, равен 4. Вычислить $V_{призмы}$.
10. В абстрактном мире геометрии существуют только пять видов правильных многогранников: тетраэдр, гексаэдр, октаэдр, додекаэдр и икосаэдр. Докажите.	16.  В основании правильной пирамиды лежит квадрат со стороной $2\sqrt{3}$. В пирамиду вписана сфера, поверхность которой равна 4π. Вычислить $V_{пирам.}$

17. Площади трех граней прямоугольного параллелепипеда равны соответственно 6, 6 и 9 кв.ед. Найти его объем.	19. Площадь осевого сечения равностороннего цилиндра равна 36 кв.ед. Найти его объем.
18.  Через середины каждых трех ребер куба, выходящих из одной вершины, проведены сечения. Найти объем образовавшегося многогранника, если ребро куба равно 1.	20. Правильная треугольная призма $ABCA_1B_1C_1$ вписана в сферу радиуса $R = 0{,}5\sqrt{11}$. Прямая BA_1 с (BCC_1) образует угол 45°. Вычислить $V_П$.

Ответы, указания к задачам «Обзора по стереометрии»

1. Свойство линии пересечения двух плоскостей, перпендикулярных к третьей.

2. $\sqrt{5}$. Рассмотреть развертку куба.

3. 1.

ΔC_1CO, в котором $CF \perp C_1O$ и $CF \perp (BC_1D)$, т.к. $CF \perp C_1O$ и $CF \perp BD$ – две пересекающиеся прямые, лежащие в (BCD).

4. $2\frac{1}{4}$.

5. $\frac{2}{3}$.

6. $\frac{2}{3}$.

7. Решение. $MNPQ$ – ромб, $BD \perp AC$, $MQ \parallel BC, MN \parallel AD$, тогда $\angle QMN = 90^0$, ч.т.д.

8. 2.
Число боковых ребер – 33:3=11 и т.д.

9. 15.

10. Рассмотреть удачное сечение комбинации тел. $MF = 2R$ (R – радиус сферы) $MP^2 = 2R \cdot MO$ и т.д.

11. 1.

Указание. По формуле $S=\frac{abc}{4R}$ находим $R=CO$, затем находим DO.

12. $S_{бок.}=32$ кв.ед.

13. $\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}$. Достроить до прямоугольного параллелепипеда.

14. 72 кв.ед.

15. *Указание.* $a_3=R\sqrt{3}$ и т.д.

16. 12 куб.ед.

17. 18 куб.ед. *Указание.* Измерения: x; y; z. Составить систему.

18. $\frac{5}{6}$ куб.ед.

Указание. Всего 8 маленьких пирамид. Объем одной равен $\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{48}$ и т.д.

19. 54π куб.ед. Указание. Осевое сечение - квадрат.

20. 4,5 куб.ед.

Указание. Центр сферы равноудален от всех шести вершин призмы. Он совпадает с серединой отрезка, соединяющего центры оснований призмы.

Конкурс «Математическая эрудиция и смекалка»

1. Назовите трех выдающихся русских математиков.
2. Кто сказал: «Арифметика – сиречь наука числительная»?
3. Кто сказал: «Чтобы человечество избавить от невежества достаточно двух цифр: 0 и 1»?
4. Кто из великих ученых сказал: «Уравнение умнее нас»?
5. Лауреат (I место) международного математического конкурса Парижской Академии наук.
6. Расшифруйте слово ФРАПИГО.
7. Что такое СЕМЕРИК?
8. Автор занимательной алгебры.
9. Автор учебника, по которому Ломоносов М.В. самостоятельно изучил математику.

10. 33,(33) · 3 = 100. Докажите.
11. 5! · 0! = ?
12. $x^y+1=z$. Решите в простых числах. Можно подбором.
13. Функция Антье.
14. $AX^A=БAX$, где A, $Б$, X – цифры.
15. Половина третье его. Какое это число?
16. Полтину разделите на половину.
17. Что можно сказать о векторах $\overrightarrow{AB}=K\cdot\overrightarrow{AC}$?
18. Ортоцентр треугольника совпадает с вершиной угла. Какой это треугольник?
19. Угол между биссектрисами смежных углов.
20. Велотурист проехал $\frac{5}{7}$ пути и еще 20 км. Каков путь велотуриста?
21. Новогодний гусь тяжелее утки на 25%. Насколько % утка легче гуся?
22. Бросают два игральных кубика. Какая сумма цифр на верхних гранях будет появляться чаще?
23. Формула производной сложной функции.
24. С помощью одной линейки постройте сумму двух углов треугольника.
25. Докажите $5^{\log_3 15}=15^{\log_3 5}$.
26. Какая последняя цифра произведения всех нечетных чисел?
27. $|a|-a=?$
28. $-\sqrt[3]{146-\frac{\sqrt[3]{21}}{21^{-\frac{2}{3}}}}=?$
29. Изготовьте, соблюдая размеры, части соответствующих моделей фигур из упаковочного картона. Выполните требования, о которых говорится в пунктах а) – д).

а) Превратите модель правильного треугольника, состоящего из четырех частей, в хаос. Объединив части, получите равновеликий и равносоставленный квадрат. Какой идее вы следуете?

б) Превратите модель квадрата, состоящего из четырех частей, в хаос. Объединив части с помощью руководящей идеи, получите правильный треугольник, состоящий из этих четырех частей.

в) Аналогичное задание для фигуры, иллюстрирующей теорему Пифагора.

г) Впишите в квадрат ряд других квадратов так, как показано на чертеже. Постарайтесь найти суперрациональный способ вычислений длин сторон квадратов, вписанных один в другой, приняв за 1 сторону исходного. Конкретизируйте формулу $a_n = a_1 q^{n-1}$.

д) Ответьте экспромтом на вопрос: «Что представляют последовательные члены арифметической прогрессии представленной наглядным рисунком? Сколько всего треугольничков? Дайте молниеносный ответ.

Ответы на вопросы конкурса «Математическая эрудиция и смекалка»

№ п/п	Ответ	Баллы
1.	П.Л. Чебышев, А.Н. Колмогоров, С.В. Ковалевская.	2
2.	Леонтий Магницкий	3
3.	Готфрид Лейбниц	2
4.	Исаак Ньютон	2
5.	Софья Ковалевская	5
6.	Пифагор	1
7.	Древнерусская система счисления (счет семерками)	5
8.	Я.И. Перельман	2
9.	Леонтий Магницкий	3
10.	$33,(33)\cdot 3 = 99,(9) = 99 + 0,(9) = 99 + 1 = 100$	5
11.	$5!\cdot 0! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 1 = 120$	4
12.	$(2;2;5)$	4
13.	$f(x) = [x]$	2

14.	$25^2 = 625$	5
15.	$1\frac{1}{2}$	4
16.	Сто грошей (полкопеек)	5
17.	Векторы коллинеарны, имеют общее начало, лежат на одной прямой	4
18.	Прямоугольный	4
19.	90^0	3
20.	70 км	5
21.	На 20%	8
22.	7	5
23.	$(F(g(x)))' = F'(g(x))\cdot g'(x)$	4
24.	Построить какой-либо внешний угол треугольника	4
25.	$5^{\log_3 15} = (3\cdot 5)^{\log_3 5} = 15^{\log_3 5}$.	7
26.	5	2
27.	0 или $-2a$	5
28.	$\frac{1}{5}$	5
29.(г)	$a_n = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^{n-1}$	5
29.(д)	50	5

Литература

1. Азенк Г. Ю. Проверьте свои способности /Г. Ю. Айзенк.– М.: «Мир», 1972.– 176 с.

2. Аргунов Б.И. Элементарная геометрия /Б. И. Аргунов, М. Б. Балк.– М.: «Просвещение», 1966.– 278 с.

3. Богус В. А. Математика для поступающих в вуз / В. А. Богус, Н. Н. Куприенко.– Майкоп, 1995.– 315 с.

4. Германович П. Ю. Вопросы и задачи на соображение/ П. Ю. Германович.– Л.: «Просвещение», 1956.– 94 с.

5. Давыдов В. В. Принципы обучения в школе будущего /В. В. Давыдов.– М. 1974.

6. Давыдов В. В. Проблемы развивающего обучения /В. В. Давыдов.– М., 1986.

7. Занков Л. В. Обучение и развитие /Л. В. Занков.– М., 1975.

8. Зимняя И. А. Педагогическая психология /И. А. Зимняя.– «Логос», М., 2003.– 384 с.

9. Мамий К. С. Основы современной математики /К. С. Мамий.– Майкоп, 1994.– 144 с.

10. Столяренко Л. Д. Педагогика /Л. Д. Столяренко, С. И. Самыгин.– М.: «Март», 2003.– 256 с.

11. Талызина Н. Ф. Управление процессом усвоения знаний /Н. Ф. Талызина,– М., 1984.

СОДЕРЖАНИЕ

Алексей Павлович Богомолов

МАТЕМАТИКА
Опыт нетрадиционного подхода к преподаванию в средней школе

Учебное пособие

Редактор **Н. С. Схаляхо**
Художественный редактор **Н. Г. Федотова**
Технический редактор **М. А. Кипова**
Корректор **Р. С. Жажиева**

ИБ № 17

Сдано в набор 24.04.2009. Подписано в печать 29.09.2009. Формат 60х84/16. Бумага офсетная. Гарнитура шрифта «Тип таймс». Печать офсетная. Усл. п. л. 4,65. Уч.-изд. л. 4,38. Тираж 1000 экз. Заказ 072.

Адыгейское республиканское книжное издательство. 385000, г. Майкоп, ул. Гоголя, 8.

ОАО «Полиграф-Юг». 385000, г. Майкоп, ул. Пионерская, 268, тел. для справок: 52-23-92.