ОБ УРАВНЕНИИ КОРТЕВЕГА–ДЕ ФРИЗА–БЮРГЕРСА

С.К. Куижева, Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический университет, г. Майкоп

В статье указана возможность получения точных решений уравнения Кортевега–де Фриза–Бюргерса в виде бегущей волны с помощью действительных корней уравнения восьмой степени.

1. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$u_t + (\alpha u + \beta)u_x + \gamma u_{xxx} = (au_x + bu_{xt})_x, \tag{1}$$

где $\alpha, \beta, \gamma, a, b$ – некоторые постоянные.

Известно [1, с. 261], что уравнение (1) описывает следующие явления: перенос энергии гидролиза молекул АТФ вдоль белковых молекул в виде солитонов; перенос почвенной влаги в зоне аэрации с учетом ее движения против потенциала влажности.

Будем искать решение уравнения (1) в виде бегущей волны: $u(t,x) = u(x - v_0 t)$, где v_0 – некоторая постоянная. Введем обозначение: $\xi = x - v_0 t$. Тогда уравнение (1) запишется в виде уравнения КдФ – Бюргерса (см., например, [2], [3]):

$$(\gamma - bv_0)u_{\xi\xi\xi} + (\alpha u + \beta - v_0)u_\xi = au_{\xi\xi}. \tag{2}$$

Не ограничивая общности, можно считать, что $\gamma - bv_0 = 1$. Тогда уравнение (2) запишется в виде

$$u_{\xi\xi\xi} + (\alpha u + \beta - v_0)u_\xi = au_{\xi\xi}. \tag{3}$$

Интегрируя уравнения (3), получаем

$$u_{\xi\xi} + \frac{\alpha}{2}u^2 + (\beta - v_0)u + c = au_\xi. \tag{4}$$

В работе [2] найдено точное решение уравнения (4) при некотором соотношении между коэффициентами уравнения (4).

В данной статье показывается, что при преобразовании уравнения (4) можно получить различные решения уравнения (4) с помощью действительных корней уравнения восьмой степени, причем, коэффициенты уравнения (4) остаются независимыми друг от друга. В частном случае, для уравнения КдФ $(a = 0)$ количество различных точных решений можно получить с помощью действительных корней уравнения четвертой степени.

Будем искать решение уравнения (4) в следующем виде:

$$u = m_0 + m_1 y + m_2 y^2, \tag{5}$$

где $y_\xi = y^2 + py + q$, m_0, m_1, m_2, p, q – некоторые постоянные.

Вычислим $u^2, u_\xi, u_{\xi\xi}$ и подставим в уравнение (4). Для удобства вычислений введем обозначение: $\tilde{\beta} = \beta - v_0$. После некоторых преобразований получим систему уравнений относительно неизвестных m_0, m_1, m_2, p, q:

$$6m_2 + \frac{\alpha}{2}m_2^2 = 0, \tag{6}$$

$$2m_1 + 10m_2 p + \alpha m_1 m_2 - 2am_2 = 0, \tag{7}$$

$$8m_2q+2m_1p+4m_2p^2+m_1q+\frac{\alpha}{2}m_1^2+\alpha m_0m_2+\widetilde{\beta}m_2-a(m_1+2m_2p)=0\,, \quad (8)$$

$$2m_1q+6m_2pq+m_1p^2+2m_2pq+\alpha m_0m_1+\widetilde{\beta}m_1-a(m_1p+2m_2q)=0\,, \quad (9)$$

$$m_1pq+m_2q^2+\frac{\alpha}{2}m_0^2+\widetilde{\beta}m_0-am_1q-c=0\,. \quad (10)$$

Из уравнения (6) имеем $m_2=-\dfrac{12}{\alpha}$. (Случай $m_2=0$ тривиален). Из уравнения (7) получаем $m_1=\dfrac{12}{\alpha}\left(\dfrac{a}{5}-p\right)$. Уравнения (8) – (10) приводятся соответственно к виду:

$$4p^2-pq-ap+\left(\frac{a}{5}-8\right)q+\alpha m_0=\widetilde{\beta}-\frac{a^2}{25}, \quad (11)$$

$$p^3-\frac{6a}{5}p^2+8pq+\alpha pm_0+\left(\frac{a^2}{5}+\widetilde{\beta}\right)p-2aq-\frac{\alpha a}{5}m_0=\frac{2a^2}{5}+\frac{a\widetilde{\beta}}{5}, \quad (12)$$

$$p^2q+\left(\frac{a}{5}+\frac{12a}{\alpha}\right)-\frac{24}{\alpha}q^2+\frac{\alpha}{2}m_0^2-\widetilde{\beta}m_0=c+\frac{12a^2}{5\alpha}. \quad (13)$$

Выразим m_0 из уравнения (11). Тогда уравнения (12) – (13) запишутся в виде:

$$\left(p^2+\left(16-\frac{2}{5}\right)p+\frac{a}{5}\left(\frac{a}{5}-18\right)\right)q=p^3-3p^2-\left(2\widetilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)p+\frac{a}{5}\left(2a+2\widetilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right), \quad (14)$$

$$\left[\left(\frac{1}{2\alpha}p^2-\frac{1}{\alpha}\left(\frac{a}{5}-8\right)p+\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{a}{5}-8\right)^2-\frac{24}{\alpha}\right)q^2+\left(-\frac{4}{\alpha}p^3+\left(\frac{4}{\alpha}\left(\frac{a}{5}-8\right)+\frac{a}{\alpha}+1\right)\right)\right]p^2+$$

$$+\left[\left(\frac{a}{5}+\frac{12a}{\alpha}+\frac{1}{2\alpha}\left(2\widetilde{\beta}-\frac{2a^2}{25}+2a\left(\frac{a}{5}-8\right)\right)\right)p+\frac{\widetilde{\beta}}{\alpha}+\frac{1}{2\alpha}\left(-2\widetilde{\beta}+\frac{2a^2}{25}\right)\left(\frac{a}{5}-8\right)\right]q+$$

$$+\frac{1}{2\alpha}\left(\widetilde{\beta}^2-\frac{a^4}{625}-\frac{2\widetilde{\beta}a^2}{25}\right)+\frac{\widetilde{\beta}}{\alpha}\left(\widetilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)=c+\frac{12a^2}{5\alpha}. \quad (15)$$

Выразим q из уравнения (14) и подставим в уравнение (15). Предварительно вычислим q^2. Для этого возведем обе части уравнения (14) в квадрат.

$$\left[p^4+2\left(16-\frac{2a}{5}\right)p^3+\left(256-20a+\frac{6a^2}{25}\right)p^2+\frac{2a}{5}\left(-288+\frac{52a}{5}-\frac{2a^2}{25}\right)p+\frac{a^2}{25}\left(\frac{a}{5}-18\right)^2\right]q^2=$$

$$=p^6-6p^5+\left(9-2\left(2\widetilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)\right)p^4+\left(16\widetilde{\beta}+\frac{2a}{5}-\frac{8a^2}{25}\right)p^3+\left(-10\widetilde{\beta}-\frac{6a}{5}+\frac{11a^2}{5}\right)p^2-$$

$$-2\left(\widetilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)\left(\frac{a}{5}+2\widetilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)p+\left(\frac{a}{5}+2\widetilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right). \quad (16)$$

Уравнение (15) после подстановки значения q примет вид:

$$\left[p^6-6p^5+\left(9-2\left(2\tilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)\right)p^4+\left(16\tilde{\beta}+\frac{2a}{5}-\frac{8a^2}{25}\right)p^3+\left(-10\tilde{\beta}-\frac{6a}{5}+\frac{11a^2}{5}\right)p^2-\right.$$

$$\left.-2\left(\tilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)\left(\frac{a}{5}+2\tilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)p+\left(\frac{a}{5}+2\tilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)\right]\times\left[p^2+\left(16-\frac{2}{5}\right)p+\frac{a}{5}\left(\frac{a}{5}-18\right)\right]+$$

$$+\left[p^3-3p^2-\left(2\tilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)p+\frac{a}{5}\left(2a+2\tilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)\right]\times\left[p^2+\left(16-\frac{2}{5}\right)p+\frac{a}{5}\left(\frac{a}{5}-18\right)\right]\times$$

$$\times\left[-8p^3+\left(\frac{18a}{5}-64\right)p^2+\left(2\tilde{\beta}-16a-\frac{8a^2}{25}\right)p-6\tilde{\beta}-\frac{a\tilde{\beta}}{5}-\frac{16a^2}{25}+\frac{2a^3}{125}\right]+$$

$$+\left(3\tilde{\beta}^2-\frac{4\tilde{\beta}a^2}{25}+\frac{a^4}{625}-c-\frac{12a^2}{\alpha}\right)\times\left[p^4+2\left(16-\frac{2a}{5}\right)p^3+\left(256-20a+\frac{6a^2}{25}\right)p^2+\right.$$

$$\left.+\frac{2a}{5}\left(-288+\frac{52a}{5}-\frac{2a^2}{25}\right)p+\frac{a^2}{25}\left(\frac{a}{5}-18\right)^2\right]=0. \qquad (17)$$

Уравнение (17) представляет собой уравнение восьмой степени относительно неизвестной p. Нахождение действительных корней уравнения (17) представляет собой трудоемкую задачу. Тем не менее, можно сформулировать задачу о существовании действительных корней уравнения (17), при которых уравнение (4) будет иметь точное решение.

Из рис.1 видно, что уравнение (17), при $a=5$, $\tilde{\beta}=6{,}9$, $c=1$, $\alpha=2$, имеет восемь действительных корней (два крайних корня изображены отдельно от остальных корней, но, поскольку, ветви параболы направлены вниз, то эти корни существуют).

Среди точных решений важную роль играют несингурярные (солитонные) решения, которые соответствуют некоторым действительным корням уравнения (17). Интересно выяснить количество солитонных решений, порождаемых корнями уравнения (17).

Из равенства (5) получаем решение уравнения (4):

$$u=m_2\left(\left(y+\frac{m_1}{2m_2}\right)^2+\frac{4m_0m_2-m_1^2}{4m_2^2}\right),$$

где $m_2=-\dfrac{12}{\alpha}$, $m_1=\dfrac{12}{\alpha}\left(\dfrac{a}{5}-p\right)$, $m_0=\dfrac{1}{\alpha}\left(\tilde{\beta}-\dfrac{a^2}{25}-4p^2+pq+ap-\left(\dfrac{a}{5}-8\right)q\right)$,

$$q=\frac{p^3-3p^2-\left(2\tilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)p+\frac{a}{5}\left(2a+2\tilde{\beta}-\frac{a^2}{25}\right)}{\left(p^2+\left(16-\frac{2a}{5}\right)p+\frac{a}{5}\left(\frac{a}{5}-18\right)\right)}.$$

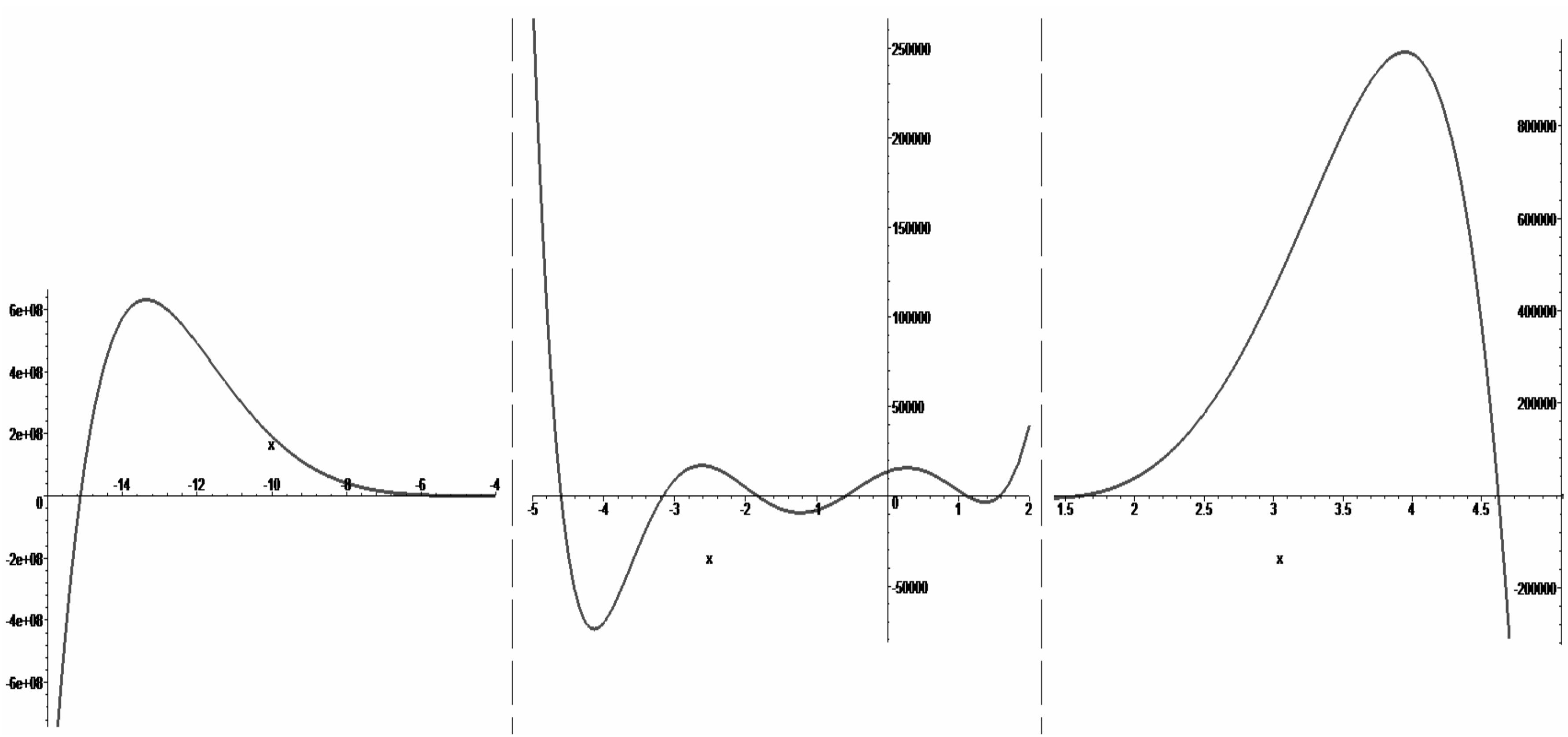
6e+08
4e+08
2e+08
0
-2e+08
-4e+08
-6e+08
-14
-12
-10
-8
-6
-4
x
250000
200000
150000
100000
50000
-50000
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
x
800000
600000
400000
200000
-200000
1.5
2
2.5
3
3.5
4
4.5
x

Рис. 1.

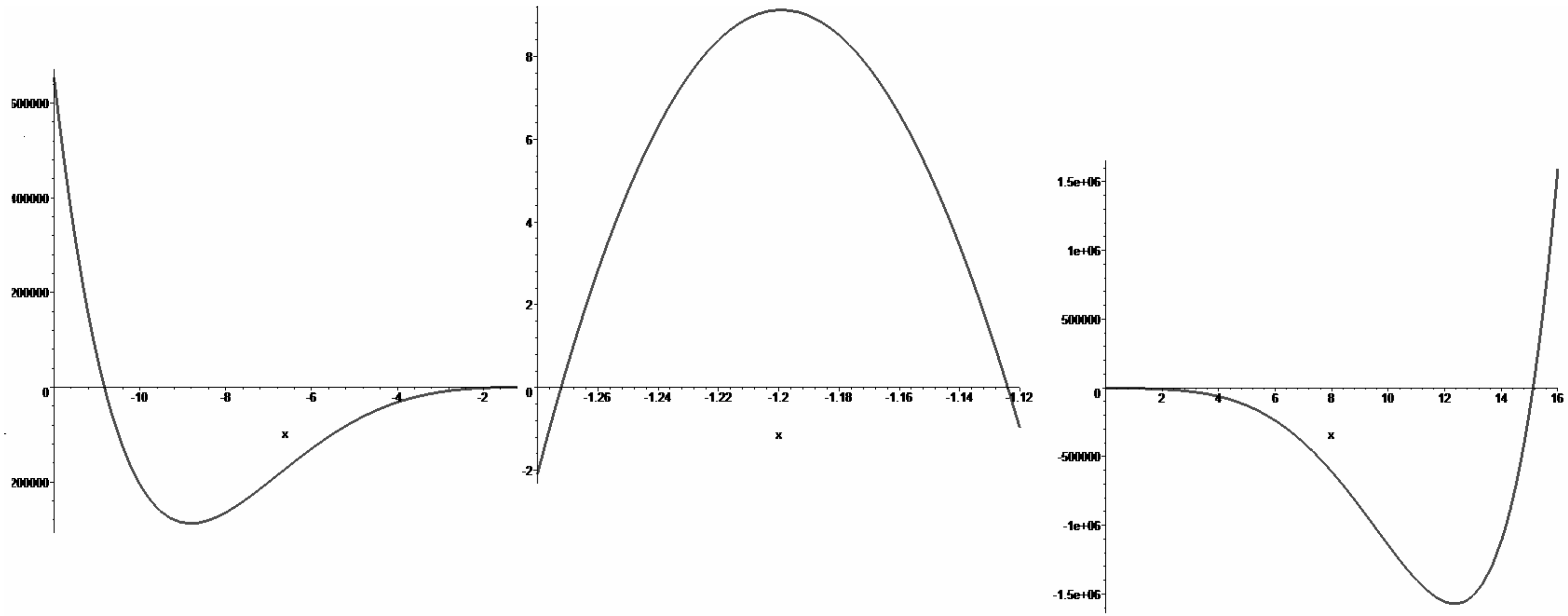
600000
400000
200000
0
-200000
-10
-8
-6
-4
-2
x
8
6
4
2
0
-2
-1.26
-1.24
-1.22
-1.2
-1.18
-1.16
-1.14
-1.12
x
1.5e+06
1e+06
500000
0
-500000
-1e+06
-1.5e+06
2
4
6
8
10
12
14
16
x

Рис. 2.

Условие, при котором уравнение (4) имеет несингулярное (солитонное) решение, задается неравенством: $\frac{p^2}{4} \ge q$ или $\frac{p^2}{4} \ge \frac{p^3 - 3p^2 - \left(2\tilde{\beta} - \frac{a^2}{25}\right)p + \frac{a}{5}\left(2a + 2\tilde{\beta} - \frac{a^2}{25}\right)}{\left(p^2 + \left(16 - \frac{2a}{5}\right)p + \frac{a}{5}\left(\frac{a}{5} - 18\right)\right)}$, то есть

$$\left[p^4 + \left(12 - \frac{2a}{5}\right)p^3 + \left(\frac{a}{5}\left(\frac{a}{5} - 18\right) + 12\right)p^2 + 4\left(2\tilde{\beta} - \frac{a^2}{25}\right)p - \frac{4a}{5}\left(2a + 2\tilde{\beta} - \frac{a^2}{25}\right)\right] \times$$
$$\times \left[p^2 - \left(16 - \frac{2a}{5}\right)p + \frac{a}{5}\left(\frac{a}{5} - 18\right)\right] \ge 0 . \tag{18}$$

На рис.2. графически изображено решение неравенства (18). Приближенные вычисления показывают, что интервалы, на которых выполняется неравенство (18) следующие: $(-\infty, -10{,}827)$, $(-1{,}272; -1{,}124)$, $(15{,}124; +\infty)$.

Приближенные значения корней уравнения (17) таковы: $p_1 \approx -15{,}12$, $p_2 \approx -4{,}60$, $p_3 \approx -3{,}20$, $p_4 \approx -1{,}825$, $p_5 \approx -0{,}60$, $p_6 \approx 1{,}12$, $p_7 \approx 1{,}58$, $p_8 \approx 4{,}62$. Корень $p_1 \in (-\infty, -10{,}827)$. Остальные корни не принадлежат указанным интервалам.

Следовательно, при $a = 5$, $\tilde{\beta} = 6{,}9$, $c = 1$, $\alpha = 2$ существует единственное несингурярное (солитонное) решений, соответствующее корню p_1.

Уравнение $y_\xi = y^2 + py + q$ запишется в виде $y_\xi = (y - y_1)(y - y_2)$, откуда следует, что решение с начальными данными $y(\xi_0) = y_0$, $y_1 < y_0 < y_2$,
имеет вид:

$$y(\xi) = \frac{y_1 - y_2 \frac{y_0 - y_1}{y_0 - y_2} \exp((y_1 - y_2)(\xi - \xi_0))}{1 - \frac{y_0 - y_1}{y_0 - y_2} \exp((y_1 - y_2)(\xi - \xi_0))}, \tag{19}$$

где $y_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$.

Отметим, что при $\xi \to +\infty$ $y(\xi) \to y_1$, при $\xi \to -\infty$ $y(\xi) \to y_2$.

Таким образом, несингулярное решение уравнения (4) имеет вид:

$$u = m_2\left(\left(\frac{y_1(y_0 - y_2) - y_2(y_0 - y_1)\exp((y_1 - y_2)(\xi - \xi_0))}{y_0 - y_2 - (y_0 - y_1)\exp((y_1 - y_2)(\xi - \xi_0))} + \frac{m_1}{2m_2}\right)^2 + \frac{4m_0 m_2 - m_1^2}{4m_2^2}\right). \tag{20}$$

Схематический график функции (20) с изменением масштаба представлен на рис.3. По аналогии с одиночным решением уравнения sin-Гордон это решение можно назвать кинком (см., например, [4], с.26).

2. Покажем, что в частном случае, в случае уравнения Кортевега–де Фриза ($a = 0$), сформулированная задача оказывается разрешимой. При этом система уравнений (6) – (10) упрощается:

$$m_2 = -\frac{12}{\alpha},\ m_1 = -\frac{12}{\alpha} p,\ 8q + pq + \alpha m_0 + \tilde{\beta} = 0, \tag{21}$$

$$p(p^2 + 8q + \alpha m_0 + \tilde{\beta}) = 0, \tag{22}$$

$$-\frac{12}{\alpha} p^3 - \frac{24}{\alpha} q^2 + \frac{\alpha}{2} m_0^2 + \tilde{\beta} m_0 - c = 0 . \tag{23}$$

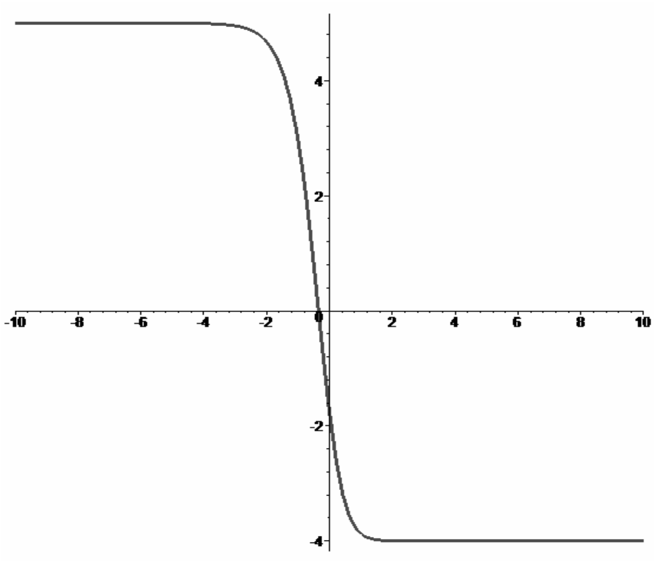

Рис.3.

Уравнения (21) – (23) примут вид:

$$m_0 = -\frac{1}{\alpha}(pq + 8q + \tilde{\beta}),\; p^2 - pq = 0.$$

Рассмотрим случай 1). Пусть $p = 0$. Тогда искомые параметры таковы: $m_2 = -\dfrac{12}{\alpha}$, $m_1 = 0$, $m_0 = -\dfrac{1}{\alpha}(8q + \tilde{\beta})$, $q = \pm\sqrt{\dfrac{\alpha c}{8} + \dfrac{\tilde{\beta}^2}{8}}$.

2). Пусть $q = p$. Тогда искомые параметры примут вид:

$$m_2 = -\frac{12}{\alpha},\; m_1 = -\frac{12}{\alpha}p,\; m_0 = -\frac{1}{\alpha}(p^2 + 8p + \tilde{\beta}),$$

$$p^2(p-2)(p-6) = \tilde{\beta}^2 + c. \qquad (24)$$

Уравнение (24) разрешимо относительно неизвестной p. Остается открытым вопрос о числе действительных корней уравнения (24). Но эта задача может быть решена с помощью теоремы Штурма (см., например, [5]). В частном случае, когда $(\beta - v_0)^2 + c = 0$, точное решение, соответствующее корню $p = 6$, является несингулярным (солитонным).

Таким образом, как показывают вычисления, при $p = 0$ и $p = 6$ существуют два точных решения, являющихся солитонными.

В частности, при $(\beta - v_0)^2 + c = -2$ получаем четыре действительных корня уравнения (24) и, следовательно, четыре различных точных решения уравнения КдФ (рис.4.).

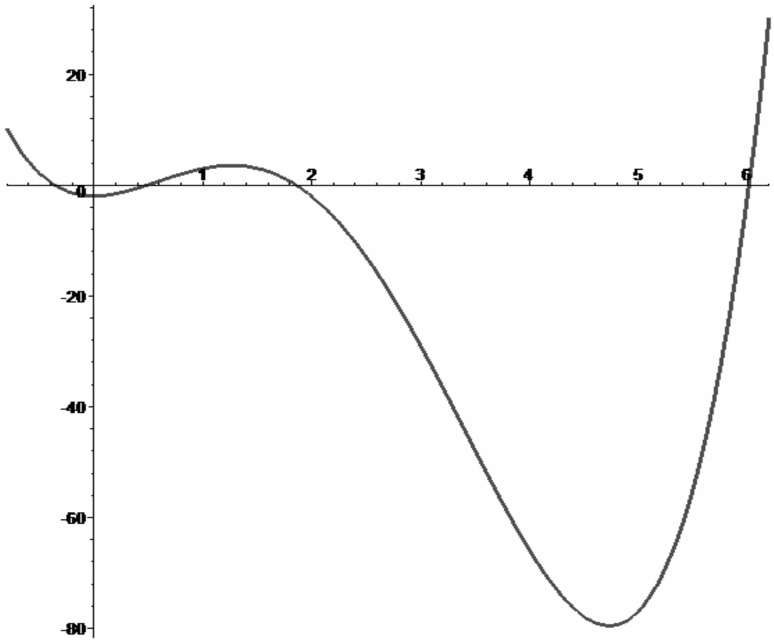

Рис.4.

3. Покажем, каким образом получаемые решения u_1 и u_2 уравнения (4) связаны между собой.

Рассмотрим два уравнения Рикатти, соответствующие двум различным действительным корням уравнения (17):

$$y_\xi = y^2 + p_1 y + q_1,\ z_\xi = z^2 + p_2 z + q_2.$$

Дробно-линейное преобразование зададим следующим образом:

$z = \dfrac{Ay+B}{Cy+D}$, где A, B, C, D – выражаются через p_1, q_1, p_2, q_2.

Вычисления показывают, что матрица дробно-линейного преобразования, определяющая внутреннюю симметрию решений уравнения (4), имеет вид:

$$M = \begin{pmatrix} k & \frac{k}{2}(p_1 - p_2) - q_2 \\ 1 & \frac{1}{2}(p_1 + p_2) + k \end{pmatrix},\ \det M = k^2 + p_2 k + q_2,$$

где параметр k удовлетворяет уравнению:

$$\left(\frac{1}{4}(p_1^2 - p_2^2) - p_2 q_2 + q_2 - 2q_1\right)k^2 + \left(\frac{1}{4}p_2(p_1^2 - p_2^2) + 2q_2 p_1 - 2q_1 p_2\right)k +$$
$$+\left(q_2(p_1 + p_2)^2 - p_2 q_2(p_1 + p_2) - 2q_1 q_2 + q_2^2\right) = 0.$$

Отсюда, используя соотношение (5), нетрудно установить связь между решениями u_1 и u_2 уравнения (4).

Литература

1. *Нахушев А.М.* Уравнения математической биологии: Учеб. пособие для университетов. – М.: Высш. шк., 1995. – 301 с.

2. *Kudryashov N.A, Demina M.V.* Newton polygons for finding exact solutions.//Arxiv:nlin/0606018v1, [nlinS1], 6 June 2006.

3. *Наумкин П.И., Шишмарев И.А.* Задача о распаде ступеньки для уравнения Кортевега – де Фриза – Бюргерса.//Функц. анализ и его приложения, 1991. – Т. 25. – Вып. 1. – С.21-32.
4. *Додд Р., Эйлбек Дж., Гиббон Дж., Моррис Ч.* Солитоны и нелинейные волновые уравнения: Пер. с анг. – М.: Мир, 1988. – 694 с.
5. *Курош А.Г.* Курс высшей математики. – М.: Наука 1968. – 432 с.

On the Korteweg-de Vries–Burgers equation

S.K. Kuizheva, L. Zh. Palandzhyants

The article indicated the possibility of obtaining exact solutions of the Korteweg-de Vries-Burgers equation in the form of a traveling wave with the real roots of the eighth degree.

