НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ВАРИАЦИИ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ МАТРИЧНОЙ ФОРМЫ КРИВОЛИНЕЙНОГО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

В.А. Козлов, Е.Н. Кумшаев, Л.Ж. Паланджянц

Армавирский государственный педагогический университет, г. Армавир,
Майкопский государственный технологический университет, г. Майкоп.

В статье изучаются некоторые свойства вариации подынтегральной матричной формы криволинейного мультипликативного интеграла.

Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл вдоль кривой γ в области $D \subset R^2$ с параметризацией $x = x(t), y = y(t)$ [1]:

$$\overset{\cup}{\int_{\gamma}} E + P(x,y)dx + Q(x,y)dy\,, \tag{1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ − непрерывно дифференцируемы функции, определенные в области $D \subset R^2$ со значениями в алгебре квадратных матричных функций $Mat(n,R)$.

$K(P,Q) = Q_x - P_y + PQ - QP$ − кривизна интеграла (1).

Подвергнем подынтегральную матричную форму изменению путем умножения слева подынтегральных функций на матричную функцию $M(x,y)$ − непрерывно дифференцируемую функцию, определенную в области $D \subset R^2$ со значениями в алгебре квадратных матричных функций $Mat(n,R)$ и рассмотрим интеграл:

$$\overset{\cup}{\int_{\gamma}} E + M(x,y)P(x,y)dx + M(x,y)Q(x,y)dy\,. \tag{2}$$

В работах [2,3] изучался вопрос о вариации подынтегральной матричной формы, при которой кривизна интеграла (2) была нулевой. При этом были сформулированы коэффициентные критерии точности подынтегральной матричной формы.

Отметим, что в одномерном случае вопрос о вычислении мультипликативного интеграла (2) является естественным обобщением на случай матричных дифференциальных форм задачи о нахождении интегрирующего множителя для 1-форм (см., например, [4, с.96]).

В данной статье рассматриваются свойства вариации подынтегральной матричной формы криволинейного мультипликативного интеграла. Для матричных функций второго порядка сформулированы и решены задачи, связанные со свойствами кривизны криволинейного мультипликативного интеграла при аддитивной и мультипликативной вариации.

1. Свойства мультипликативной вариации

Докажем предварительное утверждение.

Лемма 1. Если матричная функция $M(x,y)$ перестановочна со своими частными производными, то частные производные перестановочны между собой.

Пусть

$$[M(x,y), M_x(x,y)] = 0\,, \tag{3}$$

$$[M(x,y), M_y(x,y)] = 0. \tag{4}$$

Тогда

$$[M_x(x,y), M_y(x,y)] = 0, \tag{5}$$

Доказательство. Продифференцируем равенства (3) и (4) соответственно по y и по x:

$$[M_y(x,y), M_x(x,y)] + [M(x,y), M_{yx}(x,y)] = 0, \tag{6}$$

$$[M_x(x,y), M_y(x,y)] + [M(x,y), M_{xy}(x,y)] = 0. \tag{7}$$

Вычитая из равенства (6) равенство (7), получаем равенство (5).
Лемма 1 доказана.

Теорема 1. Пусть $K(P,Q) = 0$. Если выполнены равенства (3) и (4), то $K(MP, MQ) = 0$.

Доказательство. Имеет место равенство:

$$K(MP, MQ) = (M_x + MP)Q - (M_y + MQ)P + M \cdot K(P,Q) + [MP, MQ]. \tag{8}$$

Так как условие $K(P,Q) = 0$ равносильно условиям $M_x + MP = 0, M_y + MQ = 0$, то из равенства (8) получаем

$$K(MP, MQ) = [MP, MQ] \tag{9}$$

Учитывая, что $P = -M^{-1}M_x, Q = -M^{-1}M_y$, из равенства (8) с учетом леммы 1 получаем

$$K(MP, MQ) = [M_y, M_x] = 0. \tag{10}$$

Теорема 1. доказана.

Замечание. Таким образом, для нахождения матричной функции $M(x,y)$ нужно решить матричное дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка:

$$M_y M_x - M_x M_y = 0. \tag{11}$$

Условия перестановочности матричной функции $M(x,y)$ со своими частными производными первого порядка накладывают на матричную функцию $M(x,y)$ определенные условия.

Следствие 1. Пусть $K(P,Q) = 0$ и выполнены равенства (3) и (4).

Тогда матричная функция $M(x,y)$ перестановочна с матричными функциями $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, то есть, выполняются равенства:

$$[M(x,y), P(x,y)] = 0, \tag{12}$$

$$[M(x,y), Q(x,y)] = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Поскольку $K(P,Q) = 0$, то

$M_x M = -MMP, MM_x = -M^2 P$, откуда, в силу неособости матричной функции $M(x,y)$, следует, что

$$[M(x,y), M_x(x,y)] = M(MP - PM) = 0,$$

Аналогично доказывается, что

$$[M(x,y), M_y(x,y)] = M(MQ - QM) = 0,$$

Следствие 1 доказано.

Таким образом, для нахождения структуры матричной функции $M(x,y)$ необходимо найти общий коммутатор подынтегральных функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$.

2. Свойства аддитивной вариации

Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл вдоль кривой γ в области $D \subset R^2$ с параметризацией $x = x(t), y = y(t)$:

$$\overset{\cup}{\int_{\gamma}} E + (P(x,y) + A(\lambda))dx + Q(x,y)dy\,, \tag{14}$$

где $P(x,y) = (p_{ij})$ и $Q(x,y) = (q_{ij})$ − непрерывно дифференцируемые матричные функции второго порядка, $A(\lambda) = (\lambda_{ij})$ – постоянная матрица второго порядка, $i, j = 1,2$.

1. Найдем условия, при выполнении которых кривизна интеграла (14) $\widetilde{K} = (\widetilde{k}_{ij})$ не зависит от λ.

Имеет место

Теорема 3. Пусть выполнены условия

$$p_{21} = q_{21},\ p_{12} = q_{12},\ p_{11} - p_{22} = q_{11} - q_{22}\,. \tag{15}$$

Тогда кривизна интеграла (14) не зависит от λ.

Доказательство. Кривизна интеграла (14) имеет вид:

$\widetilde{K} = \begin{pmatrix} \widetilde{k}_{11} & \widetilde{k}_{12} \\ \widetilde{k}_{21} & \widetilde{k}_{22} \end{pmatrix}$, где $\widetilde{k}_{11} = k_{11} + \lambda_{12}(p_{21} - q_{21}) + \lambda_{21}(q_{12} - p_{12})$,

$\widetilde{k}_{12} = k_{12} + \lambda_{12}(q_{11} - q_{22} + p_{22} - p_{11}) + (\lambda_{11} - \lambda_{22})(p_{12} - q_{12})$,

$\widetilde{k}_{21} = k_{21} + \lambda_{21}(q_{22} - q_{11} + p_{11} - p_{22}) + (\lambda_{22} - \lambda_{11})(p_{21} - q_{21})$,

$\widetilde{k}_{22} = k_{22} + \lambda_{12}(q_{21} - p_{21}) + \lambda_{21}(p_{12} - q_{12})$.

Отсюда следует, что при выполнении условий (15) кривизна интеграла (1) не зависит от λ. Теорема 3 доказана.

Замечание 1. Имеет место равенство: $\widetilde{K} = K$.

Замечание 2. Из условий (15) можно определить общий вид матричных функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$. Вычисления показывают, что

$$P(x,y) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},\ Q(x,y) = \begin{pmatrix} q_{11} & p_{12} \\ p_{21} & q_{22} \end{pmatrix}.$$

2. Найдем условия на матричные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$, при выполнении которых собственные значения кривизны интеграла (14) не зависит от λ. Для этого достаточно установить, что $sp\widetilde{K} = spK$, $\det\widetilde{K} = \det K$. Имеем

$$sp\widetilde{K} = k_{11} + \lambda_{12}(p_{21} - q_{21}) + \lambda_{21}(q_{12} - p_{12}) + k_{22} + \lambda_{12}(q_{21} - p_{21}) + \lambda_{21}(p_{12} - q_{12}) = k_{11} + k_{22} = spK\,.$$

$$\det\widetilde{K} = \det K + \lambda_{12}((q_{21} - p_{21})(k_{11} - k_{22}) - k_{21}(q_{11} - q_{22} + p_{22} - p_{11})) +$$
$$+ \lambda_{21}((q_{12} - p_{12})(k_{22} - k_{11}) + k_{21}(q_{11} - q_{22} + p_{22} - p_{11})) +$$
$$\lambda_{12}\lambda_{21}(2(p_{21} - q_{21})(q_{12} - p_{12}) - (q_{11} - q_{22} + p_{22} - p_{11})^2) +$$
$$+ (\lambda_{11} - \lambda_{22})(k_{12}(q_{21} - p_{21}) - k_{21}(p_{12} - q_{12})) + \lambda_{12}(\lambda_{11} - \lambda_{22})((q_{21} - p_{21})(q_{11} - q_{22} + p_{22} - p_{11})) +$$
$$+ \lambda_{21}(\lambda_{11} - \lambda_{22})((p_{12} - q_{12})(q_{11} - q_{22} + p_{22} - p_{11})) + (\lambda_{11} - \lambda_{22})^2(p_{12} - q_{12})(q_{21} - p_{21})\,.$$

Рассмотрим случай: 1). $\lambda_{11} \neq \lambda_{22}$. Тогда получаем следующие условия на матричные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $K(x,y)$:

$(q_{21} - p_{21})(k_{11} - k_{22}) - k_{21}(q_{11} - q_{22} + p_{22} - p_{11}) = 0$,

$(q_{12} - p_{12})(k_{22} - k_{11}) + k_{21}(q_{11} - q_{22} + p_{22} - p_{11}) = 0$,

$2(p_{21} - q_{21})(q_{12} - p_{12}) - (q_{11} - q_{22} + p_{22} - p_{11})^2 = 0$,

$k_{12}(q_{21}-p_{21})-k_{21}(p_{12}-q_{12})=0$, $(q_{21}-p_{21})(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})=0$,
$(p_{12}-q_{12})(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})=0$, $(p_{12}-q_{12})(q_{21}-p_{21})=0$.
Из последнего уравнения получаем $p_{12}-q_{12}=0$ или $q_{21}-p_{21}=0$.
Тогда остальные уравнения приводятся к виду:

$$\begin{cases} k_{11}=k_{22},\ p_{12}=q_{12}, \\ k_{12}=0,\ q_{11}-q_{22}=p_{11}-p_{22} \end{cases} \text{или} \begin{cases} k_{11}=k_{22},\ p_{21}=q_{21}, \\ k_{21}=0,\ q_{11}-q_{22}=p_{11}-p_{22}. \end{cases} \tag{16}$$

Системы уравнений (16) относительно p_{ij} и q_{ij}, $i,j=1,2$ можно записать в виде:

$$\begin{cases} (q_{11}-q_{22})_x-(q_{11}-q_{22})_y=2q_{12}(q_{21}-p_{21}), \\ q_{21x}=q_{21y} \end{cases}$$

или

$$\begin{cases} (p_{11}-p_{22})_x-(p_{11}-p_{22})_y=2p_{21}(p_{12}-q_{12}), \\ p_{21x}=p_{21y}. \end{cases}$$

Таким образом, матричные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ представляются в виде:

$$P(x,y)=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},\ Q(x,y)=\begin{pmatrix} q_{22}+u(x,y) & q_{12}(x+y) \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix},$$

где $u_x-u_y=2q_{12}(x+y)(q_{21}-p_{21})$ или

$$P(x,y)=\begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix},\ Q(x,y)=\begin{pmatrix} q_{22}+v(x,y) & q_{12} \\ q_{21}(x+y) & q_{22} \end{pmatrix},$$

где $v_x-v_y=2q_{21}(x+y)(p_{12}-q_{12})$.

2). $\lambda_{11}=\lambda_{22}$. Тогда получаем следующие условия на матричные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $K(x,y)$:

$$(q_{21}-p_{21})(k_{11}-k_{22})-k_{21}(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})=0, \tag{17}$$

$$(q_{12}-p_{12})(k_{22}-k_{11})+k_{21}(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})=0, \tag{18}$$

$$2(p_{21}-q_{21})(q_{12}-p_{12})-(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})^2=0. \tag{19}$$

Из уравнений (17) и (18) находим

$$k_{12}(q_{21}-p_{21})+k_{21}(p_{12}-q_{12})=0, \tag{20}$$

$$k_{11}-k_{22}=\frac{k_{21}(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})}{q_{21}-p_{21}},\ q_{21}-p_{21}\neq 0. \tag{21}$$

Из соотношений (20) и (21) находим общий вид матричной функции $K(x,y)$:

$$K(x,y)=\begin{pmatrix} k_{22}+k_{12}\dfrac{q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11}}{q_{12}-p_{12}} & k_{12} \\ k_{12}\dfrac{q_{21}-p_{21}}{q_{12}-p_{12}} & k_{22} \end{pmatrix}.$$

Условия на матричные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ можно получить из соотношений (19), (20) и (21):

$$q_{21}-p_{21}=\frac{(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})^2}{2(p_{12}-q_{12})},\ p_{12}\neq q_{12},$$

$$q_{21}-p_{21}=\frac{k_{21}(q_{11}-q_{22}+p_{22-}p_{11})}{k_{12}},\ k_{12}\neq 0,$$

$$q_{21}-p_{21}=\frac{k_{21}(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})}{k_{11}-k_{22}},\ k_{11}\neq k_{22},$$

откуда следует, что

$$(k_{22}-k_{11})(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})+2k_{21}(p_{12}-q_{12})=0, \tag{22}$$

$$k_{12}(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})-(k_{22}-k_{11})(p_{12}-q_{12})=0. \tag{23}$$

Решаем систему линейных уравнений (22) и (23) относительно $q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11}$ и $p_{12}-q_{12}$. Имеем

$$k_{11}^2+k_{22}^2+2(k_{11}k_{22}-k_{12}k_{21})=0, \tag{24}$$

$$k_{12}(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})-(k_{22}-k_{11})(p_{12}-q_{12})=0. \tag{25}$$

Соотношения (24) и (25) налагают на матричную функцию $K(x,y)$ дополнительные условия. Те же соотношения можно записать как дифференциальные уравнения относительно элементов матричной функции $Q(x,y)$, считая матричную функцию $P(x,y)$ неизменной.

3. Рассмотрим жорданову форму матрицы $A(\lambda)$. Заметим, что преобразованием подобия постоянную матрицу $A(\lambda)$ можно привести к жордановой форме: $CA(\lambda)C^{-1}=\Lambda(\lambda)$, где $\Lambda(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, $\Lambda(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$, $\Lambda(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$, где C – постоянная матрица, λ_1 и λ_2 – корни характеристического уравнения матрицы $A(\lambda)$.

При этом криволинейный мультипликативный интеграл вдоль произвольной кривой $x=x(t), y=y(t)$ подвергается преобразованию подобия:

$$\overset{\cup}{\int_\gamma} E+C^{-1}(P(x,y)+A(\lambda))Cdx+C^{-1}Q(x,y)Cdy=C^{-1}\cdot\overset{\cup}{\int_\gamma} E+(P(x,y)+\Lambda(\lambda))dx+Q(x,y)dy\cdot C.$$

Кривизна интеграла (14) также подвергается преобразованию подобия, и это сохраняет собственные значения кривизны.

Таким образом, в этом случае условия на матричные функции $P(x,y)$, $Q(x,y)$, $K(x,y)$ таковы:

1). Если $\Lambda(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, то $p_{12}-q_{12}=0$ или $q_{21}-p_{21}=0$, и, следовательно,

$P(x,y)=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$, $Q(x,y)=\begin{pmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}$, где $q_{12x}-p_{12y}+q_{12}(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})$,

$K(x,y)=\begin{pmatrix}k_{11} & 0\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix}$ или $P(x,y)=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix}$, $Q(x,y)=\begin{pmatrix}q_{11} & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}$, где

$q_{21x}-p_{21y}+q_{21}(q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11})$, $K(x,y)=\begin{pmatrix}k_{11} & k_{12}\\ 0 & k_{22}\end{pmatrix}$.

2). Если $\Lambda(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$, то $sp\widetilde{K}=spK$, $\det\widetilde{K}=\det K$.

3). Если $\Lambda(\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 1\\ 0 & \lambda_1\end{pmatrix}$, то $(k_{11}-k_{22})(q_{21}-p_{21})-k_{21}(q_{11}-q_{22+}p_{22}-p_{11})$. Следовательно,

$$K(x,y)=\begin{pmatrix} k_{22}+\dfrac{q_{11}-q_{22}+p_{22}-p_{11}}{q_{21}-p_{21}}k_{21} & k_{12}\\ k_{21} & k_{22}\end{pmatrix},\ P(x,y)=\begin{pmatrix}p_{11} & p_{12}\\ p_{21} & p_{22}\end{pmatrix},$$

$Q(x,y)=\begin{pmatrix} q_{12}+u(x,y) & q_{12}\\ q_{21} & q_{22}\end{pmatrix}$, где $u(x,y)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению Рикатти:

$$(q_{21}-p_{21})u_x+p_{21}u^2+((p_{21}-q_{21})(p_{22}-p_{11})-q_{21x}+p_{21y})u=$$
$$=(p_{11}-p_{22})_y(q_{21}-p_{21})+(q_{21x}-p_{21y}+q_{21}(p_{11}-p_{22})(p_{11}-p_{22}).$$

4. Сформулируем задачу в матричной форме. Запишем характеристическое уравнение для матрицы $\tilde{K}$: $\tilde{K}^2-sp\tilde{K}\cdot\tilde{K}+\det\tilde{K}=0$. Учитывая, что $\tilde{K}=K+[A,Q]$, получаем

$$K^2+K[A,Q]+[A,Q]K+[A,Q]^2-spK\cdot K-spK\cdot[A,Q]+\det(K+[A,Q])=0. \tag{26}$$

Воспользуемся формулой, справедливой для матриц второго порядка X и Y: $\det(X+Y)=\det X+\det Y+spXspY-sp(XY)=0$. Тогда уравнение (26) запишется в виде:

$$\begin{gathered}K^2+K[A,Q]+[A,Q]K+[A,Q]^2-spK\cdot K-spK\cdot[A,Q]+\\ +\det K+\det[A,Q]+spKsp[A,Q]-sp(K[A,Q])=0.\end{gathered} \tag{27}$$

Учитывая тождества

$$K^2-spK\cdot K+\det K=0,\ [A,Q]^2+\det[A,Q]=0,\quad sp[A,Q]=0,$$

из уравнения (27) получаем

$$K[A,Q]+[A,Q]K+spK\cdot[A,Q]-sp(K[A,Q])=0. \tag{28}$$

Учитывая равенства

$$K[A,Q]=(\lambda_1-\lambda_2)\begin{pmatrix}-k_{12}q_{21} & k_{11}q_{12}\\ -k_{22}q_{21} & k_{21}q_{12}\end{pmatrix},\ [A,Q]K=(\lambda_1-\lambda_2)\begin{pmatrix}k_{21}q_{12} & k_{22}q_{12}\\ -k_{11}q_{21} & -k_{12}q_{21}\end{pmatrix},$$

$$(spK)[A,Q]=(\lambda_1-\lambda_2)(k_{11}+k_{22})\begin{pmatrix}0 & q_{12}\\ -q_{21} & 0\end{pmatrix},$$

$$(sp(K[A,Q])=(\lambda_1-\lambda_2)(q_{12}k_{21}-q_{21}k_{12})\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix},$$

уравнение (28) запишем в виде системы уравнений:

$$\begin{cases} q_{12}k_{21}-q_{21}k_{12}=0,\\ (k_{11}+k_{22})q_{12}=0,\\ (k_{11}+k_{22})q_{21}=0.\end{cases} \tag{29}$$

Решив систему (29) нетрудно получить условия на матричные функции $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и $K(x,y)$.

5. Задача о гомотопическом преобразовании подынтегральных матричных функций.

Возникает естественная задача, связанная приведением кривизны интеграла (14) к скалярному виду. Впервые задача была сформулирована О.В. Мантуровым. С помощью гомотопического преобразования свести постоянную матрицу к скалярной.

Пусть $K=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ – постоянная матрица, $\det C=1$. Гомотопическое преобразование зададим следующим образом:

$$K_t=CKC^{-1}+tC\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}C^{-1},\ t\in R.$$

Потребуем выполнения условия

$$\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}\lambda_1-t & 0\\ 0 & \lambda_2+t\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}d & -b\\ -c & a\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \qquad (30)$$

и найдем значение параметра t.

Из условия (30) получаем:

$$\begin{pmatrix}ad\lambda_1-bc\lambda_2 & ab(\lambda_2-\lambda_1)\\ cd(\lambda_1-\lambda_2) & ad\lambda_2-bc\lambda_1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1 & 2ab\\ 2cd & 1\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}. \qquad (31)$$

Условие (31) равносильно системе уравнений:

$$ad\lambda_1-bc\lambda_2+t=\lambda, \qquad (32)$$

$$ad\lambda_2-bc\lambda_1+t=\lambda, \qquad (33)$$

$$ab(\lambda_2-\lambda_1)+2abt=0, \qquad (34)$$

$$cd(\lambda_1-\lambda_2)-2cdt=0. \qquad (35)$$

Из уравнений (34) и (35) следует, что $t=\dfrac{\lambda_1-\lambda_2}{2}$. Из уравнений (32) и (33) следует, что $\lambda_1=\lambda_2$, $\lambda=\dfrac{\lambda_1+\lambda_2}{2}$.

Таким образом, с помощью гомотопического преобразования диагональная матрица приводится к скалярной.

Пример. Пусть $K=\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$.

$$K_t=\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}5 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}4 & 3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & -3\\ -1 & 4\end{pmatrix}=$$

$=\begin{pmatrix}11 & -24\\ 2 & -3\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}7 & -24\\ 2 & -7\end{pmatrix}$. При $t=-1$ матрица K приводится к скалярному виду: $\begin{pmatrix}4 & 0\\ 0 & 4\end{pmatrix}$.

Интересно рассмотреть сформулированную задачу для матричных функций произвольного порядка.

6. Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл вдоль кривой γ в области $D\subset R^2$ с параметризацией $x=x(t), y=y(t)$:

$$\overset{\cup}{\int_{\gamma}} E+(P(x,y)+M(x,y))dx+Q(x,y)dy, \qquad (36)$$

где $P(x,y)=(p_{ij})$ и $Q(x,y)=(q_{ij})$ – непрерывно дифференцируемые матричные функции второго порядка, $M(x,y)=(m_{ij})$ – непрерывно дифференцируемая матричная функция второго порядка, $i, j=1,2$.

Найдем условия на матричную функцию $M(x,y)$, при выполнении которых собственные значения кривизны интеграла (36) $\tilde{K}=(\tilde{k}_{ij})$ совпадают с собственными значениями кривизны интеграла (1). Имеем $\tilde{K}=Q_x-(P+M)_y+[P+M,Q]$ или

$$\tilde{K}=Q_x-P_y+[P,Q]-M_y+[M,Q]=K-M_y+[M,Q].$$

Тогда $sp\tilde{K}=spK-spM_y+sp[M,Q]=spK-spM_y$. Условие $spM_y=0$ или

$$m_{11}+m_{22}=c(x), \tag{37}$$

где $c(x)$ – произвольная гладкая функция, обеспечивает равенство следов кривизны $\tilde{K}$ и K.

Имеем $\det\tilde{K}=\det(K-M_y+[M,Q])$. Воспользуемся формулой, справедливой для матриц второго порядка:

$$\det(A_1+A_2+A_3)=\det A_1+\det A_2+\det A_3+spA_1spA_1+spA_1spA_1+spA_2spA_3-$$
$$-spA_1A_2-spA_1A_3-spA_2A_3.$$

Тогда из условия $\det\tilde{K}=\det K$ получаем

$$\det(-M_y)+\det[M,Q]-spK[m,Q]-sp(-M_y[M,Q])=0. \tag{38}$$

Условия (37) и (38) обеспечивают равенство собственных значений кривизны интеграла (36) и (1).

Осталось вычислить матричную функцию $M(x,y)$.

Имеем следующие равенства:

$$\det(-M_y)=m_{11y}m_{22y}-m_{12y}m_{21y};$$

$$\det[M,Q]=\det\begin{pmatrix} \begin{vmatrix} m_{12} & m_{21}\\ q_{12} & q_{21}\end{vmatrix} & \begin{vmatrix} m_{11} & m_{12}\\ q_{11} & q_{12}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} m_{12} & m_{22}\\ q_{12} & q_{22}\end{vmatrix}\\ \begin{vmatrix} m_{21} & m_{11}\\ q_{21} & q_{11}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m_{22} & m_{21}\\ q_{22} & q_{21}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} m_{12} & m_{21}\\ q_{12} & q_{21}\end{vmatrix}\end{pmatrix},$$

$$M_{11}=\begin{vmatrix} m_{12} & m_{21}\\ q_{12} & q_{21}\end{vmatrix},\ M_{12}=\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12}\\ q_{11} & q_{12}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix} m_{12} & m_{22}\\ q_{12} & q_{22}\end{vmatrix},\ M_{21}=\begin{vmatrix} m_{21} & m_{11}\\ q_{21} & q_{11}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix} m_{22} & m_{21}\\ q_{22} & q_{21}\end{vmatrix};$$

$$sp(K[M,Q])=(k_{11}-k_{22})M_{11}+k_{21}M_{12}+k_{12}M_{21};$$

$$sp(-M_y[M,Q])=(-m_{11y}+m_{22y})M_{11}-m_{21y}M_{12}-m_{12y}M_{21}.$$

Тогда условие (38) запишется в виде:

$$m_{11y}m_{22y}-m_{12y}m_{21y}+(m_{12}q_{21}-m_{21}q_{12})^2-$$
$$-(m_{11}q_{12}-m_{12}q_{11}-m_{12}q_{22}+m_{22}q_{12})(m_{21}q_{11}-m_{11}q_{21}-m_{12}q_{21}+m_{21}q_{12})+$$
$$+(k_{11}-m_{11y}+m_{22y})(m_{12}q_{21}-m_{21}q_{12})+(k_{21}-m_{21})(m_{21}q_{11}-m_{11}q_{21}-m_{22}q_{21}+m_{21}q_{22})+$$
$$+(k_{22}-m_{22y})(m_{21}q_{11}-m_{21}q_{11}-m_{12}q_{22}-m_{22}q_{12})=0. \tag{39}$$

Не ограничивая общности, можно положить $m_{12}=0$, $m_{22}=0$, $m_{11}=c(x)$, $m_{21}=z(x,y)$. Тогда условие (39) запишется в виде дифференциального уравнения относительно функции $z(x,y)$:

$$((q_{11}+q_{22})z+c(x)q_{21})z_y=q_{12}^2z^2+a(x,y)z+b(x,y), \tag{40}$$

где $a(x,y)=(k_{21}+c(x))(q_{11}+q_{22})-q_{12}(k_{11}-c(x))+k_{22}q_{11}$,

$$b(x,y)=c(x)(q_{12}q_{21}c(x)+k_{21}q_{21}+k_{22}q_{21}).$$

Таким образом, матричная функция $M(x,y)$ имеет вид: $M(x,y)=\begin{pmatrix} c(x) & 0 \\ z(x,y) & 0 \end{pmatrix}$, где $z(x,y)$ – некоторое решение уравнения (40).

Литература

1. *Мантуров О.В.* Мультипликативный интеграл // Проблемы геометрии. – 1990. - Т. 22. - С. 167-215.
2. *Кумшаев Е.Н., Паланджянц Л.Ж.* О мультипликативной вариации подынтегральной матричной формы криволинейного мультипликативного интеграла //Труды Физического Общества Республики Адыгея. – 2009. - № 14. - С. 42-48.
3. *Кумшаев Е.Н., Паланджянц Л.Ж.* О вариации подынтегральной матричной формы криволинейного мультипликативного интеграла //Вестник АГУ, серия «Естественно-математические и технические науки» - 2010. - № 1. - С. 67-74.
4. *Степанов В.В.* Курс дифференциальных уравнений. – М.: Физматлит, 1950. – 468 с.

Some properties of variation of matrix integrand a curved multiplicative integral

V.A. Kozlov, E.N. Kumshaev, L.Zh. Palandzhyants

The some properties of the variation of the integrand of the matrix form of a curvature product integral are considered.

