

МОДЕЛЬНЫЕ И ЭТАЛОННЫЕ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ, СООТВЕТСТВУЮЩИЕ КАНОНИЧЕСКИМ ОСОБЕННОСТЯМ СКЛАДКИ И СБОРКИ

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенев

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп
Кубанский государственный университет, г. Краснодар

В статье, ограничиваясь уравнениями, порожденными каноническими формами A_2, A_3 и кривыми l_i , введенными в [3], показано, что соответствующие модельные уравнения являются при некоторых условиях и эталонными уравнениями для сингулярно возмущенных уравнений первого и второго порядков.

В статье [3] нами был предложен алгоритм построения сингулярно возмущенных обыкновенных дифференциальных уравнений, моделирующих нарушение условия устойчивости в отдельной точке с использованием теории особенностей дифференцируемых отображений. В данной работе изучаются конкретные обыкновенные дифференциальные уравнения первого и второго порядков, порожденные каноническими особенностями складки и сборки.

1. Особенность складки (A_2) задается формулой $V(x, t) = (1/3)x^3 + tx$. Геометрия особенности складки (рис. 1 и 2) дана, например, в [4]. В качестве карты для M (критическое многообразие) берется X , общая точка M имеет вид $(x, -x^2)$. Особая точка отображения χ (естественная проекция многообразия на ось) единственна ($t = 0$, бифуркационное множество состоит из одной точки). На рис. 2 показано распределение знаков функции $F = -\partial V / \partial x$ и критических точек функции V .



Рис.1. Функция $V(x, t)$ при $t > 0$ критических точек не имеет; при $t < 0$ имеет один локальный минимум и один локальный максимум; $t = 0$ – сепаратриса.

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенев



Рис. 2. $M = \left\{ (t, x) : \frac{\partial V}{\partial x} = 0 \Leftrightarrow x^2 + t = 0 \right\}$ – критическое многообразие

1.1. Модельное уравнение первого порядка согласно [3] имеет вид: $\varepsilon \frac{dx}{dt} = F = -\frac{\partial V}{\partial x}$

или

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = -x^2 - t. \quad (1)$$

Уравнение (1) представляет собой сингулярно возмущенное уравнение Риккати.

Очевидно, что корень $x = \sqrt{-t}$ при $t < 0$ устойчив вправо, а $x = -\sqrt{-t}$ при $t < 0$ устойчив влево.

При $t = 0$ теряется условие устойчивости по первому приближению. Задачу Коши ставим для уравнения (1) следующим образом:

$$x(t_0) = x_0, \quad t_0 < 0, \quad t_1 = 0, \quad t \in [t_0, 0], \quad (2)$$

где x_0 – некоторое фиксированное (не зависящее от ε) число, причем

$$x_0 > -\sqrt{-t_0}.$$

Сделаем в (1), (2) замену

$$x = \varepsilon^{\frac{1}{3}} z; \quad \tau = \varepsilon^{\frac{1}{3}} t; \quad z_0(\varepsilon) = \varepsilon^{\frac{1}{3}} x_0, \quad (3)$$

получаем для z задачу Коши для уравнения Риккати $\frac{dz}{d\tau} = -z^2 - \tau;$

$z(0, \varepsilon) = z_0(\varepsilon), \quad \tau < 0$, которое, как известно [2], имеет единственное решение при $\tau < 0$.

После обратной замены получаем, что задача Коши (1), (2) для модельного уравнения имеет единственное решение, причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow +0} x(t, \varepsilon) = \sqrt{t}, \quad \text{при } t \in (t_0, 0).$$

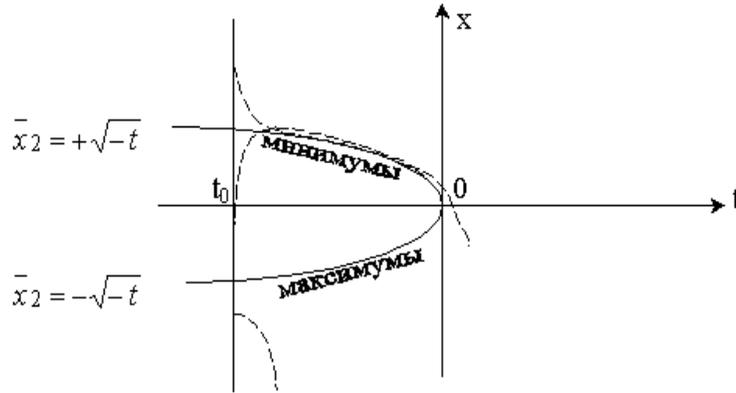


Рис. 3. Схема поведения интегральных кривых (пунктир) задачи Коши (1), (2)

Если $x_0 < -\sqrt{-t_0}$, то решение задачи Коши экспоненциально стремится к $-\infty$ при $\varepsilon \rightarrow +0$.

1.2. Модельное уравнение второго порядка имеет вид

$$\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} = -x^2 - t. \tag{3}$$

Сделав замену

$$x = -\varepsilon^{\frac{2}{5}} z; \quad \tau = \varepsilon^{-\frac{4}{5}} t, \tag{4}$$

получаем первое уравнение Пенлеве

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = z^2 + \tau. \tag{5}$$

Известно, что это уравнение приводит к новым трансцендентным функциям. Из геометрии складки (рис.2) следует, что для (3) естественно ставить краевую задачу

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad t_1 < 0. \tag{6}$$

Обозначим через $Z(\tau, \tau_0, \tau_1, z_0, z_1)$ решение краевой задачи

$$Z(\tau_0) = z_0; \quad Z(\tau_1) = z_1, \quad \tau_0 \leq \tau \leq \tau_1, \tag{7}$$

(величины в (7) согласованы с заменой (4)) для уравнения (5), тогда решение краевой задачи (4), (6) имеет вид

$$x(t, \mu) = -\varepsilon^{\frac{2}{5}} Z\left(\varepsilon^{-\frac{4}{5}} t, \varepsilon^{-\frac{4}{5}} t_0, -\varepsilon^{-\frac{2}{5}} x_0, -\varepsilon^{-\frac{2}{5}} x_1\right). \tag{8}$$

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенев

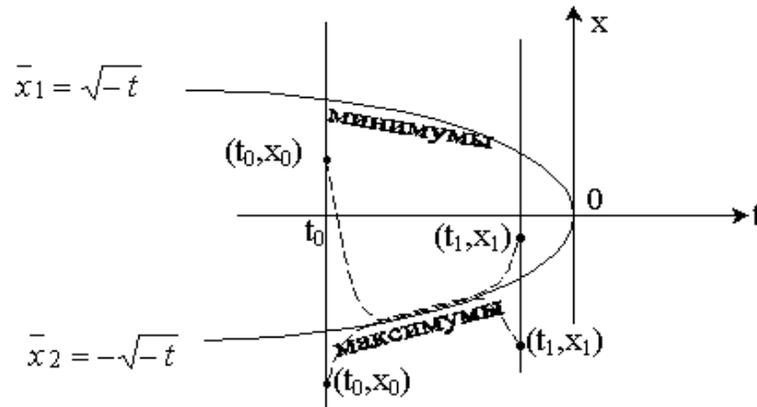


Рис. 4. Схема поведения интегральных кривых при различных краевых условиях для уравнения (3)

2. Особенность Уитни (сборки) (A_3) задается формулой

$$V(x, a, b) = \pm \left(\frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} a x^2 + b x \right),$$

причем особенность со знаком “–” называется двойной сборкой (рис.5). Поскольку один из параметров “a” или “b” может быть взято за t, то сборка порождает следующие потенциальные функции:

$$V(x, t, b) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} t x^2 + b x; \quad V(x, a, t) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} a x^2 + t x;$$

$$V(x, t, b) = -\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} t x^2 - b x; \quad V(x, a, t) = -\frac{1}{4} x^4 - \frac{1}{2} a x^2 - t x,$$

каждая, в свою очередь порождает по два модельных уравнения – первого и второго порядков.

Подробно рассмотрим только функцию

$$V(x, t, b) = V_1(x, t, b) = \frac{1}{4} x^4 + \frac{1}{2} t x^2 + b x,$$

полагая для простоты $F = \frac{\partial V}{\partial x}$, что не нарушает общности, но избавляет от некоторых замен в модельном уравнении.

Геометрия сборки (рис. 5–7) дана, например, в [4].

Сепаратриса $(B_1 \cup B_2)$, определяемая уравнениями $3x^2 + t = 0$, $x^3 + t x + b = 0$ в пространстве (t, b) , разбивает ее на две открытые области $(E \cup I)$, представляющие функции с одной критической точкой (E) и функции с тремя критическими точками (I) , а также на бифуркационное множество $B = B_1 \cup B_2$, представляющее неморсовские функции. Точка сборки P – трижды вырожденная критическая точка. Критическое многообразие является гладким, поскольку карта $(x, t, -x^3 - t x)$ дает глобальные координаты на всем M (матрица Якоби имеет ранг 2 независимо от t, x).

Труды ФОРА

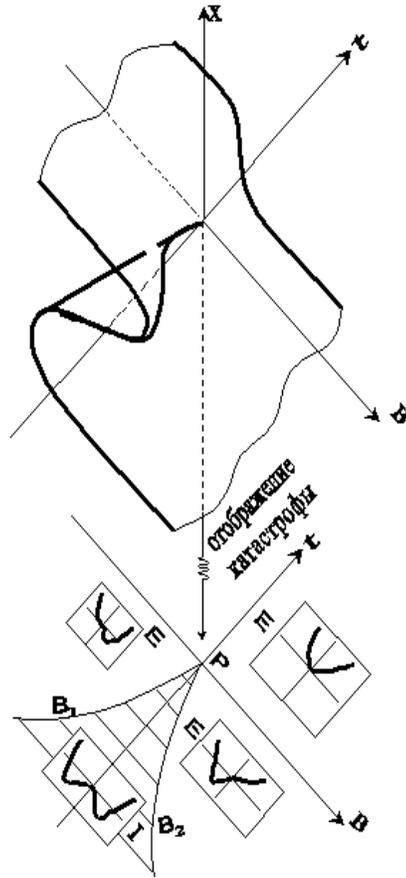


Рис. 5 Каноническая особенность A_3

Рис. 6 и 7 (см. далее) позволяют легко представить топологию интегральных кривых модельных уравнений при различных начальных и граничных условиях. Разная топология критических многообразий на рис. 6 и 7 говорит о структурной неустойчивости в смысле теории особенностей критического многообразия при $b = 0$, в отличие от $b \neq 0$, и это определяет различное поведение интегральных кривых модельного уравнения при $\varepsilon \rightarrow +0$.

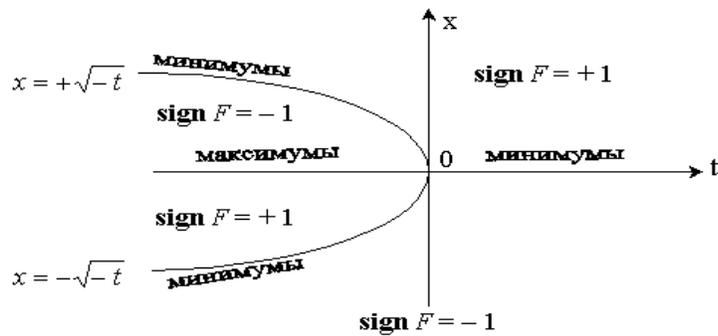


Рис. 6. Сечение многообразия M плоскостью $b = 0$.

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенюв

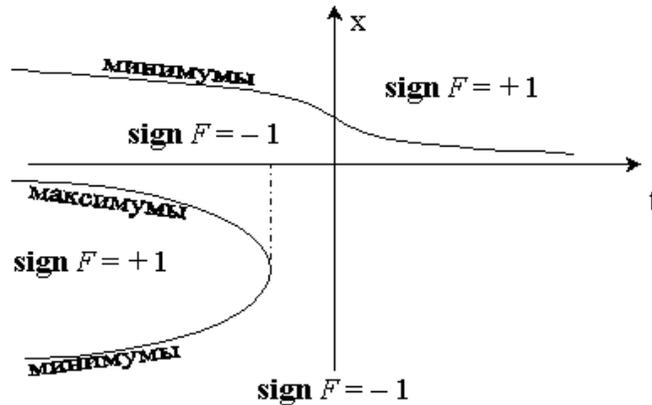


Рис. 7. Сечение многообразия V плоскостью $b \neq 0$ при малых $b < 0$

2.1. Модельное уравнение первого порядка для сборки имеет вид

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = \frac{\partial V}{\partial x} = F$$

или

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = x^3 + tx + b. \quad (9)$$

Замена

$$x = \varepsilon^{\frac{1}{4}} z; \quad \tau = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} t; \quad b_1 = \varepsilon^{-\frac{3}{4}} b \quad (10)$$

приводит это уравнение к уравнению Абеля 1-го рода

$$\frac{dz}{d\tau} = z^3 + \tau z + b_1.$$

В случае $b = 0$ можно получить решение в явном виде.

В случае $b \neq 0$ решение $x(t, \varepsilon)$ выражается через решение $z(\tau, \varepsilon)$ уравнения Абеля.

2.2. Модельное уравнение второго порядка для сборки имеет вид

$$\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} = \frac{\partial V}{\partial x} = F$$

или

$$\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} = x^3 + tx + b. \quad (11)$$

Из рис. 6 и 7 следует, что для уравнения (11) интерес представляет краевая задача

$$x(t_0) = x_0, \quad x(t_1) = x_1, \quad t_0 < 0, \quad t_1 > 0. \quad (12)$$

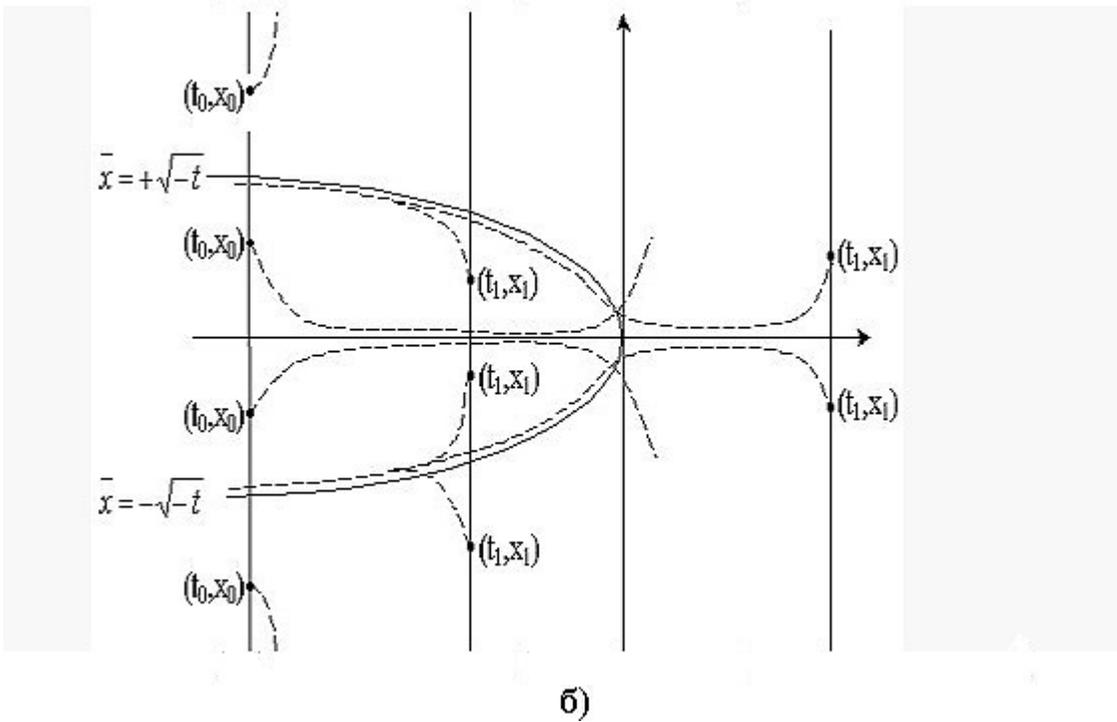
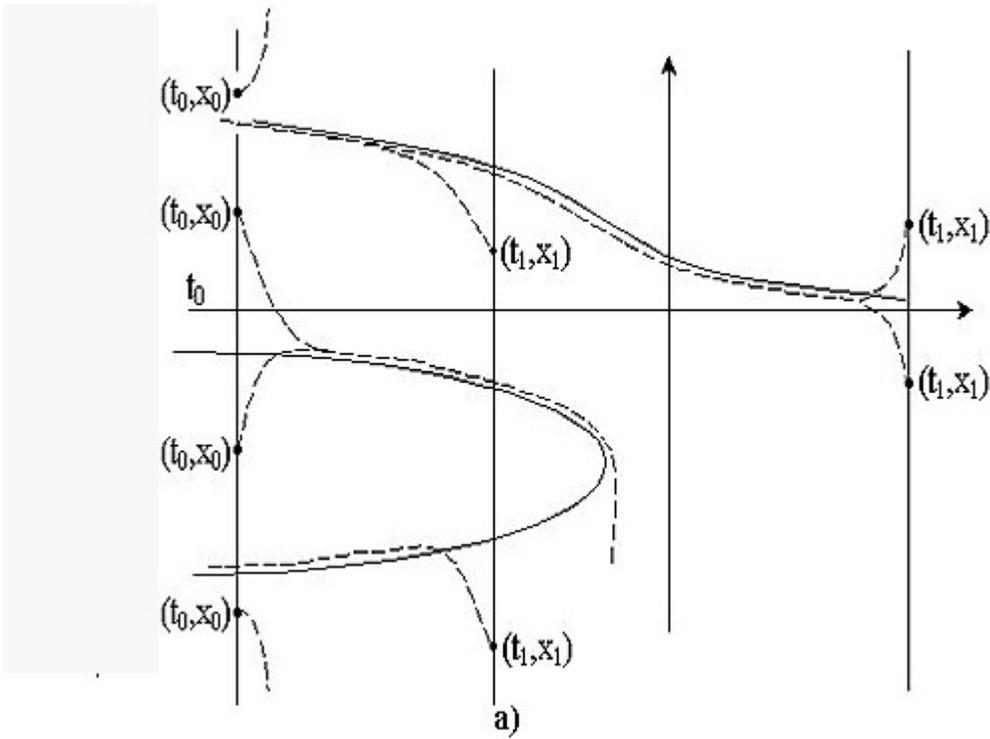


Рис.8. Схема поведения интегральных кривых задачи Коши при различных (t_0, x_0) , и (t_1, x_1) :

а) случай $b < 0$; б) случай $b = 0$

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенюв

Замена переменных

$$x = \varepsilon^{\frac{1}{6}} z; \quad \tau = \varepsilon^{-\frac{1}{3}} t; \quad b_1 = \varepsilon^{-\frac{1}{2}} b \quad (13)$$

приводит это уравнение к уравнению Пенлеве

$$\frac{d^2 z}{d\tau^2} = z^3 + \tau z + b_1. \quad (14)$$

Известно, что это уравнение порождает существенно новые трансцендентные функции [1].

Пусть $Z(\tau, \tau_0, \tau_1, z_0, z_1)$ – решение уравнения (14), удовлетворяющее граничным условиям

$$Z(\tau_0) = z_0; \quad Z(\tau_1) = z_1, \quad \tau_0 < 0, \quad \tau_1 > 0, \quad (15)$$

тогда решение (11), (12), с учетом замен (13) имеет вид

$$x(t, \mu) = \varepsilon^{\frac{1}{6}} Z \left(\varepsilon^{-\frac{1}{3}} t, \varepsilon^{-\frac{1}{3}} t_0, -\varepsilon^{-\frac{1}{6}} x_0, \varepsilon^{-\frac{1}{3}} t_1, -\varepsilon^{-\frac{1}{6}} x_1, \varepsilon^{-\frac{1}{2}} b_1 \right). \quad (16)$$

Схема поведения интегральных кривых краевой задачи (11), (12) в случае $b < 0$ представлено на рис. 9.

Поведение интегральных кривых краевой задачи в случае $b_1 = 0$ представлено на рис.10.

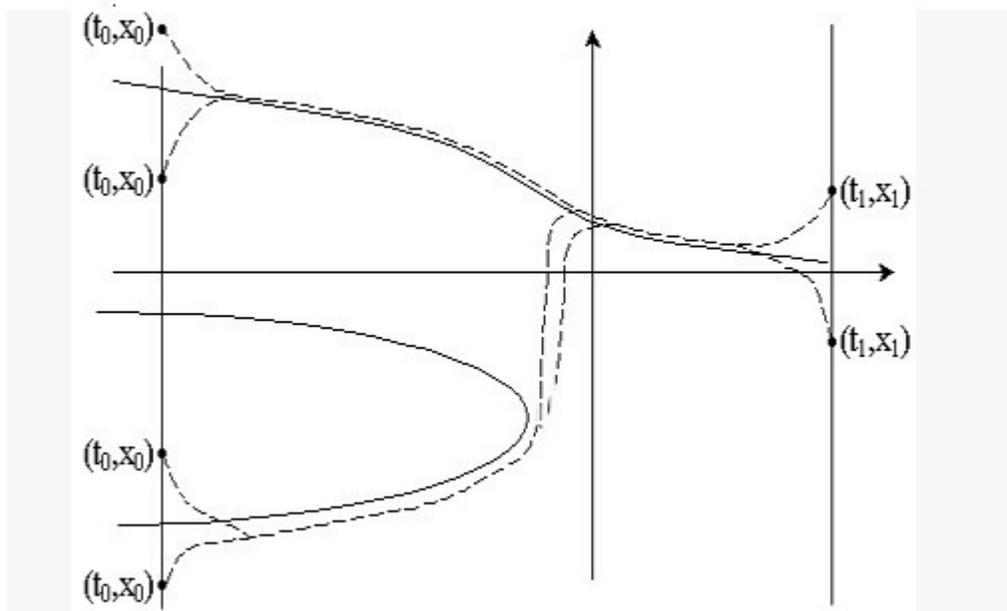


Рис. 9. Схема поведения интегральных кривых краевой задачи (3.28), (3.29) при различных $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ и $b < 0$ (пунктирная линия).

Т р у д ы Ф О Р А

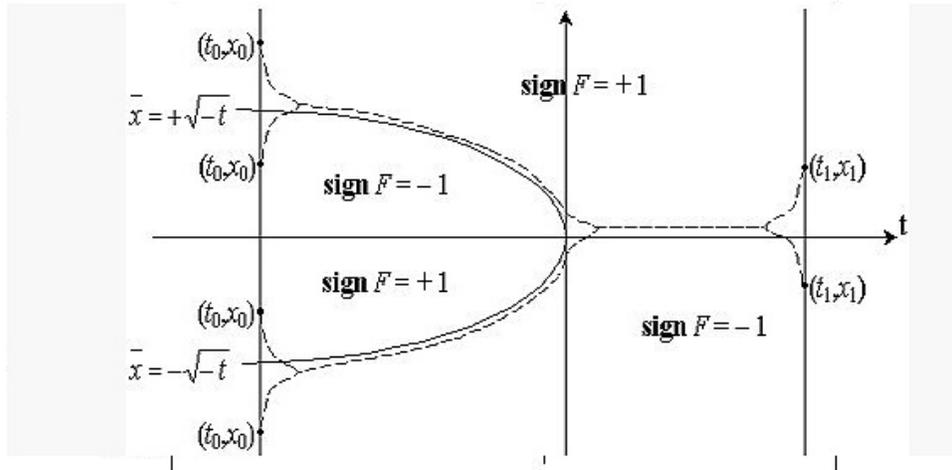


Рис.10. Схема поведения интегральных кривых краевой задачи при различных $x(t_0) = x_0$, $x(t_1) = x_1$ (пунктирная линия) при $b = 0$.

Поскольку приведенные выше модельные уравнения сводятся к достаточно хорошо изученным уравнениям [1, 2] и доказательство справедливости схем поведения несложен, то сформулируем лишь один результат в этом направлении, который будет использован нами при анализе одной краевой задачи из мембранной электрохимии.

Теорема 1. Краевая задача

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = x^3 + tx, \quad \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x_0, \quad x(t_1, \varepsilon) = x_1, \quad t_0 < 0, \quad t_1 > 0$$

где x_0, x_1 не зависят от ε , имеет единственное решение $x(t, \varepsilon)$, причем

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} x(t, \varepsilon) = \begin{cases} \sqrt{-t}, & x_0 \in (0, +\infty), t \in (t_0, 0) \\ -\sqrt{-t}, & x_0 \in (-\infty, 0), t \in (t_0, 0) \\ 0, & t \in (0, t_1). \end{cases}$$

Доказательство теоремы можно получить исходя из асимптотики функций Пенлеве [1] либо из принципа максимума Ю.П. Боглаева [3].

Для некоторых сингулярно возмущенных задач уравнения являются нелинейными эталонными уравнениями. Сформулируем один из результатов в этом направлении.

Теорема 2. Пусть справедливы условия:

1. Функции $a(t), b(t), d(t)$ непрерывно дифференцируемы в $[t_0, t_1]$, причем $a(t) > 0, t \in [t_0, t_1]$.
2. $D(t) = b^2(t) - 4a(t)d(t) > 0, t \in [t_0, t_1], D(t_1) = 0, D'(t_1) \neq 0$.

Тогда

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенев

1. Задача Коши

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = a(t)x^2 + b(t)x + d(t);$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x_0, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$$

имеет единственное решение $x(t, \varepsilon)$, причем $|x(t, \varepsilon) - \hat{x}(t, \varepsilon)| \leq c\varepsilon^{\frac{1}{3}}, t \in [t_0, t_1], \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$, где

$$\hat{x}(t, \varepsilon) = \frac{\varphi'(t)}{a(t)} R(\varphi(t), \varepsilon) - \frac{b(t)}{2a(t)}, \quad \varphi(t) = -\left(\frac{3}{2} \int_t^{t_1} \sqrt{D(s)} ds\right)^{\frac{2}{3}}, \quad R(\zeta, \varepsilon) - \text{решение задачи Коши:}$$

$$\varepsilon \frac{dR}{d\zeta} = R^2 + \zeta, \quad \zeta \in (\zeta_0, 0);$$

$$R(\zeta_0) = \frac{a(t_0)x_0 + b(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad \zeta_0 = \varphi(t_0);$$

2. Краевая задача

$$\varepsilon \frac{d^2x}{dt^2} = a(t)x^2 + b(t)x + d(t);$$

$$x(t_0, \varepsilon) = x_0, \quad x(t_1, \varepsilon) = x_1, \quad t \in [t_0, t_1], \quad \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$$

имеет единственное решение $x(t, \varepsilon)$, причем $|x(t, \varepsilon) - \tilde{x}(t, \varepsilon)| \leq c\varepsilon^{\frac{1}{3}}, t \in [t_0, t_1], \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$, где

$$\tilde{x}(t, \varepsilon) = \frac{\varphi'(t)}{a(t)} Z(\varphi(t), \varepsilon) - \frac{b(t)}{2a(t)}; \quad \varphi(t) = -\left(\frac{3}{2} \int_t^{t_1} \sqrt{D(s)} ds\right)^{\frac{2}{3}}, \quad Z(\zeta, \varepsilon) - \text{решение краевой задачи}$$

$$\varepsilon \frac{d^2Z}{d\zeta^2} = Z^2 + \zeta, \quad \zeta \in (\zeta_0, 0), \quad \zeta_0 = \varphi(t_0);$$

$$Z(\zeta_0, \varepsilon) = \frac{a(t_0)x_0 + b(t_0)}{\varphi'(t_0)}, \quad Z(0, \varepsilon) = \frac{a(t_1)x_1 + b(t_1)}{\varphi'(t_1)}.$$

Докажем п. 1. Очевидно, что функция $\varphi(t)$ непрерывно дифференцируема на $[t_0, t_1]$ и $\varphi'(t) > 0$. Определяя по непрерывности $\varphi'(t)$ в точке t_1 , получим $\varphi'(t_1) > 0$, следовательно, функция $\varphi(t)$ строго возрастает от $\varphi(t_0) < 0$ до $\varphi(t_1) = 0$ при $t \in [t_0, t_1]$. Сделав замену переменных

$$t = \varphi^{-1}(\zeta), \quad \zeta \in [\zeta_0, 0], \quad \zeta_0 = \varphi(t_0), \quad Z(t, \varepsilon) = \frac{\varphi'(t)}{a(t)} y(\zeta, \varepsilon),$$

получим для $y(\zeta, \mu)$ задачу Коши:

Т р у д ы Ф О Р А

$$\varepsilon \frac{dy}{d\xi} = y^2 + \xi + \varepsilon \Theta_1(\xi)y + \varepsilon \Theta_2(\xi);$$

$$y(\xi_0) = y_0 = \frac{a(t_0)x_0 + b(t_0)}{\varphi(t_0)},$$

где $\Theta_1(\xi) = [a(t) - \varphi'(t)a'(t)(\varphi'^2(t))] |_{t = \varphi^{-1}(s)}$.

Из теоремы 3 [3] следует $|y(\xi(\xi, \varepsilon) - R(\xi(\xi, \varepsilon))| \leq c\varepsilon^{\frac{1}{3}}, \xi \in [\xi_0, 0], \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}]$,

что и доказывает первую часть.

Докажем п. 2. Аналогично п. 1 после замены приходим к уравнению

$$\varepsilon \frac{d^2 y}{d\xi^2} = y^2 + \xi + \varepsilon \Theta_1(\xi) + \varepsilon \Theta_2(\xi)y + \varepsilon \Theta_3(\xi) \frac{dy}{d\xi}$$

с соответствующими граничными условиями $y(\xi_0) = z_0, y(0) = z_1$, причем функции $O_i(\xi), i = 1, 2, 3$ непрерывны при $\xi \in [\xi_0, 0]$. Для доказательства п. 2 теперь достаточно учесть неравенство

$$|y(t, \varepsilon) - Z(\xi, \varepsilon)| \leq c\varepsilon^{\frac{1}{3}}, \xi_0 \leq \xi \leq 0, \varepsilon \in (0, \bar{\varepsilon}].$$

Замечание. Функции $R(\xi, \varepsilon)$ и $Z(\xi, \varepsilon)$ явно выражаются через функции Эйри и Пенлеве. Соответствующие формулы не приводятся из-за громоздкости.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках темы 1.4.08 Единого заказа/наряда.

Литература

1. Громак В.И., Лукашевич Н.А. Аналитические свойства решений уравнений Пенлеве. - Минск: Университетское, 1990. - 156 с.
2. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. - М.: Наука, 1976. - 576 с.
3. Мамий Д.К., Лаврентьев А.В., Коваленко А.В., Уртенев М.Х. Нелинейные обыкновенные дифференциальные уравнения с точками поворота // Труды ФОРА. - 2010. - № 15. - С. 75-81.
4. Постон Т., Стюарт И. Теория катастроф и ее приложения. - М.: Мир, 1980. - 608 с.

Modelling and standarting singular perturbed equations of the first and second orders corresponding to canonical singularities of a tuck and assemblage

D.K. Mamiy, A.V. Lavrentev, A.V. Kovalenko, M.H. Urtenov

In paper it is shown, that the modelling equations generated by initial forms and special curves are under some conditions the reference equations for it is singular the perturbed equations of the first and second orders.