ОЦЕНКА ЧИСЛА ПРЯМЫХ ИЗОКЛИН, ПРОХОДЯЩИХ ЧЕРЕЗ ОСОБУЮ ТОЧКУ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А.Д. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Для плоской полиномиальной дифференциальной системы найдены оценки для числа прямых изоклин, проходящих через особую точку системы. Приведены примеры таких систем, имеющих максимальное число прямых изоклин.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i=r}^{n}P_i(x,y)\equiv P(x,y),\ \frac{dy}{dt}=\sum_{j=s}^{n}Q_j(x,y)\equiv Q(x,y). \tag{1}$$

Будем говорить, что система (1) удовлетворяет условиям (*A*), если P и Q - неоднородные многочлены, $(P,Q)=1$, $\deg P=\deg Q=n$, $n\geq 2$, $P_i(Q_j)$ - однородные многочлены степеней $i(j)$, $i,j\in N$.

Теорема 1. Пусть система (1) удовлетворяет условиям (*A*) и, кроме этого, $P_r(x,y)\not\equiv 0$, $r\leq s$ (или $Q_s(x,y)\not\equiv 0$, $s\leq r$). Тогда через точку (0,0) проходит не более чем $r+n$ ($s+n$) прямых изоклин.

Доказательство. Рассуждения проведем для случая $P_r(x,y)\not\equiv 0$, $r\leq s$, так как случай $Q_s(x,y)\not\equiv 0$, $s\leq r$ сводится к первому заменой $x=\bar{y}$, $y=\bar{x}$.

Пусть прямая $y=kx$ - изоклина системы (1), на которой индуцировано направление m. При этом считаем, что $m\in R$ (конечное число), так как этого можно всегда добиться с помощью невырожденного преобразования

$$x=\alpha\bar{x}+\beta\bar{y},\ y=\gamma\bar{x}+\delta\bar{y}.$$

Таким образом, имеет место равенство $Q(x,kx)\equiv mP(x,kx)$, из которого следует система уравнений

$$\begin{cases} f_r(k)\cdot m=0,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_{s-1}(k)\cdot m=0,\\ f_s(k)\cdot m=g_s(k),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ f_{n-1}(k)\cdot m=g_{n-1}(k),\\ f_n(k)\cdot m=g_n(k). \end{cases} \tag{2}$$

В силу условий (*A*) выполняется неравенство $f_n(k)\not\equiv 0$, поэтому, исключив m в системе (2), получаем:

© А.Д. Ушхо

$$\begin{cases} f_r(k)\cdot g_n(k)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{s-1}(k)\cdot g_n(k)=0, \\ f_s(k)\cdot g_n(k)=g_s(k)\cdot f_n(k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ f_{n-1}(k)\cdot g_n(k)=g_{n-1}(k)\cdot f_n(k). \end{cases} \tag{3}$$

Здесь $f_i(k),\ i=\overline{r,n}$ $(g_j(k),\ j=\overline{s,n})$ – многочлены степеней i и j соответственно.

Согласно условиям (*A*) и неравенству $P_r(x,y)\not\equiv 0$ из всех уравнений системы (3) наименьшую степень относительно k имеет уравнение $f_r(k)\cdot g_n(k)=0$.

Следовательно, число решений системы (3) не более чем $r+n$. Теорема доказана.

Следствие 1. Число прямых изоклин системы (1), инцидентных точке (0,0) при выполнении условий (*A*), не превосходит числа $2n-1$, причем, если $r=s$, $P_i(x,y)\equiv 0,\ Q_i(x,y)\equiv 0, i=\overline{r+1,n-1},$ r и n - числа разной четности, то существует хотя бы одна прямая изоклина системы (1), проходящая через точку (0,0).

Действительно, при $r=s=n-1$ из теоремы 1 следует, что число прямых изоклин системы (1), инцидентных точке (0,0), не превосходит числа $2n-1$.

Если $r=s$, $P_i(x,y)\equiv 0,\ Q_i(x,y)\equiv 0, i=\overline{r+1,n-1}$, то система (3) переходит в уравнение

$$f_r(k)g_n(k)=g_r(k)f_n(k). \tag{4}$$

Уравнение (4) можно записать в виде:

$$(a_{0,r}b_{0,n}-a_{0,n}b_{0,r})k^{r+n}+\ldots+(a_{r,0}b_{n-1,1}+a_{r-1,1}b_{n,0}-a_{n,0}b_{r-1,1}-a_{n-1,1}b_{r,0})k+a_{r,0}b_{n,0}-a_{n,0}b_{r,0}=0. \tag{5}$$

По условию уравнение (5) является уравнением нечетной степени относительно k. Поэтому при выполнении неравенства $a_{0,r}b_{0,n}-a_{0,n}b_{0,r}\neq 0$ уравнение (5) имеет хотя бы один вещественный корень, которому соответствует прямая изоклина системы (1), проходящая через точку (0,0). Если $a_{0,r}b_{0,n}-a_{0,n}b_{0,r}=0$, то прямая $x=0$ - изоклина системы (1). Следствие доказано.

Замечание 1. В статье [1] рассматривалась система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=P_m(x,y)+P_n(x,y),\ \frac{dy}{dt}=Q_m(x,y)+Q_n(x,y) \tag{6}$$

и для нее доказано утверждение: если m и n - числа разной четности, то через особую точку (0,0) системы (6) проходит, по крайней мере, одна прямая изоклина. При этом если правые части (6) взаимно просты, то число таких изоклин не превосходит $m+n$. Здесь m, $n\in N$, P_mQ_m, P_nQ_n - однородные многочлены степеней m и n соответственно. Таким образом, результат из работы [1], отмеченный нами, является, в известном смысле, частным случаем теоремы 1 ($r=s=m$, $P_i(x,y)\equiv 0$, $Q_i(x,y)\equiv 0$, $\forall_i=\overline{m+1,n-1}$).

Замечание 2. Система (1) может не иметь ни одной прямой изоклины, проходящей через точку (0,0) при выполнении условий теоремы 1.

Пример 1. Не существует прямой изоклины, инцидентной точке (0,0), для дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt}=x-3y+x^3-7x^2y-38xy^2+420y^3, \frac{dy}{dt}=x^2-3xy+2y^2+x^3-13xy^2-12y^3.$$

Действительно, система (3) применительно к рассмотренной дифференциальной системе имеет вид:

$$(1-3k)(1-13k^2-12k^3)=0,\ (1-3k+2k^2)(1-7k-38k^2-420k^3)=0 \tag{7}$$

Первое уравнение системы (7) имеет четыре решения, ни одно из которых не удовлетворяет второму уравнению этой системы.

Приведем примеры систем вида (1), имеющих максимальное число прямых изоклин, проходящих через особую точку.

Пример 2. Прямые $y=3x$, $y=-5x$, $y=5x$, $y=-x$, $y=-10x$ являются изоклинами системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=-3x^2-2xy+y^2+(y+5x)(y-5x)(y+10x),$$
$$\frac{dy}{dt}=-3x^2-2xy+y^2+4(y+5x)(y-5x)(y+10x).$$

Пример 3. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=-4x^2-15xy-8y^2+20x^3+36x^2y+36xy^2+16y^3,$$
$$\frac{dy}{dt}=5x^2+15xy+8y^2-4x^3-11x^2y-26xy^2-16y^3$$

имеет пять прямых изоклин, проходящих через точку (0,0), в том числе: $x=0$, $y=-2x$, $x=-2y$, $y=-6x/5$, $y=-7x/8$. Направления, индуцированные на данных прямых, равны соответственно $m_1=-1$, $m_2=-7/6$, $m_3=-1/3$, $m_4=-37/64$, $m_5=-2/3$.

Пример 4. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=(y-k_1x)(y-k_2x)\sum_{i=0}^{3}f_i(x,y)+\prod_{j=3}^{7}(y-k_jx),$$
$$\frac{dy}{dt}=(y-k_1x)(y-k_2x)\sum_{i=0}^{3}f_i(x,y),$$

где $\prod_{\ell=1}^{7}k_\ell\neq 0$, $k_r\neq k_s$, если $r\neq s$, $r,s\in\overline{1,7}$, $f_i(x,y)$ - однородные многочлены степени i, $f_i(x,y)\not\equiv 0\ \ \forall i\in\overline{0,3}$ имеет семь прямых изоклин, проходящих через начало координат, в том числе: $y-k_sx=0$, $s=1,2$, $y-k_jx=0$, $j=\overline{3,7}$.

Пример 5. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\prod_{i=1}^{3}(y-k_ix)\sum_{j=0}^{2}f_j(x,y)+\prod_{s=4}^{8}(y-k_sx),\ \frac{dy}{dt}=\prod_{i=1}^{3}(y-k_ix)\sum_{j=0}^{2}f_j(x,y)$$

где $f_j(x,y)$ - однородные многочлены степени j, $f_j(x,y)\not\equiv 0\ \ \forall j\in\overline{0,2}$, $\prod_{\ell=1}^{8}k_\ell\neq 0$, $k_m\neq k_n$, если $m\neq n$, $m,n\in\overline{1,8}$, имеет восемь прямых изоклин, в том числе: $y-k_ix=0$, $i=\overline{1,3}$, $y-k_sx=0$, $s=\overline{4,8}$.

В статье [2] введено понятие оси симметрии N - типа векторного поля, определяемого системой дифференциальных уравнений (1). Приведем это определение.

Пусть преобразование: $\overline{x}=x+ky$, $\overline{y}=-kx+y$, $k\in R$, переводит систему (1) в систему

$$\frac{d\overline{x}}{dt}=\overline{P}(\overline{x},\overline{y}),\ \frac{d\overline{y}}{dt}=\overline{Q}(\overline{x},\overline{y})$$

Прямую $y=kx$ назовем осью симметрии N - типа поля направлений системы (1), если

$$\overline{P}(\overline{x},-\overline{y})=-\overline{P}(\overline{x},\overline{y}),\ \overline{Q}(\overline{x},-\overline{y})=\overline{Q}(\overline{x},\overline{y}).$$

 © 2011 Физическое Общество РА

Из этого определения следует, что любая ось симметрии N - типа системы (1) является ее изоклиной, причем, если $k \neq 0$, то $Q(x,kx)/P(x,kx) = -1/k$.

В силу работ [2,3] число осей симметрии N - типа поля направлений системы (1) при выполнении условий (*A*) не превосходит $n+1$.

Таким образом, имеет место

Следствие 2. Если система (1) удовлетворяет условиям (A) и имеет $n+1$ осей симметрии N - типа, то эта система не имеет ни одной прямой изоклины, отличной от осей симметрии N - типа и проходящей через начало координат (0,0).

Пример 6. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = y(1 + x^2 - 2y^2), \quad \frac{dy}{dt} = -x(1 - 2x^2 + y^2) \qquad (8)$$

имеет четыре оси симметрии N - типа: $y = 0$, $y = x$, $x = 0$, $y = -x$ (они же прямые изоклины).

Других прямых изоклин, проходящих через начало координат, система не имеет.

Фазовый портрет системы изображен на рис. 1.

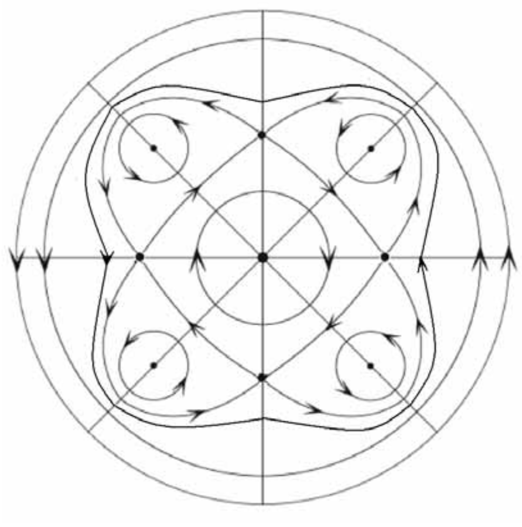

Рис.1. Фазовый портрет системы (8)

Литература

1. *Чересиз В.М.* Об изоклинах полиномиальных векторных полей / В.М. Чересиз // Сибирский математический журнал. – 1994. – Т. 35. № 6. – С. 1390 – 1396.

2. *Тлячев В.Б.* Оси симметрии полиномиальных дифференциальных систем на плоскости / В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо, Д.С. Ушхо // Известия Саратовского университета. Новая серия. Серия «Математика. Механика. Информатика». – 2010. – С. 41 – 49.

3. *Сибирский К.С.* Принцип симметрии и проблема центра / К.С. Сибирский // Ученые записки Кишиневского госуниверситета. – 1955. – Т. XVII. – С. 27 – 34.

Estimation of number of straight lines isoclines which is passing through a special point of system of the differential equations

A.D. Uskho

For plane polynomial differential system estimations for number of straight-lines isoclines which are passing through a singular point of system are discovered. Examples of such systems having maximum number of straight-lines isoclines are considered.

 © 2011 Физическое Общество РА