2010 г № 15

Труды ФОРА

НЕЛИНЕЙНЫЕ ОБЫКНОВЕННЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С ТОЧКАМИ ПОВОРОТА

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп
Кубанский государственный университет, г. Краснодар

В статье дано обобщение и классификация понятия точек поворота для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений на основе теории особенностей дифференцирумых отображений.

Рассмотрим сингулярно возмущенную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\mu\frac{dx}{dt}=F(x,t)\ . \tag{1}$$

Пусть существует такая достаточно гладкая функция $v(x,t){:}E^n\times R\to R,$ что

$$F(x,t)=-\frac{\partial v}{\partial x}(x,t), \tag{2}$$

где $\partial v/\partial x$ – градиент функции $v(x,t)$, взятый только по x. Систему (1) с условием (2) назовем квазиградиентной системой, поскольку присоединенная по А.Н. Тихонову система [9]:

$$\frac{dz}{d\tau}=-\frac{\partial v}{dz}(z,t)$$

будет градиентной, зависящей от t, как от параметра.

Наряду с квазиградиентной системой будем рассматривать и квазиградиентную ньютоновскую систему уравнений:

$$\mu\frac{d^2x}{dt^2}=-\frac{\partial v}{dx}(x,t). \tag{3}$$

Вырожденная по отношению к (1) и (3) система уравнений имеет вид

$$F(t,x)=0\,. \tag{4}$$

Пусть эта система имеет решение $x=\overline{x}(t),\ t\in[t_0,t_1]$, где $t_0,\,t_1{:}t_0<t_1$ – некоторые фиксированные числа. Определим множество

$$G_r=\left\{x\in E^n{:}\max_{t\in[t_0,t_1]}\left\|x-\overline{x}(t)\right\|_{E^n}\le r\right\}.$$

Предположим, что существует такое $r>0$, что корень $x=\overline{x}(t)$ уравнения (4) изолирован в $G_r\times[t_0,t_1]$, т.е. для любых $x\in G_r$ и $t\in[t_0,t_1]$ следует $F(t,x)\neq 0$, если $x\neq\overline{x}(t)$.

Если $\mathrm{Re}\lambda_i\left(F_x\left(t,\overline{x}(t)\right)\right)\le-\alpha<0,\alpha=const,\ t\in[t_0,t_1],$ (5)

то корень $\bar{x}(t)$ называется устойчивым (по первому приближению) вправо. В [4] доказано существование единственного решения задачи Коши для уравнения (1) с условием $x(t_0)=x_0\in G_r,\ t\in[t_0,t_1]$, построена асимптотика решения, причем

$$\lim_{\mu\to 0} x(t,\mu)=\bar{x}(t),\ t\in(t_0,t_1].$$

Аналогично, при

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left(F_x(t,\bar{x}(t))\right)\ge\alpha>0,\ \alpha=const,\ t\in[t_0,t_1] \qquad (6)$$

корень $\bar{x}(t)$ называется устойчивым влево, если доказано существование единственного решения $x(t,\mu)$ задачи Коши для (1) с условием

$$x(t_1)=x_1\in G_r,\ t\in[t_0,t_1],$$

построена асимптотика решения, причем

$$\lim_{\mu\to 0} x(t,\mu)=\bar{x}(t),\ t\in[t_0,t_1).$$

Поскольку

$$\frac{\partial V(\bar{x}(t),t)}{\partial x}=-F(\bar{x}(t),t)=0$$

и

$$\frac{\partial^2 V(\bar{x}(t),t)}{\partial x^2}=-F_x(\bar{x}(t),t),$$

то справедливы следующие теоремы [4].

Теорема 1

Пусть корень $x=\bar{x}(t)$ уравнения (4) изолирован. Тогда:

1. Если корень $x=\bar{x}(t)$ устойчив вправо, то

$$\min_{x\in G_r} V(t,x)=V(t,\bar{x}(t)),\ t\in[t_0,t_1].$$

2. Если корень $x=\bar{x}(t)$ устойчив влево, то

$$\max_{x\in G_r} V(t,x)=V(t,\bar{x}(t)),\ t\in[t_0,t_1].$$

Теорема 2

Пусть корень $x=\bar{x}(t)$ изолирован и условно устойчив, т.е. k-собственных чисел $(1\le k<n)$ удовлетворяет неравенству (5), а $(n-k)$ – неравенству (6), тогда при каждом $t\in[t_0,t_1]$ $\bar{x}(t)$ является седловой точкой функции $V(t,x)$ при $x\in G_r$ и $t\in[t_0,t_1]$.

В условиях теоремы 2 для (3) ставится в [4] краевая задача с k-граничными условиями при $t=t_0$ и $(n-k)$ – граничными условиями при $t=t_1$, строится асимптотика решения $x(t,\mu)$ соответствующей краевой задачи, причем

$$\lim_{\mu\to 0} x(t,\mu)=\bar{x}(t),\ t\in(t_0,t_1).$$

Если имеет место критический случай (существует i_0, что $\lambda_{i_0} \equiv 0$, $t \in [t_0, t_1]$, остальные удовлетворяют (5) и (или) (6)), то функция $V(t,x)$ имеет вдоль собственного вектора, соответствующего $\lambda_{i_0} \equiv 0$, желоб $[1,\ 2]$), при $t \in [t_0, t_1]$, т.е. вырожденную при всех $t \in [t_0, t_1]$ критическую точку, в отличие от морсовских критических точек в предыдущих случаях.
Сформулируем ряд теорем, обратных к теоремам 1 и 2.

Теорема 3

Пусть корень $x = \bar{x}(t)$ уравнения (4) изолирован и:

1. $\min\limits_{x \in G_r} V(x,t) = V(\bar{x}(t),t)$, причем $\bar{x}(t)$ для любого $t \in [t_0, t_1]$ – невырожденная точка минимума, тогда существует $r_0 \le r$, что для любого $x_0 \in G_{r_0}$ задача Коши $x(t_0, \varepsilon) = x_0$ для уравнения (1) имеет единственное решение $x(t,\varepsilon)$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon) = \bar{x}(t),\ t \in (t_0, t_1]\ ;$$

2. $\max\limits_{x \in G_r} V(x,t) = V(\bar{x}(t),t)$, причем $\bar{x}(t)$ для любого $t \in [t_0, t_1]$ –невырожденная точка максимума, тогда существует $r_0 \le r$, что для любого $x_0 \in G_{r_0}$ задача Коши $x(t_1, \varepsilon) = x_1$ для уравнения (1) имеет единственное решение $x(t,\varepsilon)$ и

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon) = \bar{x}(t),\ t \in [t_0, t_1).$$

Доказательство. Пусть для любого $t \in [t_0, t_1]$ точка $x = \bar{x}(t)$ является невырожденной точкой минимума $V(x,t)$ в G_r, тогда

$$F(\bar{x}(t),t) = -\frac{\partial V(\bar{x}(t),t)}{\partial x} = 0$$

и $\bar{x}(t)$ непрерывно зависит от $t \in [t_0, t_1]$ [1]. Следовательно, матрица $\dfrac{\partial^2 V(\bar{x}(t),t)}{\partial x^2}$ непрерывно зависит от $t \in [t_0, t_1]$ и отрицательно определена в замкнутом множестве G_r.
Обозначим

$$\max_{t \in [t_0, t_1]} \max_{y \in G_r} \frac{\left(\dfrac{\partial^2 V(\bar{x}(t),t)}{\partial x^2} y, y \right)}{\|y\|^2} = \beta\ .$$

Число β существует и меньше нуля. Положим $\alpha = -\beta$, тогда

$$\left(\frac{\partial^2 V(\bar{x}(t),t)}{\partial x^2} y, y \right) \le -\alpha \|y\|,\ t \in [t_0, t_1],\ y \in G_r\ .$$

Следовательно,

$$\max_{t\in[t_0,t_1]}\lambda_i(t)\le -\alpha,\ i=1,\dots,n$$

и применение теоремы 1 завершает доказательство.
Аналогично доказывается и утверждение 2.
Если функция $V(x,t)$ имеет невырожденное M_m^n седло $\bar{x}(t)$, $t\in[t_0,t_1]$ в G_r (морсовское седло с m положительными и $(n-m)$ отрицательными собственными числами), где m не зависит от t, то аналогично теореме 3 можно доказать существование области G_{r_0}, $(0<r_0\le r)$, где краевая задача с m граничными условиями при t_1 и $(n-m)$ граничными условиями при t_0, принадлежащими G_{r_0}, $(r_0>0\ и\ \ r_0\le r)$, имеет единственное решение $x(t,\varepsilon)$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0}x(t,\varepsilon)=\bar{x}(t),\ t\in(t_0,t_1).$$

Для одномерного случая Ю.П. Боглаев сформулировал принцип максимума [3, теорема 6], содержащий более глубокие утверждения.
Пусть $F(x,t):R\times[t_0,t_1]\to R$.

Теорема 4 (принцип максимума Ю.П. Боглаева)
Пусть уравнение (4) имеет конечное число изолированных корней $\bar{x}(t)$ $(i=1,\dots,n)$, определенных и ограниченных на отрезке $0\le t\le 1$, а функция

$$V(x,t)=-\int_0^x F(\xi,t)d\xi$$

достигает строгого абсолютного максимума по x в области G на следующей системе корней

$$\bar{x}(t)=\begin{cases}\bar{z}_{i1}(t),\ t\in[0,\tau_1],\\ \bar{z}_{i2}(t),\ t\in[\tau_1,\tau_2],\\ \dots\\ \bar{z}_{ik}(t),\ t\in[\tau_{k-1},1],\end{cases}$$

где $i_j\in\{1,2,\dots,n\}$, $G=\{0\le t\le 1,\ |z-\bar{z}(t)|\le d\}$;
$d=\max\{|\bar{z}_{i_1}(0)|,\ |\bar{z}_{i_k}(0)|\}$, $z(t)\equiv 0\in G$, т.е.

$$U(\bar{x}(t),t)=\max_{\xi\in G}U(\xi,t).$$

Пусть $\bar{z}_{i_j}(t)\in C^2[0,1]$, $\left|\ddot{\bar{z}}_{i_j}\right|<K,\ j=1,\dots,k$, а функция F непрерывна по (x,t) и удовлетворяет условию Липшица по x в области G.
Тогда существует $x(t,\varepsilon)$ – решение краевой задачи

$$\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t,x); \tag{7}$$

$$x(0) = 0,\ x(1) = 0, \tag{8}$$

причем

$$\lim_{\varepsilon \to 0} x(t,\varepsilon) = \bar{x}(t)$$

на системе открытых интервалов $(0,\tau_1),(\tau_1,\tau_2),\ldots,(\tau_{k-1},1)$.

Весьма важными являются следующие замечания к теореме.

Замечание 1. Если в каких-либо точках на отрезке $0 \le t \le 1$ нарушена изолированность корня, но в этих точках функция U остается максимальной на $x(t)$, то и в этом случае теорема будет справедливой.

Замечание 2. Бифуркационными значениями являются те значения t, в которых

$$U\left(\bar{x}_{i_j}(t),t\right) = U\left(\bar{x}_{i_m}(t),t\right), \quad \text{где} \quad j \ne m.$$

В этих точках возможен переход решения (7), (8) с одного корня уравнения (4) на другой.

Определение 1. Точку $\bar{t} \in [t_0,t_1]$ назовем точкой возврата (поворота) для квазиградиентной и ньютоновской квазиградиентной систем, если функция $V(x,t)$ при $t = \bar{t}$ имеет вырожденную критическую точку по x.

Определение 1 является обобщением определения точки поворота для линейных уравнений второго порядка.

Рассмотрим уравнение первого порядка

$$\varepsilon \frac{dx}{dt} = F(t,x) \tag{9}$$

и второго порядка

$$\varepsilon \frac{d^2 x}{dt^2} = F(t,x), \tag{10}$$

предполагая, что функция $F(t,x)$ имеет вид

$$F(t,x) = x^n + \sum_{i=0}^{n-2} a_i(t) x^i, \tag{11}$$

где $a_i \in C[t_0,t_1],\ i = 0,1,2,\ldots,n-2$.

Вырожденное по отношению к (9) и (10) уравнение имеет вид

$$x^n + \sum_{i=0}^{n-2} a_i(t) x^i = 0.$$

Определим множества

$$P_t = \left\{ x \in R : x^n + \sum_{i=0}^{n-2} a_i(t) x^i = 0 \right\},\ t \in [t_0,t_1]$$

и

$$M=\left\{(x,a)\in R\times R^{n-1}:x^{n}+\sum_{i=0}^{n-2}a_{i}x^{i}=0\right\}.$$

Отображение

$$(x,a_{0},\ldots,a_{n-2})\rightarrow\left(x_{1},-x^{n}-\sum_{i=0}^{n-2}a_{i}x^{i},\ a_{1},\ldots,a_{n-2}\right)$$

задает глобальные координаты в M, поскольку соответствующая матрица Якоби имеет ранг n.
Таким образом, M является n-мерным гладким многообразием.
Пусть $\Gamma=\{a:a=a_{i}(t),\ t\in[t_{0},t_{1}]\}$. Обозначая через

$$A_{t}=\{(x,a)\in R\times R^{n-1}:(x,a(t))\},\quad t\in[t_{0},t_{1}]$$

линейную поверхность на кривой Γ, получим, что справедлива следующая лемма.
Лемма1. Для любого $t\in[t_{0},t_{1}]$ выполнено равенство

$$P_{t}=M\cap A_{t}.$$

Пусть

$$V(x,a)=\int_{x_{0}}^{x}\left(x^{n}+\sum_{i=0}^{n-2}a_{i}x^{i}\right)dx,$$

т.е.

$$V(x,a)=\frac{1}{n+1}x^{n+1}+\sum_{i=0}^{n-2}\frac{1}{i+1}a_{i}x^{i+1}+const.$$

Очевидно, что $V(x,a)$ каноническая форма A_{n}, а M – критическое многообразие для $V(x,a)$.

Обозначим $S=\left\{(x,a)\in M:rang\frac{\partial^{2}V(x,a)}{\partial x^{2}}<n\right\}$ и отображение $X_{V}:(x,a)\rightarrow a$. Множество $W=X_{V}(S)$ является бифуркационным множеством в пространстве параметров $a\in R^{n-1}$, поскольку, когда $a(t)$ проходит через множество W, то меняется число и тип критических точек $V(x,a(t))$, т.е. справедлива следующая лемма.

Лемма 2. Точка $\bar{t}\in[t_{0},t_{1}]$ тогда и только тогда является точкой поворота, когда $a(\bar{t})\in W$.

Геометрия многообразия M и множеств S,W хорошо разработана (см., например $[1,2,5-8]$). С учетом приведенных теорем и лемм для неавтономных уравнений второго (и первого) порядков получаем аналог метода фазовой плоскости.
Очевидно, между множеством кривых Γ и множеством дифференциальных уравнений вида (9) и (10) имеется взаимно однозначное соответствие. При этом стационарным кривым $a(t)=const$, $t\in[t_{0},t_{1}]$ соответствуют автономные уравнения с полиномиальными нелинейностями и точки срыва этих уравнений являются точками поворота.
Рассмотрим следующие нестационарные кривые $l_{1},\ldots,l_{n}$ в R^{n-1}:

$$l_i = \{(a_0,\ldots,a_{i-1},t,a_{i+1},\ldots a_{n-2}) \in R^{n-1}: t \in [t_0,t_1], a_j = const,$$
$$j \neq i,\ j = 0,\ldots,n-2,\ i = 0,\ldots,n-2\}.$$

Кривым l_i соответствуют некоторые неавтономные уравнения вида (9), (10).

Эти уравнения могут рассматриваться как модельные уравнения. Уравнения с общими полиномиальными нелинейностями

$$F(t,x) = \sum_{i=0}^{n} a_i(t) x^i$$

после элементарных преобразований могут быть приведены в первом приближении к уравнениям вида (9), (10) с (11).

В следующей статье, ограничиваясь уравнениями, порожденными каноническими формами A_2, A_3 и кривыми l_i, будет показано, что соответствующие модельные уравнения являются и эталонными уравнениями для сингулярно возмущенных уравнений первого и второго порядков при некоторых условиях.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках темы 1.4.08 Единого заказ/наряда.

Литература

1. *Арнольд В.И., Варченко А.Н., Гусейн-Заде С.М.* Особенности дифференцируемых отображений. - М.: Наука, 1982. - 304 с.
2. *Бренер Т., Ландер Л.* Дифференцируемые ростки и катастрофы. - М.: Мир, 1977. - С. 208.
3. *Боглаев Ю.П.* ЖВМ и МФ. - 1970. - Т.10. - №4. - С. 958-968.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. М.: Высшая-школа, 1990. - 208 с.
5. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984. - Т.1. - С. 350.
6. *Гилмор Р.* Прикладная теория катастроф. М.: Мир, 1984. - Т.2. - С. 285.
7. *Голубицкий М., Гийемин В.* Устойчивые отображения и их особенности. - М.: Мир, 1977. - С. 290.
8. *Постом Т., Стюарт И.* Теория катастроф и ее приложения. - М.: Мир, 1980. - С. 608.
9. *Тихонов А.Н.* Системы дифференцируемых уравнений, содержащих малые параметры. // Матем. сб. 1952. - 31(73). - №3. - С. 575-586.

Nonlinear ordinary differential equations with turn points

D.K. Mamiy, A.V. Lavrentev, A.V. Kovalenko, M.H. Urtenov

In this paper we generalize the concept and classification of the turning points for nonlinear ordinary differential equations based on the theory of singularities differentsirumyh maps.

