2 0 1 0 г **№ 15**

Т р у д ы Ф О Р А

ДИССИПАТИВНОСТЬ ДВУМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ, ОПРЕДЕЛЯЕМЫХ СТОХАСТИЧЕСКИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫМИ УРАВНЕНИЯМИ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОСТЬЮ

М.М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Получены эффективные достаточные условия диссипативности двумерных динамических систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями второго порядка с одной нелинейной функцией. Исследование ведется модифицированным методом функций Ляпунова.

1. Введение

Математическое понятие диссипативности детерминированной динамической системы (D - системы), описываемой дифференциальными уравнениями, было введено в работе Левинсона [1]. Впоследствии D - поведение решений дифференциальных уравнений изучалось в работах Йошизавы, Ла-Салля и Лефшеца, Демидовича и других авторов. Обзор результатов этих работ приводится, например, в [2]. Одной из первых работ, где изучалось D - поведение решений стохастических дифференциальных уравнений с широким применением метода функций Ляпунова, были работы Хасьминского [3, 4] и Кушнера [5]. В этих работах был развит аппарат функций Ляпунова для исследования устойчивости, а также различных видов ограниченности (включая D - поведение), решений стохастических дифференциальных уравнений.

В настоящей статье изучается свойство диссипативности (D - поведения) двумерных стохастических систем, описываемых стохастическими дифференциальными уравнениями второго порядка с одной нелинейной функцией. Исследование проводится модифицированным методом функций Ляпунова. Нами получены достаточные условия диссипативности рассматриваемых систем.

2. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную стохастическую систему вида

$$\dot{x} = y, \ \dot{y} = -ax + \varphi(x,y,t) + \sigma(x,y)\xi(t,\omega), \tag{1}$$

где $a > 0$ - константа функции $\varphi(x,y,t)$ и $\sigma(x,y)$, $x, y \in (-\infty,+\infty)$, $t \in [t_0,+\infty)$, удовлетворяют локальному условию Липшица относительно своих аргументов x и y, $\xi(t,\omega)$ - измеримый случайный процесс, абсолютно интегрируемый на каждом конечном интервале с вероятностью 1. Здесь ω - элементарное событие.

Можно говорить, что физически система (1) описывает малые колебания пружинного маятника с постоянной жесткостью, когда на маятник действует диссипативная сила $\varphi(x,y,t)$ и случайное возмущение $\sigma(x,y)\xi(t,\omega)$ интенсивности σ.

В детерминированном случае ($\sigma(x,y) \equiv 0$) различные свойства решений системы (1) к более общего вида, когда возвращающая сила нелинейна относительно смещения x или зависит от времени t, изучались в работах многих авторов (см., например, [2], [6]).

В случае, когда $\varphi(x,y,t) \equiv f(x)y$, система (1) рассмотрена в [3, 4] и для нее установлены достаточные условия диссипативности.

Цель настоящей статьи – получить достаточные условия диссипативности системы вида (1), когда диссипативная сила φ зависит нелинейно от скорости $y = \dot{x}$.

3. Диссипативность

При сделанных предположениях относительно функций φ, σ и случайного процесса $\xi(t,\omega)$ существует и единственное решение задачи Коши $x(t_0)=x_0(\omega)$ и $y(t_0)=y_0(\omega)$, представляющее абсолютно непрерывный с вероятностью 1 случайный процесс [4]. Здесь $x_0(\omega)$ и $y_0(\omega)$ - заданные случайные величины.

Напомним определение диссипативности систем со случайными правыми частями.

Определение ([3, 4]). Система (1) называется диссипативной, если случайные величины $|x(t,\omega;t_0,x_0)|,|y(t,\omega;t_0,x_0)|$ ограничены по вероятности равномерно относительно $t \geq t_0$ и относительно случайных величин $(x_0(\omega),y_0(\omega))\in A_r$, т.е.

$$\sup_{\{t\geq t_0\}\times A_r} P\{|(x(t,\omega;t_0x_0,y_0),(y(t,\omega;t_0x_0,y_0))|\}>R \to 0$$

при $R\to\infty$, где A_r - класс случайных величин ($x_0(\omega),y_0(\omega)$) таких, что

$$P\{|x_0(\omega),y_0(\omega)|<r\}=1.$$

Справедлива следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть в системе (1)* $\varphi(x,y,t)\equiv f(x,y)y$, *где функция* $f(x,y)$ *удовлетворяет тем же условиям, что и функция* φ. *Пусть, далее, случайный процесс* $\xi(t,\omega)$ *имеет ограниченное математическое ожидание и функция* $\sigma(x,y)$ *ограничена.*

Предположим, кроме того, что функция $f(x,y)$ *удовлетворяет условиям:*

1) $0\leq f(x,y)<k(|x|+|y|)$ для $|x|>X_0$, $|y|\leq Y_0$ и $|x|\leq X_0$, $|y|>Y_0$,

2) $f(x,y)\geq c_1>0$ для $|x|>X_0$, $|y|>Y_0$, $xy>0$,

3) $0<c_2<f(x,y)<c_3$ для $|x|>X_0$, $|y|>Y_0$, $xy<0$,

где $c_i\,(i=1,2,3)$, X_0, Y_0 - *некоторые положительные числа, а положительная константа* k *удовлетворяет неравенству*

$$k<\min\left\{\frac{m}{H},\frac{h_0 a}{h_1 Y_0}\right\}, \tag{2}$$

причем положительные числа m, H, h_1, h_2 *связаны с некоторой кусочно-гладкой функцией* $h(x)$, $x\in \mathbf{R}$ *такой, что*

$$h'(x)<-m \text{ при } |x|\leq X_0, \tag{3}$$

$$h_0<h'(x)<h_1 \text{ при } |x|>X_0' \geq X_0,\ H=\max_{|x|\leq X_0}|h(x)|. \tag{4}$$

Тогда система (1) *диссипативна.*

Замечание. В теореме 1 также утверждается неограниченная продолжаемость решений при $t\geq t_0$.

Доказательство теоремы 1. Рассмотрим функцию Ляпунова

$$V(x,y)=\begin{cases}[W(x,y)]^{\alpha}-C & \text{при } [W(x,y)]^{\alpha}>C,\\ 0 & \text{при } [W(x,y)]^{\alpha}\leq C,\end{cases}$$

где $C>\sqrt{X_0'^2+Y_0'^2}$, $\alpha\in(0,1/2]$ и $W(x,y)=\dfrac{ax^2}{2}+\dfrac{y^2}{2}+\gamma\, y\, h(x)$.

Здесь $\gamma>0$ пока произвольная, но позже выбираемая подходящим образом постоянная, а $h(x)$ - функция, удовлетворяющая соотношениям (3), (4).

Вычислим производную функции $W(x,y)$ в силу «укороченной» системы $\dot{x}=y$, $\dot{y}=-ax-f(x,y)y$.

Имеем

$$-\dot{W}=[\,f(x,y)-\gamma h'(x)]\,y^2+\gamma yh(x)f(x,y)+\gamma xh(x).$$

Оценим $-\dot{W}$ вне прямоугольника $\Pi=\{|\,x\,|\le X_0,|\,y\,|\le Y_0\}$.

Используя условие 1) теоремы 1 и неравенство (3) получаем оценку $-\dot{W}$ для $|\,x\,|\le X_0$, $|\,y\,|>Y_0$:

$$-\dot{W}\ge\gamma(m-kH)y^2-\gamma kHX_0\,|\,y\,|-\gamma aHX_0. \tag{5}$$

При $|\,x\,|>X_0$, $|\,y\,|\le Y_0$ имеем в силу (4) оценку

$$-\dot{W}\ge\gamma(h_0a-kh_1Y_0)x^2+\beta x+\mu, \tag{6}$$

где β и μ - константы, зависящие от a, k, h_0, h_1, γ, X_0 и Y_0.

Далее, при $|\,x\,|>X_0$, $|\,y\,|>Y_0$, $xy>0$ с учетом условия 2) теоремы 1 и неравенства (4) получим следующую оценку

$$-\dot{W}\ge(c_1-\gamma h_1)y^2-\gamma c_1h_0xy+\gamma h_0ax^2+\beta_1x+\beta_2y, \tag{7}$$

где β_1 и β_2 - константы, зависящие от a, c_1, h_0, γ и X_0.

Аналогично предыдущей оценке получаем

$$-\dot{W}\ge(c_2-\gamma h_1)y^2+\gamma c_3h_1xy+\gamma c_1h_0x^2+\beta_3x+\beta_4y, \tag{8}$$

где β_3 и β_4 - константы, зависящие от a, c_3, h_0, h_1, γ и X_0.

В силу неравенства (2) правые части неравенств (5) и (6) будут положительными в области $\{|\,x\,|>X_0',|\,y\,|>Y_0'\}$:

$$-\dot{W}\ge\delta_1x^2 \text{ для } |\,x\,|>X_0',\ |\,y\,|\le Y_0' \ (\delta_1>0), \tag{9}$$

$$-\dot{W}\ge\delta_2x^2 \text{ для } |\,x\,|\le X_0',\ |\,y\,|>Y_0' \ (\delta_2<0). \tag{10}$$

Выберем γ удовлетворяющим неравенству:

$$\gamma<\gamma_0\equiv\min\left\{\frac{c_1}{h_1},\frac{c_2}{h_1},\frac{4ac_1}{h_0c_1^2+4ah_1},\frac{4ac_2h_0}{h_1(h_1c_3^2+4h_0a)}\right\}.$$

Тогда квадратные формы в правых частях неравенств (7) и (8) будут положительно определенными. Поэтому для достаточно больших $|\,x\,|>X_0'\ge X_0$, $|\,y\,|>Y_0'\ge Y_0$ будем иметь оценку

$$-W\ge\delta_3(x^2+y^2),\ \delta_3>0. \tag{11}$$

Из (9) – (11) следует, что $\dot{W}$ отрицательно определена вне некоторого прямоугольника $\Pi'=\{|\,x\,|\le X_0',|\,y\,|\le Y_0'\}$.

Оценим теперь саму функцию $W(x,y)$. Имеем:

1. $|\,x\,|\le X_0$, $|\,y\,|>Y_0$:

$$\frac{y^2}{2}-\gamma H\,|\,y\,|-\frac{aX_0^2}{2}\le W(x,y)\le\frac{y^2}{2}+\gamma H\,|\,y\,|+\frac{aX_0^2}{2}. \tag{12}$$

2. $|\,x\,|>X_0$, $|\,y\,|\le Y_0$:

$$\frac{ax^2}{2}-\gamma h_1Y_0\,|\,x\,|+\mu_1\le W(x,y)\le\frac{ax^2}{2}+\gamma h_1Y_0\,|\,x\,|+\mu_2, \tag{13}$$

где μ_1 и μ_2 - константы, зависящие от a, h_1, γ, X_0 и Y_0.

3. $|x|> X_0$, $|y|> Y_0$, $xy>0$:

$$\frac{y^2}{2}+\gamma h_0 xy+\frac{ax^2}{2}+\ell_1(y)\le W\le\frac{y^2}{2}+\gamma h_1 xy+\frac{ax^2}{2}+\ell_2(y), \tag{14}$$

где $\ell_1(y)=r_1y+\mu_3$, $\ell_1(y)=r_2y+\mu_4$. Здесь константы r_1 и r_2 зависят от h_0, h_1, γ и X_0, а константы μ_3 и μ_4 - от a и X_0.

4. $|x|> X_0$, $|y|> Y_0$, $xy<0$:

$$\frac{y^2}{2}+\gamma h_1 xy+\frac{ax^2}{2}+\ell_3(y)\le W\le\frac{y^2}{2}+\gamma h_0 xy+\frac{ax^2}{2}+\ell_4(y), \tag{15}$$

где $\ell_3(y)=r_3y+\mu_5$, $\ell_4(y)=r_4y+\mu_6$. Здесь константы r_3 и r_4 зависят от h_0, h_1, γ и X_0, а константы μ_5, μ_6 - от a и X_0.

Квадратичные формы в неравенствах (14) и (15) будут положительно определенными, если выбрать $0<\gamma<\{\gamma_0,\sqrt{a}/h_1\}$. Далее, из оценок (12) – (15) следует, что $W(x,y)\to+\infty$ при $|x|+|y|\to\infty$.

Из неравенств (9) – (11) и (12) – (15) получаем, что соотношение $\dot W\le-\varepsilon W$ выполняется в дополнении прямоугольника Π' при достаточно малом $\varepsilon>0$. Отсюда следует, что и функция $V(x,y)$ удовлетворяет также соотношению $\dot V\le-\beta V$ при некотором $\beta>0$.

Нетрудно проверить, что функция $V(x,y)$ удовлетворяет глобальному условию Липшица на всех плоскостях (x,y).

Таким образом, выполнены все условия общей теоремы Хасьминского [см. 4, стр. 31]. Следовательно, система (1) доказана.

Следующая теорема доказывается аналогично предыдущей с использованием той же самой функции Ляпунова.

Теорема 2. *Пусть в системе* (1) *случайный процесс* $\xi(t,\omega)$ *имеет ограниченное математическое ожидание, функция* $\sigma(x,y)$ *ограничена. Пусть, далее, функция* $\varphi(x,y,t)$ *удовлетворяет условиям:*

1) $\varphi(x,y,t)\operatorname{sgn}y<-c_1|y|$ *для* $|x|> X_0$, $|y|> Y_0$, $xy>0$,

2) $-c_2(|x|+|y|)<\varphi(x,y,t)\operatorname{sgn}y<-c_1|y|$ *для* $|x|> X_0$, $|y|> Y_0$, $xy<0$,

3) $-c_3|y|(|y|+X_0)<\varphi(x,y,t)\operatorname{sgn}y<\gamma M|y|$ *для* $|x|\le X_0$, $|y|> Y_0$,

4) $|\varphi(x,y,t)\le kY_0(|x|+Y_0')$ для $|x|\ge X_0$, $|y|\le Y_0$,

где c_1, M, X_0, Y_0, Y_0' *- некоторые положительные числа, а* c_2, c_3, k *и* γ *числа такие, что*

$$0<c_2<\frac{ah_0}{h_1},\ 0<c_3<\frac{m}{H},\ 0<k<\frac{ah_0}{h_1Y_0},$$

$$0<\gamma<min\left\{\frac{c_1}{h_1},\frac{\sqrt{a}}{h_1},\frac{4c_1(ah_0-c_2h_1)}{c_2^2h_1^2+4h_1(ah_0-c_2h_1)}\right\},$$

причем положительные константы m, H_0, h_0, h_1 *связаны с некоторой кусочно-гладкой функцией* $R(x)$, *удовлетворяющей условиям* (3), (4).

Тогда система (1) *диссипативна.*

Следствие. Пусть в системе (1) $\varphi(x,y,t) \equiv F(y)$. Пусть, далее, $\xi(t,\omega)$ и $\sigma(x,y)$ те же самые, что и в теореме 2. Тогда, если $0 < c_1 < F(y)/y < c_2$ для $|y| > \Upsilon_0$, где c_1, c_2 и Υ_0 - некоторые положительные числа, то система (1) диссипативна.

Замечание. Полученные нами достаточные условия являются обобщенными в какой-либо форме условиями Фауса-Гурвица.

Литература

1. *Levinson N.* Transformation theory of nonlinear differential equations of the second order // Ann. of Math. - 1944. - Vol. 45. - № 4. - P. 723-737.
2. *Рейссиг Р., Сансонс Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1974. - 318 с.
3. *Хасьминский Р.З.* О диссипативности случайных процессов, определяемых дифференциальными уравнениями // Проблемы передачи информации. - 1965. - Т. 1. - № 1. - С. 88-104.
4. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. М.: Наука, 1969. - 367 с.
5. *Кушнер П.Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. М.: Мир, 1969. - 200 с.
6. *Моисеев Н.Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М.: Наука, 1969. - 379 с.

Dissipativity of the two-dimensional dynamical systems defined by stochastic second-order differential equations with one nonlinearity

M.M. Shumafov

In this paper the property of dissipativity of the two-dimensional dynamical systems defined by stochastic second order equations with a nonlinear function is studied. Effective sufficient conditions of dissipativity of the systems are obtained. The investigation of the systems are carried out by modificated Lyapunov's functions method.

.

