2010 г № 15

Труды ФОРА

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА МАТРИЦ КОШИ ДЛЯ СИСТЕМ ЛИНЕЙНЫХ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп
Кубанский государственный университет, г. Краснодар

В статье изучаются некоторые свойства матриц Коши для систем с сингулярными возмущениями достаточно общего типа, строятся регулярные представления и на этой основе предлагаются итерационные методы нахождения матриц Коши.

Пусть $A(t){:}[0,1] \to E^{n\times n}$ – непрерывная матричная функция, $\sigma_{i,j}(\mu){:}\overline{U}_0 \to R$ и $\sigma(\mu)=\{\sigma_{ij}\}_{i,j}^n$, $\{e_i\}_1^n$ – ортонормальный базис в E^n, I – единичная матрица в E^n либо тождественный оператор в соответствующем пространстве.

Будем считать, что хотя бы одно собственное число матрицы $\sigma(\mu_0)$ равно нулю, но существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что для любого $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ и $\mu \neq \mu_0$ выполнено $det\ \sigma(\mu) \neq 0$.

Обозначим через $K(t,S,\mu)$ матрицу Коши

$$\sigma(\mu)\frac{\partial K}{\partial t} = A(t)K \quad ; \tag{1}$$

$$K(S,S,\mu) = I \ . \tag{2}$$

Приводимая далее лемма 1 представляет собой переформулировку общеизвестного свойства матрицы Коши для случая уравнения (1).

Лемма 1. Существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что для любого $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ и $\mu \neq \mu_0$ справедливо равенство

$$\frac{\partial K}{\partial S} = -K(t,S,\mu)\sigma^{-1}(\mu)A(S) \ . \tag{3}$$

Доказательство. Пусть $\Phi(t,\mu)$ – некоторая фундаментальная матрица, тогда

$$K(t,S,\mu) = \Phi(t,\mu)\Phi^{-1}(S,\mu) \ , \tag{4}$$

© Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, А.В. Коваленко, М.Х. Уртенов

причем

$$\sigma(\mu)\frac{d\Phi}{dt} = A(t)\Phi\,. \tag{5}$$

Дифференцируя равенство

$$\Phi(S,\mu)\Phi^{-1}(S,\mu) = I$$

по S, получаем

$$\frac{d\Phi}{dS}\Phi^{-1} + \Phi\frac{d\Phi^{-1}}{dS} = 0\,,$$

или

$$\frac{d}{dS}\Phi^{-1}(s,\mu s = -\Phi^{-1}(s,\mu)\frac{d\Phi\Phi\,(s,\mu)}{dS}\Phi^{-1}(s,\mu)\,.$$

С учетом (5) имеем

$$\frac{d}{dS}\Phi^{-1}(s,\mu) = -\Phi^{-1}(s,\mu)\sigma^{-1}(s,\mu)A(s)\,. \tag{6}$$

Из (4) и (6) получаем

$$\frac{\partial K}{\partial S} = \Phi(t,\mu)\frac{d}{dS}\Phi^{-1}(s,\mu) = -\Phi(t,\mu)\Phi^{-1}(s,\mu)\sigma^{-1}(s,\mu)A(s) = -K(t,S,\mu)\sigma^{-1}(\mu\mu,\mu)A(s$$

Обозначим $A_1(t,\mu) = \sigma^{-1}(\mu)A(t) + A^T(t)\left[\sigma^T(\mu)\right]^{-1}$.

Очевидно, что существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что матрица $A_1(t,\mu)$ определена для любых $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$, $\mu \neq \mu_0$, $t \in [0,1]$ и $A_1^T(t,\mu) = A(t,\mu)$.

Лемма 2. Пусть существуют такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0 и функция $\alpha(t,\mu)$: $[0,1]\times U_0 \cap U_{\mu_0} \to R+$, что справедливы следующие утверждения:

1) $\left(\sigma^{-1}(\mu)A(t)x,x\right) \leq -\frac{1}{2}\alpha(t,\mu)\|x\|^2$

при $t \in [0,1]$, $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$, $\mu \neq \mu_0$, $x \in E^n$;

2)
$$\lim_{\mu\to\mu_0}\max_{t\in[0,1]}\int_0^t \exp\left(-\frac{1}{2}\int_S^t \alpha(\xi,\mu)d\xi\right)dS = 0\,, \tag{7}$$

тогда

$$\lim_{\mu\to\mu_0}\max_{0\leq\tau\leq t\leq 1}\int_0^t \left\|K(t,s,\mu)\right\|_{matr}dS = 0\quad. \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим $K_i(t,s,\mu)$ столбец матрицы $K(t,s,\mu)$, тогда

$$\sigma(\mu) = \frac{\partial K_i}{\partial t} = A(t)K_i\,;$$

 © 2010 Физическое Общество РА

$$K_i(s,s,\mu)=1_i,\ 0\le s\le t\le 1,\ i=1,\dots n.$$

Пусть $\psi_i(t,s,\mu)=\left(K_i(t,s,\mu),K_i(t,s,\mu)\right)=\left\|K_i(t,s,\mu)\right\|^2$,

тогда

$$\frac{\partial\psi_i}{\partial t}=\left(\frac{\partial K_i}{\partial t},K_i\right)+\left(K_i,\frac{\partial K_i}{\partial t}\right)=\left(\sigma^{-1}(\mu)A(t)K_i,K_i\right)+\left(K_i,\sigma^{-1}(\mu)A(t)K_i\right)=$$

$$=\left(\sigma^{-1}(\mu)A(t)K_i,K_i\right)+\left(\sigma^{-1}(\mu)A^T(t)K_i,K_i\right)=\left(A_1(t,\mu)K_i,K_i\right)\le$$

$$\le-\alpha(t,\mu)\left\|K_i\right\|^2=-\alpha(t,\mu)\psi_i.$$

Таким образом $\dfrac{\partial\psi_i}{\partial t}\le-\alpha(t,\mu)\psi_i$.

С учетом

$$\psi_i(s,s,\mu)=\left\|K_i(s,s,\mu)\right\|^2=1$$

имеем

$$\psi_i(t,s,\mu)\le\exp\left(-\frac{1}{2}\int_S^t\alpha(\xi,\mu)d\xi\right).$$

Откуда получаем

$$\left\|K(t,s,\mu)\right\|_{matr}\le\exp\left(-\frac{1}{2}\int_S^t\alpha(\xi,\mu)d\xi\right)\ . \tag{9}$$

Следовательно,

$$\lim_{\mu\to\mu_0}\max_{0\le\tau\le t\le1}\int_\tau^t\left\|K(t,s,\mu)\right\|_{matr}dS\le\lim_{\mu\to\mu_0}\max_{0\le\tau\le t\le1}\int_\tau^t\exp\left(-\frac{1}{2}\int_S^t\alpha(\xi,\mu)d\xi\right)dS=0\ . \tag{10}$$

Из (9) и (10) следует не только доказательство леммы 2, но и оценка функции Коши.

Чтобы получить более конструктивные условия, чем условия леммы 2, рассмотрим, когда

$$U=R\,,\ U_0=\left(0,\bar{\mu}\right],\ \mu_0=0\,,\ \bar{\mu}_0>0\,,\ \sigma(\mu)=\mu I\ .$$

Лемма 3. Справедливо неравенство

$$\exp\left(-\frac{\nu t^{\beta+1}}{\mu}\right)\int_0^t\exp\frac{\nu s^{\beta+1}}{\mu}ds\le\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\mu^{\frac{1}{\beta+1}} \tag{11}$$

при любых $\left(t,\beta,\beta,\nu\right)\in\left(0,+\infty\right]\times\left(0,+\infty\right)^3$.

Доказательство. Перепишем неравенство в виде

$$\int_0^t\exp\frac{\nu s^{\beta+1}}{\mu}ds\le\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\mu^{\frac{1}{\beta+1}}\exp\left(-\frac{\nu t^{\beta+1}}{\mu}\right),$$

или

 © 2010 Физическое Общество РА

$$\int_0^t \exp\frac{vs^{\beta+1}}{\mu}ds - \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\mu^{\frac{1}{\beta+1}}\exp\left(-\frac{vt^{\beta+1}}{\mu}\right) \le 0 \cdot$$

Введем в рассмотрение функцию

$$\psi = \int_0^t \exp\frac{vs^{\beta+1}}{\mu}ds - \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\mu^{\frac{1}{\beta+1}}\exp\left(-\frac{vt^{\beta+1}}{\mu}\right).$$

Достаточно показать, что $\psi \le 0$ при $(t,\beta,\beta,v) \in (0,\infty)^4$.

1. Пусть $0 \le t \le \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\mu^{\frac{1}{\beta+1}}$.

Тогда

$$\psi = \int_0^t \exp\left(\frac{vt^{\beta+1}}{\mu}\right)ds - \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\mu^{\frac{1}{\beta+1}}\exp\left(\frac{vt^{\beta+1}}{\mu}\right) = \exp\left(\frac{vt^{\beta+1}}{\mu}\right)t -$$

$$-\left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\mu^{\frac{1}{\beta+1}}\exp\left(\frac{vt^{\beta+1}}{\mu}\right) = \left[t - \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\mu^{\frac{1}{\beta+1}}\right]\exp\left(v\frac{t^{\beta+1}}{\mu}\right) \le 0.$$

2. Дифференцируя ψ по t, получаем:

$$\psi' = \exp\left(v\frac{t^{\beta+1}}{\mu}\right) - \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\mu^{\frac{1}{\beta+1}}\frac{v(\beta+1)}{\mu}t^{\beta}\ \exp\left(\frac{vt^{\beta+1}}{\mu}\right) =$$

$$= \left[1 - \left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{\beta+1}-1}\mu^{\frac{1}{\beta+1}-1}(\beta+1)t^{\beta}\right]\exp\left(v\frac{t^{\beta+1}}{\mu}\right) \le 0,$$

если

$$1 - \left(\frac{1}{v}\right)^{-\frac{\beta}{\beta+1}}\mu^{-\frac{\beta}{\beta+1}}t^{\beta}(\beta+1) \le 0,$$

или

$$\frac{1}{(\beta+1)}\left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{\beta}{\beta+1}}\mu^{\frac{\beta}{\beta+1}} \le t^{\beta},$$

т.е. при $\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}}\left(\frac{1}{v}\right)^{\frac{1}{\beta+1}}\mu^{\frac{1}{\beta+1}} \le t \cdot$

 © 2010 Физическое Общество РА

Окончательно учитывая, что $\left(\frac{1}{\beta+1}\right)^{\frac{1}{\beta}} \le 1$

при $\beta > 0$, получаем, что функция ψ убывает при

$$\left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} \mu^{\frac{1}{\beta+1}} \le t \cdot$$

Следовательно, $\psi \le 0$, если $(t,\beta,\beta,\nu) \in (0,\infty)^4$.

Выполнимость неравенства при $t = 0$, $\beta = 0$ проверяется непосредственно.

Лемма 4. Пусть

$$\operatorname{Re}\lambda_i\left(A(t)\right) \le -2\nu\, t^{\beta};$$
$$\nu \ge 0, \beta \ge 0, t \in [0,1].$$

Тогда для матрицы Коши справедлива оценка

$$\max_{0\le\tau\le t\le 1}\int_{\tau}^{t}\left\|K(t,s,\mu)\right\|_{matr} ds \le \left(\frac{1}{\nu}\right)^{\frac{1}{\beta+1}} \mu^{\frac{1}{\beta+1}}.$$

Для доказательства достаточно положить $\alpha(t,\mu) = -\nu t^{\beta}/\mu$ и воспользоваться леммами 2 и 3.

Возьмем любое фиксированное число $p \in [0,1]$ и запишем уравнение (1) в виде

$$\sigma(\mu)\frac{\partial K}{\partial t} = A(p)K + [A(t) - A(p)]K,$$

откуда

$$\frac{\partial K}{\partial t} = \sigma^{-1}(\mu)A(p)K + \sigma^{-1}(\mu)[A(t) - A(p)]K.$$

Следовательно, с учетом (2) имеем

$$K(t,s,\mu) = \exp\left(\sigma^{-1}(\mu)A(p)(t-s)\right) + $$
$$+\int_{s}^{t}\exp\left(\sigma^{-1}(\mu)A(p)(t-q)\right)\sigma^{-1}(\mu)[A(q) - A(p)]K(q,s,\mu)dq \cdot$$

Полагая $p = t$, получаем

$$K(t,s,\mu) = \exp\left(\sigma^{-1}(\mu)A(t)(t-s)\right) + $$
$$+\int_{s}^{t}\exp\left(\sigma^{-1}(\mu)A(t)(t-q)\right)\sigma^{-1}(\mu)[A(q) - A(t)]K(q,s,\mu)dq \quad . \qquad (12)$$

При некоторых условиях на $\sigma(\mu)$ и $A(t)$, (12) будет регулярным представлением для матрицы Коши, например, справедлива следующая теорема.

 © 2010 Физическое Общество РА

Теорема 1. Пусть существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что справедливо при $0 \le s \le t \le 1$

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \int_s^t \left\| \exp\left(\sigma^{-1}(\mu) A(t)(t-q)\right) \sigma^{-1}(\mu)\left[A(q) - A(t)\right] \right\| dq = 0,$$

тогда (12) является регулярным представлением для матрицы Коши.

Для доказательства достаточно положить

$$T(K) = K;$$

$$Z_\mu(K)(t,s) = \exp\left(\sigma^{-1}(\mu) A(t)(t-s)\right) + \\ + \int_s^t \exp\left(\sigma^{-1}(\mu) A(t)(t-q)\right) \sigma^{-1}(\mu)\left[A(q) - A(t)\right] K(q,s,\mu)\, dq. \tag{13}$$

Для получения более конструктивных условий регулярного представления, положим, как в леммах 3 и 4

$$U = R,\ \mathrm{U}_0 = \left(0, \overline{\mu}\right],\ \mu_0 = 0,\quad \overline{\mu}_0 > 0,\ \sigma(\mu) = \mu I. \tag{14}$$

Определим пространство непрерывных на $[0,I]$ матричных функций $MC[0,1]$ с нормой равномерной сходимости и $L(MC,MC)$ соответствующее пространство линейных операторов.

Теорема 2. Пусть

1. Матрица $A(t)$ удовлетворяет условию Липшица при $t \in [0,1]$.
2. $\operatorname{Re} \lambda_i(A(t)) \le -2\nu < 0,\ t \in i[0,1].$

тогда (12) является регулярным представлением для матрицы Коши.

Доказательство. Оператор Z_μ при (14) запишется в виде

$$Z_\mu(K)(t,s) = \frac{1}{\mu} \int_s^t exp\left(\frac{1}{\mu} A(t)(t-q)\right)\left[A(q) - A(t)\right] K(q,s,\mu)\, dq.$$

Вычислим норму оператора Z_μ

$$\left\| Z_\mu \right\|_{L(MC.MC)} \le \frac{c}{\mu} \max_{0 \le S \le 1 \le 1} \int_s^t \exp\left(-\frac{\nu}{\mu}(t-q)\right) \left| q - t \right| dq =$$

$$= \frac{c_0}{\mu} \max_{0 \le S \le 1 \le 1} \int_s^t \exp\left(-\frac{\nu}{\mu}(t-q)\right)(t-q)\, dq.$$

Замена переменных

$$\frac{\sigma}{\mu}(t-q) = u,\ \tau = \frac{\partial}{\mu}(t-s)$$

дает

$$\frac{c}{\mu} \int_s^t \exp\left(-\frac{\nu}{\mu}(t-q)\right)(t-q)\, dq \le c_1 \mu.$$

Что и требовалось доказать.

 © 2010 Физическое Общество РА

Положим

$$K_0(t,s,\mu) = \exp\left(\sigma^{-1}(\mu)A(t)(t-s)\right) \tag{15}$$

и определим последовательные приближения равенствами

$$K_i(t,s,\mu) = K_0(t,s,\mu) + \int_s^t \exp\left(\sigma^{-1}(\mu)A(t)(t-q)\right)\sigma^{-1}(\mu)[A(q)-A(t)]\times$$
$$\times K_{i-1}(q,s,\mu)dq,\ i=1,2,\ \ldots \tag{16}$$

В случае, когда (12) является регулярным представлением для матрицы Коши, последовательные приближения (15), (6) сходятся. Сформулируем, для примера, одну из теорем о сходимости последовательности $\{K_i\},\ i = 0, \ldots$

Теорема 3. Пусть выполнены условия теоремы 2, тогда последовательные приближения $K_i(t,s,\mu)$ сходятся к матрице Коши $K(t,s,\mu)$, причем справедливо неравенство

$$\left\|K_i(t,s,\mu)\text{-}K(t,s,\mu)\right\| \le (c\mu)^{i+1}\left\|K_0(t,s,\mu)\right\|,\ 0 \le s \le t \le 1.$$

Доказательство теоремы следует из теоремы 2 с учетом отношений (13).

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ в рамках темы 1.4.08 Единого заказ/наряда.

Some properties of Cauchy matrixes for systems of linear singular perturbed differential equations

D.K. Mamy, A.V. Lavrentev, A.V. Kovalenko, M.H. Urtenov

In paper some properties of Cauchy matrixes for systems with singular perturbations enough the general type are studied. The regular representations are under construction and on this basis iterative methods of determination of Cauchy matrixes are offered.

 © 2010 Физическое Общество РА