ОБ ОДНОЙ ЗАДАЧЕ О.А. ОЛЕЙНИКА

А.Х. Сташ

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В настоящей статье изучаются асимптотические свойства решений линейного дифференциального уравнения первого порядка с переменными коэффициентами.

В [1] О.А. Олейник поставлена задача об исследовании поведения решений $y(x)$ линейного неоднородного уравнения

$$p(x)\frac{dy}{dx}+q(x)y=r(x) \tag{1}$$

на концах интервала (a,b) определения при определенных условиях на коэффициенты $p(x),\ q(x)$ и $r(x)$. В настоящей заметке дается решение этой задачи.

Имеет место

Теорема (О.А. Олейник). *Пусть на отрезке* $[a,b]$ *даны непрерывные функции* $p(x),\ q(x)$ *и* $r(x)$*, причем*

$$p(a)=p(b)=0, \tag{2}$$

$$p(x)>0 \quad (a<x<b), \tag{3}$$

$$q(x)>0 \quad (a\le x\le b), \tag{4}$$

$$\int_a^{a+\varepsilon}\frac{dx}{p(x)}=\int_{b-\varepsilon}^{b}\frac{dx}{p(x)}=+\infty \quad (0<\varepsilon<b-a). \tag{5}$$

Тогда все решения уравнения (1), существующие на интервале $a<x<b$*, стремятся к* $\frac{r(b)}{q(b)}$ *при* $x\to b$*. Среди этих решений одно стремится к* $\frac{r(a)}{q(a)}$ *при* $x\to a$*; прочие же при* $x\to a$ *стремятся к* $+\infty$ *или к* $-\infty$*.*

Доказательство. Известно, что любое решение линейного дифференциального уравнения (1), удовлетворяющее условию $y(x_0)=y_0$, имеет вид

$$y(x)=\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{q(t)}{p(t)}dt\right)\left[y_0+\int_{x_0}^{x}\frac{r(t)}{p(t)}\left(\exp\int_{x_0}^{t}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi\right)dt\right] \quad (a<x_0\le x<b). \tag{6}$$

1. Покажем сначала, что несобственный интеграл $\int_{x_0}^{b}\frac{q(t)}{p(t)}dt$ расходится. Функция $\frac{1}{p(x)}$ положительна на интервале $(a,\ b)$, в силу условия (3). Из непрерывности функций $q(x)$ и $\frac{1}{p(x)}$ на любом отрезке $[x_0,\ b-\varepsilon]$ ($0<\varepsilon<b-x_0$) следует их интегрируемость по Риману на этом отрезке. Тогда в силу первой теоремы о среднем [2] найдется точка $\xi\in(x_0,\ b-\varepsilon)$ такая, что

$$\int_{x_0}^{b-\varepsilon}\frac{q(t)}{p(t)}dt = q(\xi)\int_{x_0}^{b-\varepsilon}\frac{dt}{p(t)}. \tag{7}$$

Переходя к пределу в последнем равенстве при $\varepsilon \to 0$ и учитывая условие (5), получим, что

$$\int_{x_0}^{b}\frac{q(t)}{p(t)}dt = +\infty. \tag{8}$$

2. Теперь покажем расходимость интеграла $\int_{x_0}^{b}\frac{r(t)}{p(t)}\left(\exp\int_{x_0}^{t}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi\right)dt$. Рассмотрим функцию $f(x) = \exp\int_{x_0}^{x}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi$. Из условия (3) и (4) имеем

$$f'(x) = \frac{q(x)}{p(x)}\exp\int_{x_0}^{x}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi > 0 \ \ (a < x < b).$$

Поэтому функция $f(x)$ монотонно возрастает на интервале $(a,\, b)$. Функции $f(x)$ и $\frac{1}{p(x)}$ на отрезке $[x_0,\, b-\varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < b - x_0$) удовлетворяют всем условиям второй теоремы о среднем [2], поэтому найдется точка $\xi \in (x_0,\, b-\varepsilon)$ такая, что

$$\int_{x_0}^{b-\varepsilon}\frac{f(t)}{p(t)}dt = f(x_0)\int_{x_0}^{\xi}\frac{dt}{p(t)} + f(b-\varepsilon)\int_{\xi}^{b-\varepsilon}\frac{dt}{p(t)}. \tag{9}$$

В силу условия (8) имеем

$$f(b-\varepsilon) \to +\infty \ \text{при}\ \varepsilon \to 0. \tag{10}$$

Из равенства (9) с учетом (5) и (10) будем иметь

$$\int_{x_0}^{b}\frac{f(t)}{p(t)}dt = +\infty. \tag{11}$$

Положим $g(x) = \frac{f(x)}{p(x)}$. Рассмотрим несобственный интеграл $\int_{x_0}^{b} r(t)g(t)dt$. Функция $g(t)$ непрерывна на интервале $(a,\, b)$ как композиция непрерывных функций. На любом отрезке $[x_0,\, b-\varepsilon]$ ($0 < \varepsilon < b - x_0$) функции $g(x)$ и $r(x)$ удовлетворяют всем условиям первой теоремы о среднем для интеграла. Далее, проводя аналогичные рассуждения как и в пункте 1, получим расходимость интеграла $\int_{x_0}^{b} r(t)g(t)dt$.

3. Из рассуждений пунктов 1 и 2 следуют следующие равенства

$$\lim_{x\to b}\exp\int_{x_0}^{x}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi = +\infty, \tag{12}$$

$$\lim_{x\to b}\int_{x_0}^{x}\frac{r(t)}{p(t)}\left(\exp\int_{x_0}^{t}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi\right) = +\infty. \tag{13}$$

Записывая равенство (6) в виде

$$y(x) = y_0 \exp\left(-\int_{x_0}^{x} \frac{q(t)}{p(t)}dt\right) + \frac{\int_{x_0}^{x} \frac{r(t)}{p(t)}\left(\exp\int_{x_0}^{t}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi\right)dt}{\exp\int_{x_0}^{x}\frac{q(t)}{p(t)}dt}, \qquad (14)$$

и переходя в последнем равенстве к пределу при $x \to b$, получим

$$\lim_{x\to b} y(x) = y_0 \lim_{x\to b}\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\frac{q(t)}{p(t)}dt\right) + \lim_{x\to b}\frac{\int_{x_0}^{x} \frac{r(t)}{p(t)}\left(\exp\int_{x_0}^{t}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi\right)dt}{\exp\int_{x_0}^{x}\frac{q(t)}{p(t)}dt} = \lim_{x\to b}\frac{\int_{x_0}^{x} \frac{r(t)}{p(t)}\left(\exp\int_{x_0}^{t}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi\right)dt}{\exp\int_{x_0}^{x}\frac{q(t)}{p(t)}dt}$$

.

Воспользовавшись правилом Лопиталя и учитывая равенства (12), (13), последнее равенство можно продолжить так

$$\lim_{x\to b}\frac{\int_{x_0}^{x} \frac{r(t)}{p(t)}\left(\exp\int_{x_0}^{t}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi\right)dt}{\exp\int_{x_0}^{x}\frac{q(t)}{p(t)}dt} = \lim_{x\to b}\frac{\frac{r(x)}{p(x)}\exp\int_{x_0}^{x}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi}{\frac{q(x)}{p(x)}\exp\int_{x_0}^{x}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi} = \lim_{x\to b}\frac{r(x)}{q(x)} = \frac{r(b)}{q(b)}.$$

Итак, при любом y_0 первое слагаемое в равенстве (14) стремится к нулю, а второе – к $\frac{r(b)}{q(b)}$.

Таким образом, все решения уравнения (1), определенные на интервале $a < x < b$, стремятся к $\frac{r(b)}{q(b)}$ при $x \to b$.

4. После замены пределов интегрирования равенство (6) принимает вид

$$y(x) = \exp\int_{x}^{x_0}\frac{q(t)}{p(t)}dt \cdot \left[y_0 - \int_{x}^{x_0}\frac{r(t)}{p(t)}\left(\exp(-\int_{t}^{x_0}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi)\right)dt\right]. \qquad (15)$$

Умножим обе части равенства (15) на $\exp\left(-\int_{x}^{x_0}\frac{q(t)}{p(t)}dt\right)$. Имеем

$$y(x)\exp\left(-\int_{x}^{x_0}\frac{q(t)}{p(t)}dt\right) = y_0 - \int_{x}^{x_0}\frac{r(t)}{p(t)}\left(\exp(-\int_{t}^{x_0}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi)\right)dt. \qquad (16)$$

Для ограниченного решения (если оно существует)

$$y(x)\exp\left(-\int_{x}^{x_0}\frac{q(t)}{p(t)}dt\right) \to 0 \text{ при } x \to a, \qquad (17)$$

то есть

$$y_0 = \int_{x}^{x_0}\frac{r(t)}{p(t)}\left(\exp(-\int_{t}^{x_0}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi)\right)dt. \qquad (18)$$

Тогда ограниченное решение при $x \to a$ имеет вид:

$$y(x) = \int_{a}^{x}\frac{r(t)}{p(t)}\left(\exp\int_{x}^{t}\frac{q(\xi)}{p(\xi)}d\xi\right)dt. \qquad (19)$$

а) Докажем, что это решение искомое, то есть $y(x) \to \dfrac{r(a)}{q(a)}$ при $x \to a$.

Сначала покажем, что решение определено корректно, т.е. покажем сходимость интеграла стоящей в правой части равенства (19) при любом фиксированном значении независимой переменой $x \in (a,b)$.

Пусть $x = x'$ - произвольное значение из интервала (a,b). Нетрудно заметить, что функция $f(x) = \exp\left(-\int_x^{x'} \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi\right)$ монотонно возрастает на интервале (a,b). Применяя вторую теорему о среднем на отрезке $[a+\varepsilon,\ x']$ ($0 < \varepsilon < x' - a$), будем иметь

$$\int_{a+\varepsilon}^{x'} \frac{1}{p(t)} \left(\exp(-\int_t^{x'} \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi) \right) dt = f(a+\varepsilon) \cdot \int_{a+\varepsilon}^{\eta} \frac{d\xi}{p(\xi)} + f(x') \int_{\eta}^{x'} \frac{d\xi}{p(\xi)} \quad (a+\varepsilon < \eta < x'). \tag{20}$$

Определенный интеграл $\int_{\eta}^{x'} \frac{d\xi}{p(\xi)}$ существует в силу непрерывности функции $\dfrac{1}{p(x)}$ на отрезке $[\eta, x']$. Найдем предел первого слагаемого при $\varepsilon \to 0$. Применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \exp(-\int_{a+\varepsilon}^{x'} \frac{q(t)}{p(t)} dt) \int_{a+\varepsilon}^{\eta} \frac{dt}{p(t)} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\int_{a+\varepsilon}^{\eta} \frac{dt}{p(t)}}{\exp \int_{a+\varepsilon}^{x'} \frac{q(t)}{p(t)} dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\frac{1}{p(a+\varepsilon)}}{\frac{q(a+\varepsilon)}{p(a+\varepsilon)} \cdot \exp \int_{a+\varepsilon}^{x'} \frac{q(t)}{p(t)} dt} = 0.$$

Далее, рассуждая аналогично как и в пункте 2, получим сходимость интеграла

$$\int_a^{x'} \frac{r(t)}{p(t)} \left(\exp(-\int_t^{x'} \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi) \right) dt \quad \forall x' \in (a,b). \tag{21}$$

Найдем предел решения (19) при $x \to a$. Для этого запишем решение в удобной форме и применим снова правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to a} y(x) = \frac{\int_a^x \frac{r(t)}{p(t)} \left(\exp(-\int_t^{\eta} \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi) \right) dt}{\exp(-\int_x^{\eta} \frac{q(t)}{p(t)} dt)} = \lim_{x \to a} \frac{\frac{r(x)}{p(x)} \left(\exp(-\int_x^{\eta} \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi) \right)}{\frac{q(x)}{p(x)} \left(\exp(-\int_x^{\eta} \frac{q(\xi)}{p(\xi)} d\xi) \right)} = \lim_{x \to a} \frac{r(x)}{q(x)} = \frac{r(a)}{q(a)}$$

.

б) Теперь докажем единственность ограниченного при $x \to a$ решения уравнения (1). Пусть, кроме найденного, имеется еще ограниченное при $x \to a$ решение $\bar{y}(x)$. Тогда их разность $y(x) - \bar{y}(x) \equiv z(x)$ будет также ограниченной при $x \to a$ функцией. Из того, что $y(x)$ и $\bar{y}(x)$ являются решениями, имеем

$$p(x) \frac{dy(x)}{dx} + q(x) y(x) = r(x),$$

$$p(x) \frac{d\bar{y}(x)}{dx} + q(x) \bar{y}(x) = r(x).$$

Вычитая из первого уравнения второе, будем иметь

$$p(x) \frac{d(y(x) - \bar{y}(x))}{dx} + q(x)(y(x) - \bar{y}(x)) = 0$$

или

$$p(x)\frac{dz}{dx}+q(x)z=0. \tag{22}$$

Из (22) получаем:

$$z=z_0\exp\left(\int_x^{x_0}\frac{q(t)}{p(t)}dt\right). \tag{23}$$

Равенство (23) возможно только при $z_0=0$, т.к. функция $z(x)$ - ограниченна при $x\to a$. Следовательно, $z(x)\equiv 0$, т.е. $y(x)\equiv\bar{y}(x)$.

Таким образом, в случае $y_0=0$ к $\frac{r(a)}{q(a)}$ стремится только решение (19).

5. Пусть для определенности интеграл (21) сходится к некоторому числу $M(x')$.

Если $y_0-M(x')<0$, то $y(x)\to-\infty$ при $x\to a$.

Если $y_0-M(x')>0$, то $y(x)\to+\infty$ при $x\to a$.

Теорема полностью доказана.

Автор благодарит М.М. Шумафова за обсуждение результатов статьи.

Литература

1. *Петровский И.Г.*. Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Изд-во МГУ, 1984. - 296 с.
2. *Зорич В.А*. Математический анализ. Том 1. - М.: МЦНМО, 2002. - 657 с.

About one O.A. Olejnik problem connected with behaviour of solutions of the linear inhomogeneous equation

A.H. Stash

In the present article the asymptotic properties of solutions of the first order linear differential equation with variable factors are studied.

