2011 г. Труды ФОРА №16

ОРИЕНТИРОВАНИЕ МНОЖЕСТВ

А.Б. Шишкин

Славянский-на-Кубани государственный педагогический институт, г. Славянск-на-Кубани

По известной теореме Цермело из аксиомы выбора вытекает, что любое множество может быть вполне упорядочено. Эта теорема допускает простое развитие на многомерное отношение ориентирования: любое множество может быть вполне ориентировано.

Транзакции. Пусть X — множество, n — натуральное число. Рассмотрим декартову степень X^n и выберем пару различных натуральных чисел $k, j \leqslant n$. Отображение

$$p\colon X^n \to X^n | (\ldots, x_k, \ldots, x_j, \ldots) \to (\ldots, x_j, \ldots, x_k, \ldots),$$

при котором k-я и j-я компоненты векторов из X^n меняются местами, называется *транспозицией* (точнее, (k, j)-транспозицией) декартовой степени X^n. Отображение $p\colon X^n \to X^n$ называется *транзакцией* декартовой степени X^n, если оно представляется в виде композиции $p_1 \circ \cdots \circ p_m$ конечного числа транспозиций. Если p — транзакция (транспозиция) декартовой степени X^n, то образ $p(x_1, \ldots, x_n)$ вектора $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ называется транзакцией (транспозицией) этого вектора. Отдельные компоненты фиксированного вектора $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ могут быть равны. Это означает, что транзакция $p(x_1, \ldots, x_n)$ вектора $(x_1, \ldots, x_n)$ может с ним совпадать. Если компоненты вектора $(x_1, \ldots, x_n)$ попарно различны, то совокупность всех транзакций этого вектора эквивалентна совокупности всех транзакций декартовой степени X^n и может быть отождествлена с множеством всех подстановок n-й степени. Подстановка

$$\begin{pmatrix} 1, \ldots, n \\ k_1, \ldots, k_n \end{pmatrix}$$

порождает транзакцию

$$p\colon X^n \to X^n | (x_1, \ldots, x_n) \to (x_{k_1}, \ldots, x_{k_n})$$

и наоборот.

Транзакция называется *четной* (*нечетной*), если порождающая ее подстановка является четной (нечетной). Известно, что подстановка является четной тогда и только тода, когда она разлагается в произведение четного числа транспозиций. Это означает, что транзакция p декартовой степени X^n является четной тогда и только тогда, когда она представляется в виде композиции четного числа транспозиций декартовой степени X^n, в частности, множество всех четных транзакций фиксированного вектора $(x_1, \ldots, x_n) \in X^n$ с попарно различными компонентами не пересекается с множеством нечетных транзакций этого вектора.

Любая транзакция p декартовой степени X^n обратима. При этом обратное отображение p^{-1} тоже является транзакцией декартовой степени X^n. Если транзакция $p\colon X^n \to X^n$ является четной, то по свойствам подстановок и обратная транзакция $p^{-1}\colon X^n \to X^n$ тоже является четной.

Отношение ориентирования. Зафиксируем натуральное число n. Конечное множество $\alpha \subseteq X$ называется *симплексом* (*комплексом*) в множестве X, если число элементов $\#\alpha$ этого множества равно n (равно $n+1$). При этом элементы симплекса (комплекса) α называются его *вершинами*. Любое упорядочение симплекса (комплекса) $\alpha \subseteq X$ называется *ориентированным* симплексом (комплексом) в множестве X. Ориентированный симплекс (комплекс) α в множестве X объявляется *тождественным* ориентированному симплексу (комплексу) β в множестве X, если существует четная транзакция p декартовой степени X^n (декартовой степени X^{n+1}), такая, что $p(\alpha)=\beta$.

Произвольное множество в X^{n+1} называется $(n+1)$-*местным отношением* на множестве X. Пусть χ — $(n+1)$-местное отношение на X. Отношение χ называется *асимметричным*, если выполнены следующие условия:

1) если p — четная транзакция степени X^{n+1}, то $p(\chi)\subseteq\chi$;

2) если p — нечетная транзакция степени X^{n+1}, то $p(\chi)\bigcap\chi=\varnothing$.

Легко увидеть, что все элементы асимметричного отношения являются ориентированными комплексами в X. Говорим, что точка $x\in X$ является *внутренней точкой* ориентированного комплекса $(x_1,\dots,x_{n+1})\in X^{n+1}$ (по отношению χ), если

$$(x_1,\dots,x_{k-1},x,x_{k+1},\dots,x_{n+1})\in\chi$$

для любого $k=1,\dots,n+1$. Множество всех внутренних точек ориентированного комплекса $(x_1,\dots,x_{n+1})$ называется его *внутренностью* и обозначается $\operatorname{int}(x_1,\dots,x_{n+1})$ или $\operatorname{int}_\chi(x_1,\dots,x_{n+1})$, если при этом требуется явно указать отношение χ на X. Отношение χ называется *транзитивным*, если любой ориентированный комплекс в X, внутренность которого не является пустой, лежит в χ. Отношение χ называется отношением *частичного ориентирования*, если оно является асимметричным и транзитивным.

Если на множестве X задано $(n+1)$-местное отношение частичного ориентирования χ, то множество X называется *частично ориентированным* множеством, а натуральное число n называется *размерностью* частично ориентированного множества X. Комплекс $\{x_1,\dots,x_{n+1}\}$ в частично ориентированном множестве X называется *ориентируемым*, а его вершины *сравнимыми*, если декартова степень $\{x_1,\dots,x_{n+1}\}^{n+1}$ пересекается с χ. Если любой комплекс $\{x_1,\dots,x_{n+1}\}$ в множестве X оказывается ориентируемым, то отношение частичного ориентирования $\chi\subseteq X^{n+1}$ называется отношением *ориентирования* множества X, а само множество X называется *ориентированным*.

Примеры ориентированных множеств. Всякое отношение $\chi=\{(x_1,x_2)\colon x_1\prec x_2\}\subseteq X^2$ частичного порядка является отношением частичного ориентирования размерности 1. Действительно, если χ — отношение частичного порядка на X, то выполнены условия:

1) если $x_1\prec x_2$, то $x_1\neq x_2$;

2) если $x_1\prec x$ и $x\prec x_2$, то $x_1\prec x_2$.

Легко заметить, что условие 2) равносильно транзитивности отношения χ. Осталось убедиться, что отношение $\chi\subseteq X^2$ является асимметричным. Если p — четная транзакция декартовой степени X^2, то для любого вектора $(x_1,x_2)\in X^2$ справедливо равенство $p(x_1,x_2)=(x_1,x_2)$. Значит, $p(\chi)=\chi$. Если p — нечетная транзакция декартовой степени X^2, то для любого вектора $(x_1,x_2)\in X^2$ справедливо равенство $p(x_1,x_2)=(x_2,x_1)$. Если предположить, что $(x_1,x_2),(x_2,x_1)\in\chi$, то $x_1\prec x_2$, $x_2\prec x_1$ и в силу условия 2) имеем $x_1\prec x_1$, а это противоречит условию 1). Значит, $p(\chi)\bigcap\chi=\varnothing$.

Столь же просто убедиться, что верно и обратное утверждение: всякое частичное ориентирование $\chi\subseteq X^2$ размерности 1 является частичным порядком на множестве X.

Рассмотрим пример отношения частичного ориентирования размерности 2. Пусть $X=\mathbf{R}^2$, $\chi\subseteq X^3=\mathbf{R}^6$ — совокупность всех точек $(x^1,x^2,x^3)\in X^3$, для которых определитель

$$\Delta(x^1,x^2,x^3):=\begin{vmatrix}1&1&1\\x_1^1&x_1^2&x_1^3\\x_2^1&x_2^2&x_2^3\end{vmatrix}\tag{1}$$

больше нуля. Здесь $x^1:=\left(x_1^1,x_2^1\right)$, $x^2:=\left(x_1^2,x_2^2\right)$, $x^3:=\left(x_1^3,x_2^3\right)$. Легко убедиться, что

$$\Delta(x^1,x^2,x^3)=\det(x^2-x^1,x^3-x^1):=\begin{vmatrix}x_1^2-x_1^1&x_1^3-x_1^1\\x_2^2-x_2^1&x_2^3-x_2^1\end{vmatrix},$$

значит, $\frac{1}{2}|\Delta(x^1,x^2,x^3)|$ — площадь треугольника (комплекса) с вершинами x^1,x^2,x^3. Действительно,

$$\det(x^2-x^1,x^3-x^1)=\begin{vmatrix}x_1^2&x_1^3-x_1^1\\x_2^2&x_2^3-x_2^1\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}x_1^1&x_1^3-x_1^1\\x_2^1&x_2^3-x_2^1\end{vmatrix}=$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^1 \\ x_2^2 & x_2^1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^3 \end{vmatrix} = \Delta(x^1, x^2, x^3).$$

Асимметричность отношения $\chi \subseteq X^3$ легко следует из свойств определителей. Проверим транзитивность. Если $x \in \mathrm{int}(x^1, x^2, x^3)$, то каждый из определителей

$$\Delta(x, x^2, x^3),\ \Delta(x^1, x, x^3),\ \Delta(x^1, x^2, x) \tag{2}$$

больше нуля. При этом

$$\Delta(x, x^2, x^3) + \Delta(x^1, x, x^3) + \Delta(x^1, x^2, x) =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1 & x_1^3 \\ x_2 & x_2^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 \\ x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & x^3 \\ x_2 & x_2^3 \end{vmatrix} -$$

$$- \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1 \\ x_2^1 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1 \\ x_2^2 & x_2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1 \\ x_2^1 & x_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1^2 & x_1^3 \\ x_2^2 & x_2^3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^3 \\ x_2^1 & x_2^3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1^1 & x_1^2 \\ x_2^1 & x_2^2 \end{vmatrix} = \Delta(x^1, x^2, x^3).$$

Значит, определитель $\Delta(x^1, x^2, x^3)$ больше нуля, то есть $(x^1, x^2, x^3) \in \chi$. Это означает, что отношение χ является частичным ориентированием пространства $\mathbf{R}^2$ размерности 2. Это отношение называется *естественным ориентированием* пространства $\mathbf{R}^2$.

При определении естественного ориентирования пространства $\mathbf{R}^n$ определитель (1) заменяется определителем

$$\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1}) := \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ x_1^1 & \cdots & x_1^{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^1 & \cdots & x_n^{n+1} \end{vmatrix},$$

а определители (2) заменяются определителями

$$\Delta(x, x^2, \ldots, x^{n+1}), \Delta(x^1, x, \ldots, x^{n+1}), \ldots, \Delta(x^1, \ldots, x^n, x).$$

Здесь

$$x := (x_1, \ldots, x_n)\,,\ x^1 := \left(x_1^1, \ldots, x_n^1\right), \ldots, x^{n+1} := \left(x_1^{n+1}, \ldots, x_n^{n+1}\right).$$

При этом используются следующие свойства определителей.

С в о й с т в о 1. *Для любых* $x^1, \ldots, x^{n+1} \in \mathbf{R}^n$ *справедливо равенство*

$$\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \det(x^2 - x^1, \ldots, x^3 - x^1),$$

где

$$\det(x^2 - x^1, \ldots, x^{n+1} - x^1) := \begin{vmatrix} x_1^2 - x_1^1 & \cdots & x_1^{n+1} - x_1^1 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ x_n^2 - x_n^1 & \cdots & x_n^{n+1} - x_n^1 \end{vmatrix}.$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. С одной стороны, разложим определитель $\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1})$ по первой строке. Получим

$$\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \det(x^1, \ldots, x^{k-1}, x^{k+1}, \ldots, x^{n+1}).$$

С другой стороны, по известным свойствам определителей

$$\det(x^2 - x^1, \ldots, x^{n+1} - x^1) =$$

$$= \det(x^2, x^3 - x^1, \ldots, x^{n+1} - x^1) - \det(x^1, x^3 - x^1, \ldots, x^{n+1} - x^1) =$$

$$= \det(x^2, x^3, x^4 - x^1, \ldots, x^{n+1} - x^1) +$$
$$- \det(x^1, x^3, x^4 - x^1, \ldots, x^{n+1} - x^1) +$$
$$+ \det(x^1, x^2, x^4 - x^1, \ldots, x^{n+1} - x^1) = \ldots$$

$$\ldots = \sum_{k=1}^{j} (-1)^{k-1} \det(x^2, \ldots, x^{k-1}, x^{k+1}, \ldots, x^{j-1}, x^j - x^1, \ldots x^{n+1} - x^1) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n+1} (-1)^{k-1} \det(x^1, \ldots, x^{k-1}, x^{k+1}, \ldots, x^{n+1}). \blacksquare$$

Из свойства 1 следует, что $\frac{1}{n!}|\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1})|$ — n-мерный объем комплекса с вершинами $x^1, \ldots, x^{n+1}$.

С в о й с т в о 2. *Для любых* $x, x^1, \ldots, x^{n+1} \in \mathbf{R}^n$ *справедливо равенство*

$$\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \Delta(x, x^2, \ldots, x^{n+1}) + \cdots + \Delta(x^1, \ldots, x^n, x).$$

Д о к а з а т е л ь с т в о. Если все определители

$$\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1}),\ \Delta(x, x^2, \ldots, x^{n+1}), \ldots, \Delta(x^1, \ldots, x^n, x)$$

равны нулю, то доказываемое равенство справедливо. Если определитель $\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1})$ отличен от нуля, то справедливость доказываемого равенства вытекает из правила Крамера, примененного к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} y_1 + \cdots + y_{n+1} & = & 1, \\ x_1^1 y_1 + \cdots + x_1^{n+1} y_{n+1} & = & x_1, \\ \quad . \quad . \quad . & & . \quad . \\ x_n^1 y_1 + \cdots + x_n^{n+1} y_{n+1} & = & x_n. \end{cases}$$

Действительно, пусть $(y_1, \ldots, y_{n+1})$ — решение этой системы уравнений. Тогда

$$y_k = \frac{\Delta(x^1, \ldots, x^{k-1}, x, x^{k-1}, \ldots, x^{n+1})}{\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1})}$$

для любого $k \in 1, \ldots, n+1$. При этом $y_1 + \cdots + y_{n+1} = 1$.

Предположим, что $\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1}) = 0$, но $\Delta(x, x^2, \ldots, x^{n+1}) \neq 0$. Разложим определители $\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1})$ и $\Delta(x, x^2, \ldots, x^{n+1})$ по первому столбцу

$$\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1}) = \Delta_0 - \Delta_1 x_1^1 + \ldots + (-1)^n \Delta_n x_n^1 = 0,$$

$$\Delta(x, x^2, \ldots, x^{n+1}) = \Delta_0 - \Delta_1 x_1 + \ldots + (-1)^n \Delta_n x_n \neq 0.$$

Из этих соотношений вытекает, что хотя бы один из миноров $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ отличен от нуля. Пусть $\Delta_1 \neq 0$. Тогда $\Delta(x^1, \ldots, x^{n+1}) = f(x_1^1) = 0$, где f — это линейная функция $t \to at + b$, $a = -\Delta_1 \neq 0$, $b = \Delta_0 + \Delta_2 x_2^1 - \ldots + (-1)^n \Delta_n x_n^1$. Заменим вектор $x^1 := (x_1^1, x_2^1, \ldots, x_n^1)$ вектором $x^1(t) := (x_1^1 + t, x_2^1, \ldots, x_n^1)$, $t \neq 0$. Тогда $\Delta(x^1(t), x^2, \ldots, x^{n+1}) = f(x_1^1 + t) = at \neq 0$ и справедливо равенство

$$\Delta(x^1(t), x^2, \ldots, x^{n+1}) = \Delta(x, x^2, \ldots, x^{n+1}) +$$
$$+ \Delta(x^1(t), x, x^3 \ldots, x^{n+1}) + \cdots + \Delta(x^1(t), x^2, \ldots, x^n, x).$$

Осталось в этом равенстве перейти к пределу при $t \to 0$. $\blacksquare$

Понятно, что естественное ориентирование пространства $\mathbf{R}^n$ имеет размерность n.

Полное ориентирование. Пусть χ — отношение ориентирования множества X размерности n, A — подмножество множества X. Ориентированный симплекс $(x_1, \ldots, x_n) \in A^n$ называется *первичным симплексом* в A, если для любого $x \in A \backslash \{x_1, \ldots, x_n\}$ ориентированный комплекс

$(x_1, \ldots, x_n, x)$ принадлежит χ. Ориентированное множество X называется *вполне ориентированным*, если любое непустое подмножество $A \subseteq X$, $\#A > n$, обладает первичным симплексом. Вполне ориентированое множество размерности 1 является вполне упорядоченным множеством.

Пусть M — множество, 2^M — его булеан. Отображение $f : 2^M \to M$ называется *функцией выбора*, если $f(A) \in A$ для любого непустого $A \in 2^M$. Мы предполагаем выполненной *аксиому выбора*: для любого непустого множества M существует функция выбора $2^M \to M$. Следовательно, по известной теореме Цермело всякое множество может быть вполне упорядочено. Эта теорема допускает естественное развитие на отношения ориентирования.

Теорема. *Любое множество может быть вполне ориентировано.*

Доказательство. Пусть X — множество. Если X конечное множество и $\#X \leqslant n$, то полагаем $\chi := \varnothing$. В противном случае считаем, что множество X вполне упорядочено. Ориентированный комплекс $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ с вершинами из X будем называть *правильным*, если $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_{n+1}$. Рассмотрим $(n+1)$-местное отношение χ на множестве X, определенное по следующему правилу: ориентированный комплекс $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ принадлежит χ тогда и только тогда, когда он получен из правильного комплекса с помощью четной транзакции. Покажем, что отношение χ является отношением полного ориентирования множества X.

Во-первых, покажем, что отношение χ является отношением частичного ориентирования множества X. Проверим асимметричность отношения χ. Пусть $\alpha := p(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \chi$, где $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ — некоторый правильный комплекс в X, p — некоторая четная транзакция степени X^{n+1}. Если p' — четная транзакция степени X^{n+1}, то композиция $p'' := p' \circ p$ тоже является четной транзакцией степени X^{n+1}. По определению отношения χ имеем $p'(\alpha) = p''(x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \chi$, то есть $p'(\chi) \subseteq \chi$. Если p' — нечетная транзакция степени X^{n+1}, то композиция $p'' := p' \circ p$ тоже является нечетной транзакцией степени X^{n+1}. По определению отношения χ имеем $p'(\alpha) = p''(x_1, \ldots, x_{n+1}) \notin \chi$, то есть $p'(\chi) \bigcap \chi = \varnothing$. Это означает, что отношение χ является асимметричным. Проверим транзитивность отношения χ. Пусть α — произвольный ориентированный комплекс в X. Можно считать, что $\alpha := (x'_1, \ldots, x'_{n+1}) = p(x_1, \ldots, x_{n+1})$, где $(x_1, \ldots, x_{n+1})$ — некоторый правильный комплекс в X, p — некоторая транзакция степени X^{n+1}. Предположим, что $\mathrm{int}\alpha \neq \varnothing$. Нам достаточно показать, что транзакция p является четной. Если $x \in \mathrm{int}\alpha$, то $(x'_1, \ldots, x'_{k-1}, x, x'_{k+1}, \ldots, x'_{n+1}) = p(x_1, \ldots, x_{k'-1}, x, x_{k'+1}, \ldots, x_{n+1}) \in \chi$ для любого $k = 1, \ldots, n+1$. Здесь k' зависит от k и определяется однозначно из равенства $x_{k'} = x'_k$. Легко увидеть, что при некотором k ориентированный комплекс $(x_1, \ldots, x_{k'-1}, x, x_{k'+1}, \ldots, x_{n+1})$ является правильным. По определению отношения χ транзакция p является четной. Значит, $\alpha \in \chi$ и отношение χ является транзитивным.

Во-вторых, покажем, что отношение χ является отношением ориентирования множества X, то есть любой комплекс $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ в X является ориентируемым. Действительно, множество $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\} \subseteq X$ упорядочено. Пусть $x_{k_1} \prec x_{k_2} \prec \ldots \prec x_{k_{n+1}}$. Тогда ориентированный комплекс $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n+1}})$ является правильным, значит, $(x_{k_1}, \ldots, x_{k_{n+1}}) \in \{x_1, \ldots, x_{n+1}\}^{n+1} \bigcap \chi$. Это означает, что комплекс $\{x_1, \ldots, x_{n+1}\}$ является ориентируемым.

В третьих, покажем, что отношение ориентирования χ является полным. Выберем произвольное множество $A \subseteq X$, $\#A > n$. Пусть x_1 — наименьший элемент множества A, x_2 — наименьший элемент множества $A \setminus \{x_1\}$ и т.д. Тогда $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n$ и для любого $x \in A \setminus \{x_1, \ldots, x_n\}$ выполняются неравенства $x_1 \prec x_2 \prec \ldots \prec x_n \prec x$. Значит, ориентированный комплекс $(x_1, \ldots, x_n, x)$ является правильным и, следовательно, $(x_1, \ldots, x_n, x) \in \chi$. Это означает, что ориентированный симплекс $(x_1, \ldots, x_n)$ является первичным в множестве A. ■

Ordering sets

A.B. Shishkin

By a theorem of Zermelo from axiom of choice follows that any set can be totally ordered. This theorem has a development on a multi-dimensional orient relation: any set can be totally oriented.

