2010 г № 15
Труды ФОРА

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ДВУМЕРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ В ВЕКТОРЕ СНОСА

М.М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В статье проводится исследование стохастической устойчивости двумерных дифференциальных систем, правая часть которых возмущена гауссовским «белым шумом». При этом предполагается нелинейный вектор сноса аддитивно разделяющимся по переменным, а интенсивность «шума» зависящим только от одного из двух компонент случайного процесса. Рассматриваются случаи, когда в выражении для нелинейного вектора сноса три из четырех функций одного переменного являются линейными, а одна функция – нелинейной. Получены достаточные условия асимптотической устойчивости в целом по вероятности и экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом решений рассматриваемых стохастических систем. Исследование стохастической устойчивости ведется модифицированным методом функций Ляпунова.

1. Введение

Теория устойчивости стохастических систем возникла и получила развитие при исследовании стохастических процессов, в частности, при изучении стохастических процессов, моделирующих поведение систем автоматического управления. Одной из важнейших для практики проблем, стимулировавшей развитие стохастической теории устойчивости, была проблема стабилизации управляемых движений систем, подверженных воздействию случайных помех. Первыми работами на эту тему, стимулировавшими много дальнейших исследований, были работы Дж.Э. Бертрама и П.Э. Сарачика [1], И.Я. Каца и Н.Н. Красовского [2]. В этих работах исследование устойчивости проводилось модифицированным методом функций Ляпунова.

Дальнейшее развитие с широким применением аппарата функций Ляпунова теория устойчивости стохастических динамических систем получила свое развитие в работах Хасьминского [3], Кушнера [4], Каца [5], Гихмана и Дороговцева [6], Невельсона [7], Морозана [8], Вонэма [9,10], Левита и Якубовича [11], Пакшина [12], Барабанова и Пятницкого [13] и других.

В статье [14] с помощью метода функций Ляпунова получены достаточные условия стохастической устойчивости для линейных и некоторых специальных (степенного вида) нелинейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка. В [15] обобщены результаты работы [14] и получены достаточные условия стохастической устойчивости типичных для нелинейной механики нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка, возмущенных гауссовским белым шумом. В статьях [16,17] с помощью стохастического аналога прямого метода Ляпунова исследуется стохастическая устойчивость двумерных линейных стационарных стохастических систем. В этих работах получены достаточные условия по вероятности и необходимые и достаточные условия экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом решений рассматриваемых систем.

В настоящей работе рассматриваются вопросы асимптотической устойчивости по вероятности в целом и экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом решений двумерных стохастических систем дифференциальных уравнений с одной нелинейностью. При этом предполагается нелинейный вектор сноса аддитивно разделяющимся по переменным, а интенсивность белого шума зависящим только от одного из двух компонент случайного процесса. Исследование устойчивости проводится с помощью модифицированного метода функций Ляпунова – стохастического аналога прямого метода Ляпунова.

Полученные нами достаточные условия стохастической устойчивости представляются полезными с прикладной точки зрения. В частности, они дают оценку снизу величины «сектора устойчивости», где расположен график функции интенсивности белого шума.

2. Постановка задачи

Будем рассматривать нелинейную систему двух стохастических дифференциальных уравнений вида:

$$\begin{cases} dx_1(t) = \left[f_{11}(x_1) + f_{12}(x_2) \right] dt + \sigma(z) d\xi(t), \\ dx_2(t) = \left[f_{21}(x_1) + f_{22}(x_2) \right] dt. \end{cases} \tag{1}$$

где одна из функций $f_{ij}(x_j)$ $(i, j = 1,2)$ является нелинейной, а остальные три – линейными, коэффициент диффузии $\sigma(z)$ является функцией или от x_1 или от x_2, т.е. значение z совпадает или с x_1, или с x_2. В (1) $x_1 = x_1(t),\ x_2 = x_2(t)$ - компоненты случайного процесса, $\xi(t)$ - винеровский процесс, дифференциалы $dx_1(t),\ dx_2(t),\ d\xi(t)$ понимаются как стохастические дифференциалы в смысле Ито.

Всюду в дальнейшем предполагается, что нелинейная функция $f_{i,j}(x_j),\ i, j \in \{1,2\}$ непрерывно дифференцируема по своему аргументу для всех значений x_j, функция $\sigma(z)$ удовлетворяет глобальному условию Липшица. Тогда хорошо известно [3], что существует и единственно решение $x(t) = x(t;\omega)$ системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x^0$. Здесь $x(t) = (x_1(t), x_2(t)),\ x^0 = (x_1^0, x_2^0)$, а ω - элементарное событие. При этом решение $x(t)$ представляет собой непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс.

Детерминированный случай $\sigma(z) \equiv 0$ был рассмотрен Н.П. Еругиным [18] и И.Г. Малкиным [19].

В настоящей статье результаты работ [18,19] распространяются на стохастический случай.

3. Формулировка результатов

Напомним сначала определения устойчивости по вероятности в целом и экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом.

Предположим, что $f_{ij}(0) = 0,\ \sigma(0) = 0.$

Определение 1. *Тривиальное решение* $x(t) \equiv 0$ *системы (1) называется асимптотически устойчивым по вероятности в целом, если:*

1) оно устойчиво по вероятности при $t \geq 0,$ *т.е. для любых* $t_0 \geq 0$ *и* $\varepsilon > 0$

$$\lim_{x^0 \to 0} P\left\{ \sup_{t > t_0} \|x(t)\| > \varepsilon \right\} = 0$$

2) для всех $t_0 \geq 0$, $x^0 \in \boldsymbol{R}^2$

$$P\left\{ \lim_{t \to +\infty} x(t) = 0 \right\} = 1.$$

Определение 2. *Тривиальное решение* $x(t) \equiv 0$ *системы (1) называется экспоненциально устойчивым в среднем квадратическом, если существуют константы* $\mathrm{A} > 0,\ \alpha > 0$ *такие, что*

$$\mathrm{M}\|x(t)\|^2 \leq \mathrm{A}\|x^0\|^2 \exp\{-\alpha(t - t_0)\}$$

Здесь $\|\cdot\|$ означает евклидову норму вектора, а P и M - вероятность и математическое ожидание соответственно.

Сформулируем теперь основные результаты. Всюду ниже $a,\ b$ и c - постоянные, а $f(\cdot)$ - нелинейная функция, $f(0) = \sigma(0) = 0$.

Теорема 1. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1) = f(x_1),\ \ f_{12}(x_2) = ax_2,\ \ f_{21}(x_1) = bx_1,$$

$$f_{22}(x_2)=cx_2,\ \ \sigma(z)=\sigma(x_1).$$

Пусть, далее, существуют константы $\delta_1>0,\ \ \delta_2>0,\ \ \sigma_0>0$ *и* Δ *такие, что выполняются условия:*

1) $\dfrac{f(x_1)}{x_1}+\left(c+\varepsilon\right)<-\delta_1$ *для всех* $x_1\neq 0,$

2) $\left(c+\varepsilon\right)\dfrac{f(x_1)}{x_1}-ab>\delta_2$ *для всех* $x_1\neq 0,$

3) $\left(c+\varepsilon\right)f'(x_1)-ab<\Delta$ *для всех* $x_1,$

4) $0<\dfrac{\sigma(x_1)}{x_1}<\sigma_0$ *для всех* $x_1\neq 0,$

5) $\sigma_0^2<\dfrac{2\delta_1\delta_2}{\left(c^2+\Delta\right)},$

где ε *- произвольно малое число.*

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво (по вероятности) в целом.

Если, кроме того, выполнено неравенство

6) $\left(c+\varepsilon\right)\dfrac{f(x_1)}{x_1}-ab<\delta_3$ *для всех* $x_1\neq 0\ \ \left(\delta_3>0\right),$

то нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.

Замечание. Достаточные условия стохастической устойчивости близкие к условиям теоремы 1 были получены в работах [20,21].

Теорема 2. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1)=ax_1,\ \ f_{12}(x_2)=bx_2,\ \ f_{21}(x_1)=cx_1,\ \ f_{22}(x_2)=f(x_2),\ \ \sigma(z)=\sigma(x_1),$$

где $bc\neq 0.$

Предположим, что существуют числа $\delta_i>0\ \ \left(i=\overline{1,4}\right),\ \ \sigma_0>0$ *и* Δ *такие, что выполнены следующие условия:*

1) $a+d_1<0,\ \ ad_1>bc,$

2) $d_2\dfrac{f(x_2)}{x_2}-bc>\delta_1$ *для всех* $x_2\neq 0,$

3) $\dfrac{f(x_2)}{x_2}+d_2<-\delta_2$ *для всех* $x_2\neq 0,$

4) $0<\dfrac{\sigma(x_1)}{x_1}<\sigma_0$ *для всех* $x_1\neq 0,$

5) $\sigma_0^2<\dfrac{2(a+d_1)(ad_1-bc)}{d_1^2+ad_1-bc},$

где константы d_1 *и* d_2 *выбраны так, что* $d_1d_2=bc.$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Если в дополнение к условиям 1) - 5) выполнено еще условие

$$d_2\frac{f(x_2)}{x_2}-bc<\delta_3 \text{ для всех } x_2\neq 0\ \ (\delta_3>0),$$

то нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.

Теорема 3. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1)=ax_1,\ \ f_{12}(x_2)=f(x_2),\ \ f_{21}(x_1)=bx_1,\ \ f_{22}(x_2)=cx_2,\ \ \sigma(z)=\sigma(x_1),$$

где $a<0,\ b>0,\ c<0.$

Предположим, что существуют числа $\delta_1>0$ *и* $\sigma_0>0$ *такие, что выполнены условия:*

1) $\dfrac{f(x_2)}{x_2}\le-\delta_1$ *для всех* $x_2\ne0,$

2) $0<\dfrac{\sigma(x_1)}{x_1}<\sigma_0$ *для всех* $x_1\ne0,$

3) $\sigma_0^2<2(-a).$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Если, кроме того, выполнены еще условия

4) $\dfrac{f(x_2)}{x_2}\ge-\delta_2$ *для всех* $x_2\ne0\ \ (\delta_2>0),$

то нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.

Теорема 4. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1)=ax_1,\ \ f_{12}(x_2)=f(x_2),\ \ f_{21}(x_1)=bx_1,\ \ f_{22}(x_2)=cx_2,\ \ \sigma(z)=\sigma(x_1),$$

где $ac<0,\ a+c<0.$

Предположим, что существуют числа $\delta_1>0,\ \delta_2>0$ *и* $\sigma_0>0$ *такие, что выполнены условия*

1) $ac>bd_2,$

2) $-\delta_1<d_1\dfrac{f(x_2)}{x_2}-ac<-\delta_2$ *для всех* $x_2\ne0,$

3) $0<\dfrac{\sigma(x_1)}{x_1}<\sigma_0$ *для всех* $x_1\ne0,$

4) $\delta_1\left(ac-bd_2\right)<4a^2c^2,$

5) $\sigma_0^2<\dfrac{2(ac-bd_2)(a+c)}{c^2+ac-bd_2}\cdot\left(\dfrac{\delta_1\cdot\left(ac-bd_2\right)}{4a^2c^2}-1\right),$

где константы d_1 *и* d_2 *выбраны так, что* $d_1d_2=ac.$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Замечание. *Условия теоремы 4 также достаточны для экспоненциальной устойчивости нулевого решения системы (1).*

Теорема 5. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1)=ax_1,\ \ f_{12}(x_2)=bx_2,\ \ f_{21}(x_1)=f(x_1),\ \ f_{22}(x_2)=cx_2,\ \ \sigma(z)=\sigma(x_1),$$

где $a<0,\ b<0,\ c<0.$

Предположим, что существуют числа $\delta_1>0$ *и* $\sigma_0>0$ *такие, что выполнены условия:*

1) $\dfrac{f(x_1)}{x_1}\ge\delta_1$ *для всех* $x_1\ne0,$

2) $0<\dfrac{\sigma(x_1)}{x_1}<\sigma_0$ *для всех* $x_1\ne0,$

3) $\sigma_0^2f'(x_1)+2a\dfrac{f(x_1)}{x_1}<0$ *для всех* $x_1\ne0.$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Если, кроме того, для некоторых положительных чисел δ_2 *и* M *выполнены еще неравенства*

4) $\dfrac{f(x_1)}{x_1} \le \delta_2$ *для всех* $x_1 \ne 0,$

5) $f'(x) \le \mathrm{M}$ *для всех* $x,$

6) $\sigma_0^2 < 2\delta_1(-a)/\mathrm{M},$

то нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.

Теорема 6. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1) = ax_1,\ \ f_{12}(x_2) = bx_2,\ \ f_{21}(x_1) = f(x_1),\ \ f_{22}(x_2) = cx_2,\ \ \sigma(z) = \sigma(x_1),$$

где $ac < 0$ *и* $a + c < 0.$

Предположим, что существуют числа $\delta_1 > 0,\ \ \delta_2 > 0$ *и* $\sigma_0 > 0$ *такие, что выполнены условия:*

1) $ac > bd_1,$

2) $-\delta_1 \le d_2 \dfrac{f(x_1)}{x_1} - ac < -\delta_2$ *для всех* $x_1 \ne 0,$

3) $-\delta_3 \le d_2 f'(x_1) - ac < c^2$ *для всех* x *,*

4) $0 < \dfrac{\sigma(x_1)}{x_1} < \sigma_0$ *для всех* $x_1 \ne 0,$

5) $\delta_1(ac - bd_1) < 4a^2c^2,$

6) $\sigma_0^2 < \dfrac{2\delta_2(a+c)}{c^2 + \delta_3} \cdot \left(\dfrac{\delta_1(ac - bd_1)}{4a^2c^2} - 1 \right),$

где константы d_1 *и* d_2 *выбраны так, что* $d_1 d_2 = ac.$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Замечание. Условия теоремы 6 также достаточны для экспоненциальной устойчивости в среднем квадратическом нулевого решения системы (1).

Рассмотрим теперь случай, когда коэффициент диффузии $\sigma(z)$ в системе (1) зависит от координаты $x_2 : \sigma(z) = \sigma(x_2).$

Для этого случая сформулируем две теоремы. Остальные утверждения аналогичны им.

Теорема 7. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1) = f(x_1),\ \ f_{12}(x_2) = ax_2,\ \ f_{21}(x_1) = bx_1,\ \ f_{22}(x_2) = cx_2,\ \ \sigma(z) = \sigma(x_2),$$

где $a < 0,\ \ b > 0,\ \ c < 0.$ *Предположим, что выполнены условия:*

1) $\dfrac{f(x_1)}{x_1} < 0$ *для всех* $x_1 \ne 0,$

2) $0 \le cf'(x_1) - ab \le \Delta$ *для всех* $x_1,$

3) существует положительное число σ_0 *такое, что* $0 < \dfrac{\sigma(y)}{y} < \sigma_0$ *для всех* $y \ne 0,$

4) $\sigma_0^2 < \dfrac{2ac}{b}.$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Если вместо условия 1) выполнено условие $-\delta_1 \le f(x_1)/x_1 \le -\delta_2$ *для всех* $x_1 \ne 0,$ *где* $\delta_1 > 0,\ \ \delta_2 > 0,$ *то нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.*

Теорема 8. *Пусть в системе (1)*

$$f_{11}(x_1) = ax_1,\ \ f_{12}(x_2) = bx_2,\ \ f_{21}(x_1) = cx_1,\ \ f_{22}(x_2) = f(x_2),\ \ \sigma(z) = \sigma(x_2).$$

Предположим, что существуют положительные числа δ_1, δ_2 *и* σ_0 *такие, что:*

1) $a+c_1<0,\ c_1a-bc>0,$

2) $\dfrac{f(x_2)}{x_2}+c_2<-\delta_1$ *для всех* $x_2\neq 0,$

3) $c_2\dfrac{f(x_2)}{x_2}-bc>\delta_2$ *для всех* $x_2\neq 0,$

4) $0<\dfrac{\sigma(x_2)}{x_2}<\sigma_0$ *для всех* $x_2\neq 0,$

5) $\sigma_0^2<\dfrac{2\delta_1\delta_2a^2}{c_2^2\left(c_1a-bc+c_1^2\right)},$

где константы c_1 *и* c_2 *выбраны так:* $c_1c_2=bc.$

Тогда нулевое решение системы (1) асимптотически устойчиво в целом.

Если выполнено еще условие $c_2f(x_2)/x_2-bc<\delta_3\ \left(\delta_3>0\right)$, *то нулевое решение системы (1) экспоненциально устойчиво в среднем квадратическом.*

Все сформулированные выше теоремы доказываются с помощью специально построенных стохастических функций Ляпунова с последующим применением теорем ляпуновского типа – стохастических аналогов [3] классических теорем об устойчивости по Ляпунову.

Литература

1. *Bertram J.E., Carachik P.E.* Stability of circuits with randomly time-varying parameters // Proc. of the Intern. Sympos. on Circuit and Inform. Theory. IRE Transactions, CT-6. Los-Angelos, Calif. - 1959. - P. 809-823.
2. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. матем. и мех. - 1960. - Т. 24. - Вып. 5. - С. 809-823.
3. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М.: Наука, 1969. - 367 с.
4. *Кушнер Г.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. - М.: Мир, 1969. - 199 с.
5. *Кац И.Я.* Об устойчивости в целом стохастических систем // Прикл. матем. и мех. - 1964. - Т. 28. Вып. 2. - С. 366-372.
6. *Гихман И.И., Дороговцев А.Я.* Об устойчивости решений стохастических дифференциальных уравнений // Укр. матем. журн. - 1965. - Т. 17. - № 6. - С. 3-21.
7. *Невельсон М.Б.* Об устойчивости в целом траектории марковских процессов диффузионного типа // Дифф. уравн. - 1966. - Т. 2. - № 8. - С. 1052-1060.
8. *Морозан Т.* Об устойчивости регулируемых систем со случайными параметрами // Rev. Roum. math. pures et appl. - 1967. - Vol. 12. - № 4. - P. 545-552.
9. *Wonham W.M.* Lyapunov criteria for weak stability stochastic equation // Journ. diff. equat. - 1966. - Vol. 2. - № 2. - P. 195-207.
10. *Wonham W.M.* A Lyapunov method for the estimation of statistical averages // Journ. diff. equat. - 1966. - Vol. 2. - № 3. - P. 365-377.
11. *Левит М.В., Якубович В.А.* Алгебраический критерий стохастической устойчивости линейных систем с параметрическим воздействием типа белый шум // Прикл. матем. и мех. - 1972. - Т. 36. - Вып. 1. - С. 142-148.
12. *Пакшин П.В.* Устойчивость одного класса нелинейных стохастических систем // Автоматика и Телемеханика. - 1977. - № 4. - С. 27-36.
13. *Барабанов И.Н., Пятницкий Е.С.* Численное построение функций Ляпунова для стохастических систем // Автоматика и Телемеханика. - 1994. - № . - С. 53-61.
14. *Kushner H.J.* On the construction of stochastic Liapunov functions // IEEE Trans. Automat. Control. - 1965. - V. 10. - № 4. - P. 477-478.

15. *Шумафов М.М.* О построении функций Ляпунова для некоторых нелинейных стохастических дифференциальных уравнений 2-го порядка и вопросы устойчивости // Дифф. уравн. - 1981. - Т. 17. - № 6. - С. 1143-1145.
16. *Шумафов М.М.* Об устойчивости по вероятности линейных стохастических систем второго порядка // Труды Физ. Общ. Респ. Адыгея. - 2009. - № 14. - С. 61-66.
17. *Шумафов М.М.* Стохастическая устойчивость двумерных линейных стационарных систем // Вестник АГУ. - 2010. - № 1. - С. 9-21.
18. *Малкин И.Г.* Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования // Прикл. матем. и мех. - 1952. - Т. 16. - Вып. 3. - С. 365-368.
19. *Еругин Н.П.* Об одной задаче теории устойчивости систем автоматического регулирования // Прикл. матем. и мех. - 1952. - Т. 16. - Вып. 5. - С. 620-628.

On the stability of two-dimensional stochastic systems of the differential equations with one nonlinearity in drift vector

M.M. Shumafov

In this paper the investigation of a stochastic stability of the two-dimensional differential systems which right side is perturbed by Gaussian white noise is carried out. It is supposed that the nonlinear vector is additively divided on variables, and noise intensity depending only from one of two components of random process. The cases, when in expression of the nonlinear drift vector three of four functions are linear, and one function of them is nonlinear are considered. Sufficient conditions of asymptotic stability on probability in the whole and exponential stability on the quadratic average of solutions of the systems are obtained. The investigation of stochastic stability is carry out by modified Lyapunov's functions method.

