АЛГОРИТМ ЧИСЛЕННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФИЛЬТРАЦИОННЫХ И ЕМКОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ

М.М. Шумафов, Р. Цей

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Рассмотрен алгоритм численного решения обратной задачи теории фильтрации методом интегральных преобразований. Разработка алгоритма основана на замене с помощью соответствующего интегрального преобразования исходного дифференциального уравнения, описывающего процесс нестационарной фильтрации реального газа, интегральным соотношением, из которого после дискретизации получается система линейных алгебраических уравнений относительно искомых параметров. Предложенный алгоритм прост и эффективен.

1. Введение. Задача определения фильтрационных и емкостных параметров по натуральным наблюдениям газоносного пласта – одна из актуальных задач нефтегазовой науки. Решению этой задачи посвящено большое число работ. Обзор этих работ можно найти, например, в [1]. В разных работах использованы различные подходы и применяются *различные* методы. Подавляющее большинство этих методов основано на использовании решений прямых краевых задач. Однако им присущи серьезные недостатки [2]. Главный из них это низкая точность определяемых параметров. В [2] показано, что причины недостатков существующих методов коренятся в исходном принципе построения этих методов, а именно, в использовании решений прямых краевых задач. В [2] предложен метод интегральных преобразований позволяющий находить искомые параметры без использования решений уравнения фильтрации. Суть этого метода (называемого еще методом модулирующих функций) заключается в том, что исходное дифференциальное уравнение, описывающее процесс нестационарной фильтрации газа, умножается на специальные так называемые «модулирующие функции», а затем применяется интегральное преобразование (интегрирование по частям). В результате, происходит «освобождение» от операции дифференцирования решение исходного дифференциального уравнения и «переход» этой операции к модулирующим функциям, которые можно выбрать достаточно гладкими. Таким образом, исходное дифференциальное уравнение заменяется его интегральным аналогом. Преимущество перехода от исходного дифференциального уравнения к его интегральному аналогу состоит в том, что в последнем отсутствуют производные от экспериментальных функций. Последнее позволяет ликвидировать трудности, связанные с непосредственным дифференцированием экспериментальных функций. Эти трудности проистекают из-за того, что операция дифференцирования экспериментальных функций является некорректной (две функции, «близкие» по ординатам, вообще говоря, могут быть не «близки» по значениям производных). Идея описанного вкратце выше метода для решения обратных задач восходит к работам [3,4]. Теоретическое обоснование применения этого метода к различным задачам, в том числе и для решения обратной задачи теории фильтрации, дано в работе [2].

В настоящей статье приводится алгоритм для численного решения в задаче определения фильтрационных и емкостных параметров газоносного пласта. При этом газоносный пласт мы рассматриваем как систему «вход-выход», и задача тогда состоит в идентификации параметров этой системы.

2. Постановка задачи. Процесс неустановившейся фильтрации газа в неоднородной по коллекторским свойствам пористой среде описывается следующим нелинейным дифференциальным уравнением параболического типа [5]

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[A(x,y,p)\frac{\partial p^2}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[A(x,y,p)\frac{\partial p^2}{\partial y}\right]=b(x,y)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z(p)}\right)+c(x,y,t), \qquad (1)$$

где

$$A(x,y,p)=\frac{k(x,y)h(x,y)}{\mu(p)z(p)}, \tag{2}$$

$$b(x,y)=2\alpha(x,y)m(x,y)h(x,y),\ c(x,y,t)=2p_{am}Q(x,y,t),\ (x,y)\in D\subset\ \ {}^{2}, t\in[0,T].$$

Здесь $p(x,y,t)$ - давление в точке пласта в момент времени t, $k(x,y)$ - коэффициент проницаемости, $m(x,y)$ - коэффициент пористости, $h(x,y)$ - эффективная толщина пласта, $\alpha(x,y)$ - коэффициент газонасыщенности, $\mu(p)$ и $z(p)$ - соответственно коэффициенты динамической вязкости и сверхпроницаемости газа при давлении p и пластовой температуре, $Q(x,y,t)$ - объемный расход газа, отнесенный к единице площади пласта в точке пласта (x,y) в момент времени t к атмосферному давлению p_{am} и пластовой температуре $T_{пл}$.

Задача состоит в том, чтобы найти функции $a(x,y)=k(x,y)h(x,y)$ и $b(x,y)=m(x,y)h(x,y)$ при условии, что известны $\mu(p), z(p), c(x,y,t)$ и $p(x,y,t)$.

Для решения поставленной задачи применим метод модулирующих функций. Как будет видно ниже, для этого не потребуется информация о начально-краевых условиях для уравнения (1), (2). И в этом также одно из преимуществ применяемого метода перед существующими.

3. Переформулировка задачи. Введем в рассмотрение функцию

$$\psi(p)=\int_0^p \frac{2\xi d\xi}{\mu(\xi)z(\xi)}.$$

Так как

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}=\frac{1}{\mu(p)z(p)}\cdot\frac{\partial p^2}{\partial x}$$

$$\frac{\partial\psi}{\partial y}=\frac{1}{\mu(p)z(p)}\cdot\frac{\partial p^2}{\partial y},$$

то используя функцию $\psi(p)$, уравнение (1), (2) можно переписать так:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right]=b(x,y)+c(x,y,t). \tag{3}$$

Разложим по формуле Тейлора функции $a(x,y)$ и $b(x,y)$:

$$a(x,y)=\sum_{k=0}^{n_p}\sum_{m=0}^{k}a_{km}x^{k-m}y^m+..., \tag{4}$$

$$b(x,y)=\sum_{k=0}^{n_p}\sum_{m=0}^{k}b_{km}x^{k-m}y^m+.... \tag{5}$$

(Предполагается, что функции $a(x,y)$ и $b(x,y)$ достаточно гладкие). Задавшись определенной степенью точности и взяв в разложениях (4) и (5) необходимое количество слагаемых, заменим функции $a(x,y)$ и $b(x,y)$ соответствующими полиномами Тейлора. Тогда исходная задача по определению коэффициентов $a(x,y)$ и $b(x,y)$ уравнения (1), (2) сводится (приближенно) к задаче определения коэффициентов a_{km} и b_{km} при известных $z(p)$, $c(x,y,t)$ и $p(x,y,t)$.

4. Теоретическое решение задачи. Пусть область задания уравнения (1), (2) представляет собой прямоугольник

$$\Pi=\left\{(x,y)\in\ \ {}^{2}: x\in[x_1,x_2], y\in[y_1,y_2]\right\}.$$

Возьмем функции (модулирующие функции) $f(x)\in c^2[x_1,x_2]$ и $g(y)\in c^2[y_1,y_2]$, $\varphi(t)\in c^1[0,\mathrm{T}]$, удовлетворяющие условиям:

$$f(x_1)=f(x_2)=0; \quad f'(x_1)=f'(x_2)=0, \tag{6}$$

$$g(y_1)=g(y_2)=0; \quad g'(y_1)=g'(y_2)=0, \tag{7}$$

$$\varphi(0)=\varphi(\mathrm{T})=0. \tag{8}$$

Умножим уравнение (3) на функцию $f(x)g(y)\varphi(t)$ и проинтегрируем полученное соотношение по объему параллелепипеда $V=[x_1,x_2]\times[y_1,y_2]\times[0,\mathrm{T}]$.

$$\begin{gathered}\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] f(x)g(y)\varphi(t)dV+\int_V \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] f(x)g(y)\varphi(t)dV=\\ =\int_V b(x,y)\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{p}{z(p)}\right) f(x)g(y)\varphi(t)dV+\int_V c(x,y,t)f(x)g(y)\varphi(t)dV\end{gathered} \tag{9}$$

Произведя интегрирование по частям с учетом условий (6)-(8), будем иметь для каждого слагаемого.

Для первого слагаемого:

$$\begin{gathered}\int_V \frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] f(x)g(y)\varphi(t)dxdydt=\int_0^{\mathrm{T}}\varphi(t)dt\int_{y_1}^{y_2}g(y)dy\int_{x_1}^{x_2}\frac{\partial}{\partial x}\left[a(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}\right] f(x)dx=\\ =-\int_0^{\mathrm{T}}\varphi(t)dt+\int_{y_1}^{y_2}g(y)dy\int_{x_1}^{x_2}a(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial x}f'(x)dx=\int_0^{\mathrm{T}}\varphi(t)dt\int_{y_1}^{y_2}g(y)dy\int_{x_1}^{x_2}\psi[a(x,y)f'(x)]'_x dx\end{gathered} \tag{10}$$

Аналогично, для остальных слагаемых имеем:

$$\int_V \frac{\partial}{\partial y}\left[a(x,y)\frac{\partial\psi}{\partial y}\right] f(x)g(y)\varphi(t)dxdydt=\int_0^{\mathrm{T}}\varphi(t)dt\int_{x_1}^{x_2}f(x)dy\int_{y_1}^{y_2}\psi[a(x,y)g'(y)]'_y dy, \tag{11}$$

$$\int_V b(x,y)\frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{p}{z(p)}\right] f(x)g(y)\varphi(t)dxdydt=-\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\int_{y_1}^{y_2}g(y)b(x,y)\int_0^{\mathrm{T}}\varphi'(t)\frac{p}{z(p)}dt. \tag{12}$$

С учетом равенств (10)-(12) соотношение (9) перепишется так:

$$\begin{gathered}\int_0^{\mathrm{T}}\varphi(t)dt\int_{y_1}^{y_2}g(y)dy\int_{x_1}^{x_2}\psi[a(x,y)f'(x)]'_x dx+\int_0^{\mathrm{T}}\varphi(t)dt\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\int_{y_1}^{y_2}\psi[a(x,y)g'(y)]'_y dy+\\ +\int_{x_1}^{x_2}f(x)dx\int_{y_1}^{y_2}g(y)b(x,y)dy\int_0^{\mathrm{T}}\varphi'(t)\frac{p}{z(p)}dt=\int_V c(x,y,t)f(x)g(y)\varphi(t).\end{gathered} \tag{13}$$

Теперь пользуясь разложениями (4) и (5) после некоторых элементарных преобразований получим следующее соотношение для определения неизвестных a_{km} и b_{km}:

$$\sum_{k=0}^{n_p}\sum_{m=0}^{k}\left(\alpha_{km}a_{km}+\beta_{km}b_{km}\right)=\gamma, \tag{14}$$

где

$$\begin{gathered}\alpha_{km}=\int_V \varphi(t)\{g(y)[x^{k-m}y^m f''(x)+(k-m)x^{k-m-1}y^m f'(x)]+\\ +f(x)[x^{k-m}y^m g''(y)+mx^{k-m}y^{m-1}g'(y)]\}\psi dV,\end{gathered} \tag{15}$$

$$\beta_{km}=\int_V f(x)g(y)\varphi'(t)x^{k-m}y^m\frac{p}{z(p)}dV, \tag{16}$$

$$\gamma = \int_V c(x,y,t) f(x) g(y) \varphi(t) dV. \qquad (17)$$

Число n_a неизвестных a_{km} $(k = 0,1...n_p, m = 0,1,...k)$ равно $n_a = (n_p + 1)(n_p + 2)/2,$ причем $n_b = n_a$ (n_b - число неизвестных b_{km}).

Для однозначного определения $n_e = 2n_a$ неизвестных $a_{km,} b_{km}$ необходимо иметь n_e линейных алгебраических уравнений с отличным от нуля детерминантом. Для этого следует умножить уравнение (3) последовательно на модулирующие функции $f_j(x), g_j(y)$ и $\varphi_j(t)$ $(j = 0,1,..., n_e - 1),$ удовлетворяющие условиям (6), (7) и проинтегрировав полученные равенства по частям, как и выше (см. (10)-(12)), получим следующую систему алгебраических уравнений, аналогичных (14)

$$\sum_{k=0}^{n_p} \sum_{m=0}^{k} \left(\alpha_{km}^{(j)} a_{km} + \beta_{km}^{(j)} b_{km} \right) = \gamma^{(j)} \quad (j = 0,1, n_e - 1), \qquad (18)$$

или в векторно-матричной форме

$$Au = v, \qquad (19)$$

где $u - n_e$ - мерный вектор неизвестных коэффициентов a_{km}, b_{km}, A - матрица размера $n_e \times n_e$, элементами которых являются известные коэффициенты $\alpha_{km}^{(j)}, \beta_{km}^{(j)}, V - n_e$ - мерный вектор из известных чисел $\gamma^{(j)}$.

Пользуясь произвольностью выбора модулирующих функций (лишь бы они были достаточно гладкими и удовлетворяли условиям (6)-(8)), можно добиться выполнения условия $\det A \neq 0.$ Для преодоления трудностей, связанных с некорректностью плохо обусловленных систем, необходимо еще обеспечить «близость» числа обусловленности $condA$ матрицы A в (19) к единице. Последнее можно достигнуть варьированием модулирующих функций. Из формул (18) видно, что задача определения неизвестных параметров сводится к решению линейной системы (19) с коэффициентами в виде тройных интегралов.

Вычисление тройных интегралов сводится к вычислению повторных, а для вычисления последних можно применить широко известные методы численного интегрирования, например, формулы Ньютона – Котеса (а также и другие формулы; см. [6]). Для решения линейной системы (19) можно применить, например, хорошо известный метод исключения Гаусса с выбором главного элемента.

5. Алгоритм для определения фильтрационных и емкостных параметров. Из предыдущего пункта 4 получаем следующий алгоритм для (приближенного) нахождения фильтрационных и емкостных параметров газоносного пласта.

Шаг 1. Разложить искомые функции $a(x, y)$ и $b(x, y)$ по формуле Тейлора и отбросив остаточные члены, заменить их соответствующими полиномами Тейлора. Степень точности определения искомых параметров $a(x, y)$ и $b(x, y)$ определяется числом членов их разложения. Для увеличения точности определения $a(x, y)$ и $b(x, y)$ следует брать полиномы Тейлора более высокой степени.

Шаг 2. Умножить уравнение (3) на достаточно гладкие модулирующие функции $f_j(x), g_j(y)$ и $\varphi_j(t)$, удовлетворяющие условиям (6)-(8) и проинтегрировать полученные уравнения.

Шаг 3. Применить формулу интегрирования по частям к тем интегралам, в которых входят производные экспериментальной функции необходимое число раз с тем, чтобы «переместить» операцию дифференцирования с экспериментальной функции $p(x, y, t)$ на соответствующие модулирующие функции.

Шаг 4. Получить систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_{km}, b_{km} разложений (4), (5).

Шаг 5. Вычислить коэффициенты полученной линейной системы, представляющие собой тройные интегралы. Для этого свести тройные интегралы к повторным и применить к последним известные квадратурные формулы, например, Ньютона – Котеса, Гаусса, Монте – Карло и другие.

Шаг 6. Решить систему линейных уравнений (см. Шаг 5.) одним из известных методов (метод Ньютона, метод исключения Гаусса, методы Якоби, Гаусса – Зейделя и др.)

Шаг 7. Найденные значения неизвестных коэффициентов a_{km}, b_{km} подставить в разложения (4) и (5).

6. Заключение. Приведенный выше алгоритм для (приближенного) вычисления фильтрационных и емкостных параметров газоносного пласта основан на решении обратной задачи теории фильтрации методом модулирующих функций с помощью интегральных преобразований. В применяемом методе отсутствует принципиальный источник погрешностей – использование решений прямых краевых задач. Источником погрешностей могут служить лишь используемые численные методы интегрирования.

Литература

1. *Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н.* Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. – Москва – Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 368 с.
2. *Георгиевский В.Б.* Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1971. – 328 с.
3. *Loeb J., Cahen G.* Extraction, a partik des enregistrements de measures, des parametres dynamiques dum system // Automatisme. – 1963. – No 12. – P. 17-28.
4. *Loeb J., Cahen G.* More about process identification // Trans. On Autom. Control. – 1965. – P. 359-361.
5. *Закиров С.Н., Лапук Б.Б.* Проектирование и разработка газовых месторождений. – М.: Недра, 1977. – 39 с.
6. *Бахвалов Н.С., Жидков Н.П., Кобельков Г.М.* Численные методы. - М.: Наука, 1987. – 600 с.

Numerical algorithm of solution of the determinating filtration and capacitor parameters problem

M.M. Shumafov, R. Tsej

The algorithm of the numerical solution of the inverse problem of the theory of a filtration is considered by a method of integrated transformations. Algorithm working out is based on replacement by means of corresponding integrated transformation of the initial differential equation describing process of a non-stationary filtration of real gas, an integrated parity from which after digitization the system of the linear algebraic equations concerning required parameters turns out. The offered algorithm is simple and effective.

