2008 г. №13

Т р у д ы Ф О Р А

ОБ ОГРАНИЧЕННОСТИ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К.С. Мамий

Адыгейский государственный университет, г.Майкоп

Изучается поведение решений на бесконечности нелинейного дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве.

В настоящей работе изучается поведение решений на бесконечности следующего нелинейного дифференциального уравнения

$$y''(t) + A(t)y(t) = f(t, y(t), y'(t)) \quad (0 \leqslant t < \infty) \tag{1}$$

в гильбертовом пространстве H. Здесь $A(t)$ при каждом t $(0 \leqslant t < \infty)$ линейный, вообще говоря, неограниченный оператор, действующий в H; $f(t, u, v)$ – нелинейный неограниченный оператор, действующий из топологического произведения $[0, \infty) \times U \times H$ в H, где U – некоторое линейное множество, плотное в H; $y(t)$ – функция, со значениями в H.

Для различных частных видов уравнения (1) аналогичный вопрос изучался в конечномерном случае многими авторами (см., например, [1, 3, 4]). В случае вещественного гильбертова пространства он рассматривался в работах [5, 6]. В этой работе обобщаются некоторые результаты из выше упомянутых работ, а также получены новые результаты.

1. Будем говорить, что оператор $A(t)$ обладает свойством (A), если он при каждом t $(0 \leqslant t < \infty)$ является самосопряженным, неотрицательным и имеет не зависящую от t область определения $D(A)$.

Решением уравнения (1), соответствующим начальным данным $y_0, y'_0 \in H$, будем называть функцию $y(t)$ со значениями в H, обладающую следующими свойствами:

1) существуют и непрерывны (в смысле нормы H) $y'(t)$ и $y''(t)$ соответственно при $t \geqslant 0$ и $t > 0$.

2) Функции $A(t)y(t)$, $A^{1/2}(t)y'(t)$ непрерывны на $(0, \infty)$.

3) $y(t)$ удовлетворяет уравнению (1) для любого $t > 0$ и

$$\lim_{t\to 0} ||y(t) - y_0|| = 0, \quad \lim_{t\to 0} ||y'(t) - y'_0|| = 0 \tag{2}$$

Пусть E – множество функций $y(t)$ $(0 \leqslant t < \infty)$ со значениями в H, дифференцируемых по $t \geqslant 0$ и таких, что при каждом t $y(t) \in D(A^{1/2})$. Введем обозначение

$$||y(t)||_E = ||y'(t)|| + ||A^{1/2}(t)y(t)||.$$

В этом пункте будем предполагать, что H – комплексное гильбертово пространство.

Теорема 1. Предположим, что $A(t)$ обладает свойством (A) и что оператор-функция $A^{1/2}(t)$ сильно дифференцируема при $t \geqslant 0$ на $D(A^{1/2})$, причем

$$Re(A_t^{1/2}(t)A^{1/2}(t)h, h) \leqslant \frac{\alpha(t)}{2}(A(t)h, h), \quad h \in D(A), \tag{3}$$

где $\alpha(t)$ - некоторая непрерывная функция, определенная на $[0, \infty)$, а $A_t^{1/2}(t) = \frac{d}{dt}A^{1/2}(t)$.

Предположим, далее, что нелинейный оператор $f(t, u, v)$ действует из $[0, \infty) \times D(A^{1/2}) \times H$ в H и удовлетворяет условию

$$||f(t, u, v)|| \leqslant \beta(t)(||A^{1/2}(t)u|| + ||v||), \quad u \in D(A^{1/2}), \quad v \in H, \tag{4}$$

© К.С. Мамий

где $\beta(t)$ – неотрицательная непрерывная функция.

Тогда для любого решения уравнения (1), для которого $y_0 \in D(A^{1/2})$ и функция $A^{1/2}(t)y(t)$ непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$, справедлива оценка

$$||y(t)||_E \leqslant \sqrt{2}||y(0)||_E \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t h(\tau)d\tau\right] \quad (t \geqslant 0), \tag{5}$$

где $h(t) = \max\{3\beta(t), \beta(t) + \alpha(t)\}$.

Доказательство. Пусть $y(t)$ – решение уравнения (1). Тогда легко показать, что функция

$$\varphi(t) = ||y'(t)||^2 + ||A^{1/2}(t)y(t)||^2 \tag{6}$$

дифференцируема на $(0, \infty)$ и что ее производная в силу уравнения (1) будет равна

$$\varphi'(t) = 2Re(A_t^{1/2}(t)A^{1/2}(t)y(t), y(t)) + 2Re(f(t, y(t), y'(t)), y'(t)),$$

откуда в силу условий (3) и (4) получаем

$$\begin{aligned}
&\varphi'(t) \leqslant \alpha(t)||A^{1/2}(t)y(t)||^2 + 2\beta(t)(||A^{1/2}(t)y(t)|| + ||y'(t)||) \cdot ||y'(t)|| \leqslant \\
&\leqslant \alpha(t)||A^{1/2}(t)y(t)||^2 + 2\beta(t)||y'(t)||^2 + \beta(t)\big(||A^{1/2}(t)y(t)||^2 + ||y'(t)||^2\big) = \\
&= [\alpha(t) + \beta(t)]||A^{1/2}(t)y(t)||^2 + 3\beta(t)||y'(t)||^2;
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\varphi'(t) \leqslant h(t)\varphi(t),$$

откуда непосредственно следует, что

$$\varphi(t) \leqslant \varphi(0)\exp\left[\int_0^t h(\tau)d\tau\right],$$

или, подставив значение $\varphi(t)$ имеем

$$||y'(t)||^2 + ||A^{1/2}(t)y(t)||^2 \leqslant (||y_0'||^2 + ||A^{1/2}(0)y_0||^2)\exp\left[\int_0^t h(\tau)d\tau\right].$$

Из последнего неравенства непосредственно получается неравенство (5).

Замечание 1. Если в условиях теоремы 1 предположить, что $\int_0^\infty h(\tau)d\tau = M < \infty$ (очевидно, что $h(t) \geqslant 0$), то из оценки (5) следует, что $||y(t)||_E$ ограничена на $[0, \infty)$, а нулевое решение уравнения (1) устойчиво в норме $||||_E$, т. е. $||y(t)||_E < \varepsilon$ для всех $t > 0$, как только $||y(0)||_E < \delta(\varepsilon)$, $\delta(\varepsilon) \leqslant (\varepsilon/\sqrt{2})\exp[-(1/2)M]$.

Если предположить, что оператор $A(t)$ удовлетворяет условию: $(A(t)h, h) \geqslant \gamma||h||^2$, $\gamma \neq const > 0$, $h \in D(A)$, $t \geqslant 0$, то из оценки (5) следует, что будет ограниченной и $||y(t)||_H$ при $t \geqslant 0$.

Для следующего частного вида уравнения (1)

$$y''(t) + A(t)y(t) = B(t, y'(t)) + P(t, y(t)) \tag{1'}$$

справедлива

Теорема 2. Предположим, что оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1 и что для нелинейных операторов $B(t, v)$ и $P(t, u)$, действующих в H, выполнены условия

$$||P(t, u)|| \leqslant \beta(t)||A^{1/2}(t)u||, \quad u \in D(A^{1/2}) \tag{7}$$

$$Re(B(t, v), v) \leqslant \frac{\gamma(t)}{2}||v||^2, \quad v \in D(B) \subset H, \tag{8}$$

где $\beta(t) \geqslant 0$ и $\gamma(t)$ – некоторые непрерывные функции, определенные при $t \geqslant 0$.

 © 2008 Физическое Общество РА

Тогда для любого решения $y(t)$ уравнения $(1')$, для которого $y_0 \in D(A^{1/2})$ и функция $A^{1/2}(t)y(t)$ непрерывно дифференцируема при $t > 0$, имеет место оценка

$$||y(t)||_E \leqslant \sqrt{2}||y(0)||_E \exp\left[\frac{1}{2}\int_0^t \mu(\tau)d\tau\right] \tag{9}$$

где $\mu(t) = \max\{\alpha(t) + \beta(t)\}$.

Доказательство. Рассмотрим снова ту же функцию $\varphi(t)$, что и в теореме 1. Продифференцировав ее, в силу уравнения (1'), получим

$$\varphi'(t) = 2Re(A_t^{1/2}(t)A^{1/2}(t)y(t), y(t)) + 2Re(P(t, y(t)), y'(t)) + 2Re(B(t, y'(t)), y'(t))$$

или в силу условий (3), (7) и (8)

$$\begin{aligned}\varphi'(t) &\leqslant \alpha(t)||A^{1/2}(t)y(t)||^2 + 2\beta(t)||A^{1/2}(t)y(t)|| \cdot ||y'(t)|| + \gamma(t)||y'(t)||^2 \leqslant \\ &\leqslant \alpha(t)||A^{1/2}(t)y(t)||^2\gamma(t) + ||y'(t)||^2 + \beta(t)||A^{1/2}(t)y(t)||^2 + \beta(t)||y'(t)||^2 = \\ &= \Big[\alpha(t) + \beta(t)\Big]||A^{1/2}(t)y(t)||^2 + \Big[\gamma(t) + \beta(t)\Big]||y'(t)||^2;\end{aligned}$$

откуда

$$\varphi'(t) \leqslant \mu(t)\varphi(t).$$

Дальше поступая так же, как и в теореме 1, получаем оценку (9).

Замечание 2. Если предположить, что $\int_0^\infty \mu(t)dt = M < +\infty$, то и здесь остаются в силе все утверждения замечания 1. Далее, заметив, что в отличие от $h(t)$, $\mu(t)$ может принимать значения любого знака, можно предположить, что $\int_0^\infty \mu(t)dt = -\infty$. В таком случае, из оценки (9) следует, что нулевое решение уравнения $(1')$ асимптотически устойчиво в норме $||\ ||_E$, то есть $||\ y(t)\ ||_E \to 0$ при $t \to +\infty$.

Замечание 3. Априорные оценки решений уравнения $(1')$ в случае вещественного гильбертова пространства получены в работе [6] в предположении потенциальности оператора $P(t, u)$ и положительной определенности оператора $A(t)$.

Теорема 3. Пусть $y(t)$ и $z(t)$ — два решения уравнения (1), удовлетворяющие соответственно начальным условиям

$$y(0) = y_0, \quad y'(0) = y_0'$$

$$z(0) = z_0, \quad z'(0) = z_0'.$$

Предположим, что оператор $A(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1, а оператор $f(t, u, v)$ подчинен оператору $A(t)$ в том смысле, что он действует из топологического произведения $[0, \infty) \times D(A^{1/2}) \times H$ в H и для $u_1, u_2 \in D(A^{1/2})$, $v_1, v_2 \in H$ и $t \geqslant 0$ удовлетворяет условию

$$||f(t, u_1, v_1) - f(t, u_2, v_2)|| \leqslant \beta(t)\big(||A^{1/2}(t)[u_1 - u_2]|| + ||v_1 - v_2||\big),$$

где $\beta(t)$ – непрерывная функция, определенная на $[0, \infty)$.

Пусть, далее, $z_0 - y_0 \in D(A^{1/2})$ и функция $A^{1/2}(t)[z(t) - y(t)]$ непрерывно дифференцируема на $(0, \infty)$. Тогда имеет место оценка

$$||z(t) - y(t)||_E \leqslant \sqrt{2}||z(0) - y(0)||_E \exp\frac{1}{2}\int_0^t h(\tau)d\tau, \quad (t \geqslant 0) \tag{10}$$

где $h(t) = \max\{3\beta(t), \beta(t) + \alpha(t)\}$.

Для доказательства этой теоремы достаточно рассмотреть функцию

$$\psi(t) = ||A^{1/2}(t)u(t)|| + ||u'(t)||,$$

где $u(t) = z(t) - y(t)$ и продифференцировать ее в силу тождества

$$u''(t) + A(t)u(t) = f(t, z(t), z'(t)) - f(t, y(t), y'(t)).$$

 © 2008 Физическое Общество РА

Замечание 4. Из оценки (10) вытекает, что решение задачи (1)-(2) единственно. В самом деле, если $z_0 = y_0$, $z_0' = y_0'$, то $||y(t) - z(t)||_E = 0$, откуда

$$z'(t) \equiv y'(t),$$

т. е. $y(t) \equiv z(t) + c$. $(t \geqslant 0)$, но так как $y_0 = z_0$, то $c = 0$ и $y(t) \equiv z(t)$.

Из оценки (10) также следует, что решение задачи (1)-(2) устойчиво в норме $||\ ||_E$, если $\int_0^\infty h(t)dt = M < \infty$, т. е. $||z(t) - y(t)||_E < \varepsilon$ для всех $t > 0$, как только

$$||z(0) - y(0)||_E < \delta(\varepsilon) \quad (\delta(\varepsilon) \leqslant \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \exp(-\frac{1}{2}M)).$$

Замечание 5. Теорему, аналогичную теореме 3, легко сформулировать и для уравнения (1′).

2. В этом пункте мы будем предполагать, что H – вещественное гильбертово пространство и будем рассматривать в нем следующее уравнение

$$y''(t) + A(t, y'(t)) + B(t)P(y(t)) = 0 \quad (0 \leqslant t < \infty). \tag{11}$$

Здесь $A(t, v)$ – некоторый нелинейный (вообще говоря, неограниченный) оператор, действующий в H, с областью определения $D(A)$; $B(t)$ – самосопряженный (неограниченный) оператор в H при каждом $t \in [0, \infty)$; $P(u)$ – нелинейный оператор, действующий в H; $y(t)$ – функция со значениями в H. Будем говорить, что оператор $P(u)$ обладает свойством (P), если 1) он определен и непрерывен во всем H; 2) некоторое линейное, плотное в H, множество переводит в $D(B)$ – область определения оператора $B(t)$; 3) оператор $P(u)$ является потенциальным, т. е. существует такой вещественный функционал $f(u)$, что для всех $u \in H$

$$\lim_{\eta \to 0} \frac{f(u + \eta h) - f(u)}{\eta} = (P(u), \eta),$$

или $P(u) = gradf(u)$.

Очевидно, что функционал $f(u)$ будет непрерывным, так как из непрерывности $P(u)$ следует, что $gradf(u)$ есть производная Фреше функционала $f(u)$ (см. [2]).

Теорема 4. Пусть выполнены следующие условия:

1) область определения $D(B)$ и область значений $R(B)$ оператора $B(t)$ не зависят от t.

2) $(B(t)h, h) > 0$ для всех $h \in D(B), h \neq 0$ и $t \geqslant 0$.

3) Оператор-функции $B(t)$ и $B^{-1}(t)$ сильно непрерывно дифференцируемы по $t \geqslant 0$ соответственно на $D(B)$ и $R(B)$, причем при каждом $t \geqslant 0$ и любом $x \in R(B)$ $\left[\frac{d}{dt}B^{-1}(t)\right]x \in D(B)$.

4) $\int_0^t (B'(\tau)h(\tau), h(\tau))d\tau \geqslant 0 \quad (t > 0)$ для любой непрерывной функции $h(t) \in D(B)$

5) При каждом $t \geqslant 0 \quad A(t, x(t)) \in R(B)$, где $x(t) \in D(A)$, и $\int_0^t (B^{-1}(\tau)A(\tau, x(\tau)), x(\tau))d\tau \geqslant 0$, для любой непрерывной функции $x(t) \in D(A)$.

6) Оператор $P(u)$ обладает свойством P.

Тогда для любого решения $y(t)$ уравнения (11), для которого $y'(t) \in R(B)$ при всех $t \geqslant 0$, имеет место оценка

$$||B^{-1/2}(t)y'(t)||^2 + 2f(y(t)) \leqslant ||B^{-1/2}(0)y_0'||^2 + 2f(y_0) \quad (t \geqslant 0). \tag{12}$$

Доказательство. Пусть $y(t)$ удовлетворяет уравнению (11) для всех $t > 0$. Рассмотрим функцию

$$g(t) = (B^{-1}(t)y'(t), y'(t)) + 2f(y(t)). \tag{13}$$

Нетрудно убедиться в том, что функция $g(t)$ дифференцируема при $t > 0$ и что ее производная в силу уравнения (11) будет равна

$$\varphi'(t) = \left(\left[\frac{d}{dt}B^{-1}(t)\right]y'(t), y'(t)\right) - 2(B^{-1}(t)A(t, y'(t)), y'(t)).$$

 © 2008 Физическое Общество РА

Проинтегрировав это равенство от нуля до $t > 0$ получим

$$g(t) = g(0) + \int_0^t \left(\left[\frac{d}{dt}B^{-1}(\tau)\right]y^{'}(\tau), y^{'}(\tau)\right)d\tau - 2\int_0^t (B^{-1}(\tau)A(\tau, y^{'}(\tau)), y^{'}(\tau))d\tau.$$

В силу условия 5) второй интегральный член справа неположителен. Покажем, что и первый интегральный член так же неположителен. В силу условия 3) тождество

$$B(t)B^{-1}(t)x \equiv x, \quad x \in R(B).$$

дифференцируемо и

$$\frac{d}{dt}\left[B(t)B^{-1}(t)x\right] \equiv B^{'}(t)B^{-1}(t)x + B(t)\left[\frac{d}{dt}B^{-1}(t)\right]x \equiv 0,$$

откуда

$$\left[\frac{d}{dt}B^{-1}(t)\right]x \equiv -B^{-1}(t)B^{'}(t)B^{-1}(t)x, \quad x \in R(B).$$

Теперь уже ясно, в силу условия 4), что

$$\int_0^t \left(\left[\frac{d}{dt}B^{-1}(\tau)\right]y^{'}(\tau), y^{'}(\tau)\right)d\tau \leqslant 0.$$

Таким образом

$$g(t) \leqslant g(0),$$

откуда следует теорема.

Следствие 1. Если функционал $f(u)$ ограничен снизу и $\lim_{R\to\infty}\min_{||u||=R} f(u) = +\infty$, то из оценки (12) непосредственно вытекает, что решения уравнения (11) ограничены, на $[0, \infty)$, а произведение их удовлетворяют неравенству

$$||B^{-1/2}(t)y^{'}(t)|| \leqslant c = const < \infty, \quad \text{при} \;\; t \geqslant 0.$$

Замечание 6. Требование ограниченности снизу функционала $f(u)$ существенно, так как в бесконечномерных пространствах из непрерывности функционала не следует его ограниченность ни сверху, ни снизу (см. [2]), вопреки ошибочному утверждению в работе [5].

Теорема 5. Предположим, что выполнены условия:

1) Оператор $P(u)$ обладает свойством (P) и удовлетворяет условиям следствия 1.

2) При каждом $t \geqslant 0$ $\;B(t)$ – самосопряженный ограниченный оператор в H.

3) Оператор-функция $B(t)$ слабо непрерывно дифференцируема при $t \geqslant 0$, причем

$$\int_0^\infty ||B'(t)||dt = H < \infty$$

4) Существуют, такие числа $M > m > 0$, что для всех $t \geqslant 0$ и $h \in H$

$$m||h||^2 \leqslant (B(t)h, h) \leqslant M||h||^2$$

5) $(B^{-1}(t)A(t, v), v) \geqslant -\frac{\gamma(t)}{2}||v||^2, \quad v \in D(A), \quad t \geqslant 0,$

$$\int_0^\infty \gamma^t(t)dt = \gamma < \infty,$$

где $\gamma^t(t)$ - неотрицательная часть функции $\gamma(t)$.

Тогда все решения уравнения (11) ограничены на $[0, \infty)$ вместе с первыми производными.

 © 2008 Физическое Общество РА

Доказательство. Снова мы рассмотрим функцию $g(t)$, определяемую по формуле (13). В силу наших предположений она дифференцируема при $t > 0$ и производная ее в силу уравнения (11) удовлетворяет оценке:

$$
\begin{gathered}
g'(t) = -(B^{-1}(t)B'(t)B^{-1}(t)y'(t), y'(t)) - 2(B^{-1}(t)A(t, y'(t)), y'(t)) \leqslant \\
\leqslant ||B^{-1}(t)||^2 ||B'(t)|| \cdot ||y'(t)||^2 + \gamma(t)||y'(t)||^2 \leqslant \\
\leqslant \frac{1}{m^2}||B'(t)|| ||y'(t)||^2 + \gamma^t(t)||y'(t)||^2 \leqslant \alpha(t)||y'(t)||^2,
\end{gathered}
$$

где $\alpha(t) = \frac{1}{m^2}||B^{'}(t)|| + \gamma^t(t)$.

Интегрируя последнее неравенство от нуля до $t > 0$ получим

$$
g(t) \leqslant g(0) + \int_0^t \alpha(\tau)||y^{'}(\tau)||^2 d\tau. \tag{14}
$$

Вспоминая, чему равно $g(t)$ и учитывая условие 4) теоремы и ограниченность снизу функционала $f(u)$ получим, что

$$
g(t) = (B^{-1}(t)y^{'}(t), y^{'}(t)) + 2f(y(t)) \geqslant \frac{1}{M}||y^{'}(t)||^2 + L,
$$

где L нижняя грань функционала $2f(u)$.

Таким образом, из (14) получаем, что

$$
\frac{1}{M}||y^{'}(t)||^2 + L \leqslant \varphi(0) + \int_0^t \alpha(\tau)||y^{'}(\tau)||^2 d\tau
$$

или

$$
||y^{'}(t)||^2 \leqslant c_0 + M\int_0^t \alpha(\tau)||y^{'}(\tau)||^2 d\tau
$$

где $c_0 = M|\varphi(0) - L|$, откуда по лемме Гроноула-Беллмана

$$
||y^{'}(t)||^2 \leqslant c_0 \exp\left(M\int_0^t \alpha(\tau)d\tau\right), \quad (t \geqslant 0).
$$

Следовательно, в силу того, что $\int_0^\infty \alpha(\tau)d\tau < \infty$,

$$
||y^{'}(t)||^2 \leqslant c_1 = const < \infty. \quad (t \geqslant 0)
$$

Теперь из неравенства (14) следует, что

$$
(B^{-1}(t)y^{'}(t), y^{'}(t)) + 2f(y(t)) \leqslant \varphi(0) + c_1\int_0^t \alpha(\tau)d\tau
$$

или, так как $(B^{-1}(t)y^{'}(t), y^{'}(t)) \geqslant 0$, то

$$
f(y(t)) \leqslant c_2 = const < \infty
$$

для всех $t \geqslant 0$. Поэтому $||y(t)|| \leqslant c_3 = const < \infty, \quad t \geqslant 0$.

Теорема доказана полностью.

Замечание 7. Теоремы 4 и 5 являются обобщениями соответствующих результатов работ [3,5] не только на бесконечномерный случай, но и в случае конечномерного пространства. Заметим также, что в работе [3] требуется, чтобы функционал $f(u)$ был дважды непрерывно дифференцируем, что является излишним.

Теорема 6. Пусть выполнены следующие условия:

1) Область определения $D(B)$ оператора $B(t)$ не зависит от t и оператор-функция $B(t)$ сильно непрерывна при $t \geqslant 0$ на $D(B)$

 © 2008 Физическое Общество РА

2) $(B(t)h,h) \geqslant \gamma(t)||h||^2, \quad h \in D(B)$, где $\gamma(t)$ - некоторая функция, определенная и непрерывная на $[0,\infty)$, и такая, что

$$\gamma(t) \geqslant \gamma_0 > 0 \quad \text{и} \quad \lim_{t\to+\infty} \gamma(t) = +\infty.$$

3) Квадратичная форма $(B^{-1}(t)h,h)$ монотонно убывает по t на $[0,\infty)$ для всех $h \in H, \quad h \neq 0$.

4) $(B^{-1}(t)A(t,x(t)),x(t)) \geqslant 0$ для всех $x(t) \in D(A), \quad t \geqslant 0$.

5) Оператор $P(u)$ удовлетворяет условию (P).

Тогда для любого решения $y(t)$ уравнения (11) справедлива оценка

$$||B^{-1/2}(t)y'(t)||^2 + 2f(y(t)) \leqslant ||B^{-1/2}(0)y_0'|| + 2f(y_0) \quad (t \geqslant 0)$$

Доказательство. Из условий 1) и 2) следует, что оператор-функция $B^{-1}(t)$ сильно непрерывна и удовлетворяет неравенствам

$$0 < (B^{-1}(t)h,h) \leqslant \mu(t)||h||^2 \leqslant \mu_0||h||^2$$

для всех $h \in H, \quad h \neq 0$ и $t \geqslant 0$, где $\mu(t) = \frac{1}{\gamma(t)}, \quad \mu_0 = \frac{1}{\gamma_0}$.

Из этих неравенств и условий 2) и 3) вытекает, что при любом $h \in H, \quad h \neq 0$, функция $(B^{-1}(t)h,h)$ монотонно убывает к нулю при $t \to +\infty$, а, следовательно, она имеет ограниченную вариацию на $[0,\infty)$. Поэтому существует интеграл Стильтьеса

$$\int_0^t ([dB^{-1}(t)]h,h) = \lim_{\max|\tau_{i+1}-\tau_i|\to 0} \sum_{i=0}^{n-1} ([B^{-1}(\tau_{i+1}) - B^{-1}(\tau_i)]h,h) \quad h \in H$$

где $0 = \tau_0 < \tau, < ... < \tau_n = t$ - произвольное разбиение отрезка $[0,t]$, причем, очевидно, что

$$\int_0^t ([dB^{-1}(\tau)]h,h) \leqslant 0. \tag{15}$$

Пусть теперь $y(t)$ - произвольное решение уравнения (11). Тогда (11) можно записать в виде

$$B^{-1}(t)y''(t) + B^{-1}(t)A(t,y'(t)) + P(y(t)) = 0.$$

Умножив это тождество скалярно на $y'(t)$ и учитывая условие 4), получим

$$(B^{-1}(t)y''(t),y'(t)) + (P(y(t)),y'(t)) \leqslant 0,$$

или, проинтегрировав последнее неравенство от нуля до $t > 0$, имеем

$$\int_0^t (B^{-1}(\tau)dy'(\tau),y'(\tau)) + \int_0^t (P(y(\tau)),y'(\tau))d\tau \leqslant 0. \tag{16}$$

Нетрудно проверить, что

$$\int_0^t (B^{-1}(\tau)dy'(\tau),y'(\tau)) = \frac{1}{2}(B^{-1}(\tau)y'(\tau),y'(\tau))\Big|_0^t - \int_0^t ([dB^{-1}(\tau)]y'(\tau),y'(\tau))$$

или, в силу (15),

$$\int_0^t (B^{-1}(\tau)dy'(\tau),y'(\tau)) \geqslant \frac{1}{2}(B^{-1}(t)y'(t),y'(t)) - \frac{1}{2}(B^{-1}(0)y_0',y_0').$$

Тогда из (16), учитывая свойства $P(u)$, получаем

$$\frac{1}{2}||B^{-1/2}y'(t)||^2 + f(y(t)) \leqslant \frac{1}{2}||B^{-1/2}(0)y_0'|| + f(y_0),$$

 © 2008 Физическое Общество РА

что и требовалось доказать.

Замечание 8. Отметим, что в условиях этой теоремы справедливо следствие 1.

Рассмотрим теперь следующее уравнение

$$y'' + A(t, y') + a(t)By + b(t)P(y) = 0, \quad (0 \leqslant t < \infty) \tag{17}$$

где $a(t)$ и $b(t)$ - непрерывные на $[0, \infty)$ скалярные функции. Тогда справедлива

Теорема 7. Предположим, что

1) Функция $a(t) > 0$ и монотонно возрастает к $+\infty$ при $t \to +\infty$.

2) При всех $t \geqslant a_0 \geqslant 0 \quad \frac{b(t)}{a(t)} \geqslant b_0 > 0$ и $V_{a_0}^{\infty} \frac{b(t)}{a(t)} < \infty$.

3) B – самосопряженный постоянный (вообще говоря неограниченный) оператор в H, причем $(Bh, h) \geqslant 0$ для всех $h \in H$.

4) $(A(t, x(t)), x(t)) \geqslant 0$ для всех $x(t) \in D(A), \quad t \geqslant 0$.

5) Оператор $P(u)$ удовлетворяет условию (P), причем для всех $u \in H \quad f(u) \geqslant 0$ и $\lim_{R \to +\infty} \min_{||u||=R} f(u) = +\infty$.

Тогда для любого решения $y(t)$ уравнения (17) справедливы оценки

$$||y(t)|| \leqslant c_1, \quad ||B^{1/2}y(t)|| \leqslant c_2, \quad ||y^{'}(t)|| \leqslant c_2\sqrt{a(t)}, \quad (t \geqslant t_0 \geqslant 0)$$

где c_1, c_2 – некоторые постоянные.

Доказательство. Пусть $y(t)$ – решение уравнения (17). Умножив тождество (17) на $2\frac{y^{'}(t)}{a(t)}$, получим,

$$2\frac{(y^{''}(t), y^{'}(t))}{a(t)} + 2\frac{(A(t, y^{'}(t)), y^{'}(t))}{a(t)} + 2(By(t), y^{'}(t)) + 2\frac{b(t)}{a(t)}(P(y(t)), y^{'}(t)) = 0,$$

или, учитывая условия 1), 5) теоремы 7 и что

$$2(By(t), y^{'}(t)) = \frac{d}{dt}(B^{1/2}y(t), B^{1/2}y(t))$$

(последнее тождество следует из того, что $y^{'}(t) \in D(B^{1/2})$) и функция $B^{1/2}y^{'}(t)$ непрерывна, по определению решения, имеем

$$\frac{1}{a(t)}\frac{d||y^{'}(t)||^2}{dt} + \frac{d}{dt}||B^{1/2}y(t)||^2 + 2\frac{b(t)}{a(t)}\left(P(y(t)), \frac{dy(t)}{dt}\right) \leqslant 0.$$

Интегрируя это неравенство от некоторого $t_0 \geqslant a_0$ до $t > t_0$, получим

$$\int_{t_0}^{t} a^{-1}(t)d||y^{'}(t)||^2 + ||B^{1/2}y(t)||^2 - ||B^{1/2}y(t_0)||^2 + 2\int_{t_0}^{t} \frac{b(t)}{a(t)}(gradf(y(t)), dy(t)) \leqslant 0.$$

или, после интегрирования по частям и переноса постоянных и интегральных членов в правую часть неравенства, будем иметь

$$\begin{gathered} a^{-1}(t)||y^{'}(t)||^2 + ||B^{1/2}y(t)||^2 + 2\tfrac{b(t)}{a(t)}f(y(t)) \leqslant \\ \leqslant ||B^{1/2}y(t_0)||^2 + a^{-1}(t_0)||y^{'}(t_0)||^2 + 2\tfrac{b(t_0)}{a(t_0)}f(y(t_0)) + \\ + \textstyle\int_{t_0}^{t} ||y^{'}(t)||^2 da^{-1}(t) + 2\int_{t_0}^{t} f(y(t))d\left[\tfrac{b(t)}{a(t)}\right] \end{gathered} \tag{18}$$

Обозначим совокупность постоянных членов в правой части (18) через c_0. Очевидно, что $c_0 \geqslant 0$. Далее, так как $a^{-1}(t)$ монотонно убывает, то $\int_{t_0}^{t} ||y^{'}(t)||^2 da^{-1}(t) \leqslant 0$. Поэтому неравенство (18) можно записать в виде

$$a^{-1}(t)||y^{'}(t)||^2 + ||B^{1/2}y(t)||^2 + 2\frac{b(t)}{a(t)}f(y(t)) \leqslant c_0 + 2\int_{t_0}^{t} f(y(\tau))d\left[\frac{b(\tau)}{a(\tau)}\right]. \tag{19}$$

 © 2008 Физическое Общество РА

Предположим, что t_0 выбрано настолько большим, что одновременно выполняются неравенства
$$\frac{b(t)}{a(t)} \geqslant b_0; \quad V_t^\infty \frac{b(t)}{a(t)} \leqslant \frac{b_0}{2}$$
для всех $t \geqslant t_0$.

Тогда из (19) получим
$$2b_0 f(y(t)) \leqslant c_0 + 2 \max_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} f(y(\tau)) \cdot V_{t_0}^t \frac{b(t)}{a(t)}. \tag{20}$$

Так как функция $f(y(t))$ непрерывна на $[t_0, t]$, то существует точка $t^* \in [t_0, t]$ такая, что
$$L = f(y(t^*)) = \max_{t_0 \leqslant \tau \leqslant t} f(y(\tau)).$$

Положим в (20) $t = t^*$. Тогда
$$2b_0 L \leqslant c_0 + b_0 L,$$
откуда
$$L \leqslant c_0 b_0^{-1},$$
или
$$f(y(\tau)) \leqslant c_0 b_0^{-1} \quad \text{для всех} \quad \tau \in [t_0, t].$$
Но, так как t – произвольное число ($> t_0$) и $c_0 b_0^{-1}$ не зависит от t, то
$$f(y(t)) \leqslant c_0 b_0^{-1} \quad \text{для всех} \quad t \geqslant t_0,$$
откуда следует, что $||y(t)|| \leqslant c_1 < +\infty$ для $t \geqslant t_0$.

Теперь из (19) непосредственно видно, что
$$||B^{1/2} y(t)|| \leqslant c_2; \quad ||y^{'}(t)|| \leqslant c_2 a(t). \ (c_2 = 2c_0), \quad t \geqslant t_0.$$

Теорема доказана.

Литература

1. *Borg G.* Bounded solutions of a system of differential equations // Arkiv för Mat., Astr., Fys., – 1948. – Band 34B. – No 24. – P. 1.

2. *Вайнберг М.М.* Вариационные методы исследования нелинейных операторов. – М.: ГИТТЛ, 1956. – 344 с.

3. *Клоков Ю.А.* Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. – 1958. – Т. 13. – Вып. 2(80). – С. 189Ц194. (См. также Некоторые теоремы об ограниченности и устойчивости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений вида $\ddot{x}_i + a_i(t) \sum\limits_{k=0}^{n} b_{ik}(t)\dot{x}_k + a_i(t)\frac{\partial F}{\partial x_i} = 0$. // НДВШ. – 1958. – No 4. – С. 55.)

4. *Скрипник В.П.* Некоторые критерии ограниченности решений систем нелинейных дифференциальных уравнений // Матем. сб.. – 1961. – Т. 54(96). – No4. – С. 469-488. (См. также Украинский математ. журнал. – 1962. – Т. 14. – No 1. – С. 57.)

5. *Сеидов З.Б.* Исследование решения нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка в гильбертовом пространстве // Уч. зап. АзГУ. – 1962. – Т. 4. – С. 49.

6. *Мамедов Я.Д.* О некоторых свойствах решений нелинейных уравнений гиперболического типа в гильбертовом пространстве // ДАН СССР. – 1964. – Т. 158. – No 1. – С. 45.

7. *Ладыженская О.А.* О нестационарных операторных уравнениях и их приложениях к линейным задачам математической физики // Мат. сб.. – 1958. – Т. 45(87). – No 2. – С.123-158.

8. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. – М.: ИЛ., 1962. – 830 с.

 © 2008 Физическое Общество РА

About boundedness of solutions of some nonlinear second-kind differential equation in a Hilbert space

K.S. Mamiy

The behaviours of solutions on infinity of the nonlinear differential second-kind equation in a Hilbert space is studied.

 © 2008 Физическое Общество РА