О НЕКОТОРЫХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

К.С. Мамий

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Работа посвящена получению достаточных условий продолжимости, ограниченности, неограниченности и колеблемости решений одного нелинейного дифференциального уравнения с сингулярностью и с демпфирующим членом.

Рассмотрим следующее дифференциальное уравнение второго порядка

$$u''g(u') + a(t,u,u') + b(t)f(u) = 0, \tag{1}$$

где $f, g \in C(\mathbb{R})$, $b \in C(\mathbb{R}_+)$, $a \in C(\mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2)$, $\mathbb{R}_+ = [0, +\infty[$, $\mathbb{R} =]-\infty, +\infty[$. Кроме этого, если не оговорено противное, будем считать, что $b(t)$ имеет ограниченную вариацию на каждом конечном отрезке промежутка $\mathbb{R}_+$, а значит, представима в виде

$$b(t) = b_1(t) - b_2(t), \tag{2}$$

где b_1 и b_2 неубывающие функции на $\mathbb{R}_+$.

Далее, очевидно, что для любых начальных данных

$$u(t_0) = u_0,\ u'(t_0) = u_0',\ t_0 \ge 0 \tag{3}$$

задача (1)-(3) имеет решение, определенное на некотором промежутке $[t_0, T[$, $T \le +\infty$, если $g(u_0') \ne 0.$

В настоящей работе устанавливаются некоторые достаточные условия продолжаемости, ограниченности, неограниченности и колеблемости решений уравнения (1). Аналогичные вопросы для частных видов уравнения (1) исследовались в работах [1-8]. В частности, в работах [2], [4] и [5] рассматривался случай, когда $a(t,x,y) \equiv 0$ в предположении, что функция $g(v)$ всюду положительна. Здесь положительность $g(v)$, вообще говоря, не предполагается.

Всюду дальше используются следующие хорошо известные определения.

Решение задачи (1)-(3) назовем продолжаемым, если оно вместе со своей производной определено на бесконечном промежутке $[t_0, +\infty[$. При этом продолжаемое решение $u(t)$ назовем правильным, если $\sup\{|u(t)|: t \ge s\} > 0$ для всех $s \ge t_0$.

Правильное решение $u(t)$ уравнения (1) назовем колеблющимся, если оно имеет последовательность нулей, стремящуюся к $+\infty$. Если же для правильного решения $u(t)$ уравнения (1) найдется такое число $\bar{t}$, что для всех $t \ge \bar{t}$

$$|u(t)| > 0, \tag{4}$$

то решение $u(t)$ назовем неколеблющимся.

Введем следующие обозначения:

$$\Im_1(y) = \int_0^y sg(s)ds,\ F_1(x) = \int_0^x f(s)ds;$$

$$\Im_0 = \inf\{\Im_1(y): y \in \mathbb{R}\},\ F_0 = \inf\{F_1(x): x \in \mathbb{R}\};$$

$$\Im(y) = \Im_1(y) - \Im_0,\ F(x) = F_1(x) - F_0, \text{ если}$$

$$\Im_0 > -\infty, \ F_0 > -\infty. \tag{5}$$

Полученные ниже результаты либо обобщают, либо дополняют отдельные результаты работ [1-3] и некоторых других.

§ 1. Продолжаемость решений

В этом параграфе мы докажем ряд предложений дающих достаточные условия продолжаемости решений уравнения (1). Эти условия выводятся из соответствующих оценок, уставналиваемых в теоремах 1-3 ниже.

Теорема 1. *Пусть выполнены условия* (5) *и при всех* $t \ge 0$

$$b(t) > 0. \tag{6}$$

Пусть, далее, существует функция $0 \le p(t) \in C(\mathbb{R}_+)$ *такая, что для всех* $(t, x, y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$

$$a(t, x, y) y \ge -p(t)\Im(y). \tag{7}$$

Тогда для любого решения $u(t)$ *уравнения* (1), *определенного на некотором промежутке* $[0, T[$, *справедлива оценка*

$$\varphi(t) \le \varphi(0) \exp \int_0^t \left[p(\tau) d\tau + \frac{db_2(\tau)}{b(\tau)} \right], \tag{8}$$

где

$$\varphi(t) = \frac{\Im(u'(t))}{b(t)} + F(u(t)). \tag{9}$$

Доказательство. Пусть $u(t)$ - произвольное решение уравнения (1), определенное на $[0, T[$. Тогда, как в [1] и [3], нетрудно показать, что $\forall t \in [0, T[$ и $\forall \varepsilon > 0$

$$\varphi(t) + \varepsilon = [\varphi(0) + \varepsilon] \exp \left[-\int_0^t \frac{a(\tau, u(\tau), u'(\tau)) \cdot u'(\tau)}{b(\tau)[\varphi(\tau) + \varepsilon]} d\tau - \int_0^t \frac{\Im(u'(\tau))}{b(\tau)[\varphi(\tau) + \varepsilon]} \cdot \frac{db(\tau)}{b(\tau)} \right], \tag{10}$$

откуда следует (8) в силу условий теоремы и произвольности ε.

Замечание. Если в теореме 1 условие (7) заменить следующим: существуют функции $0 \le p_k(t) \in C(\mathbb{R}_+) (k = 1, 2)$ такие, что для всех $(t, x, y) \in R_+ \times R^2$

$$-p_2(t)\Im(y) \le a(t, x, y) \cdot y \le p_1(t)\Im(y), \tag{11}$$

то для любого решения $u(t)$ $(0 \le t < T)$ уравнения (1) вместо (8) будет справедлива двусторонняя оценка:

$$\varphi(0) \exp \left[-\int_0^t \left(p_1(\tau) d\tau + \frac{db_1(\tau)}{b(\tau)} \right) \right] \le \varphi(t) \le \varphi(0) \exp \int_0^t \left[p_2(\tau) d\tau + \frac{db_2(\tau)}{b(\tau)} \right]. \tag{12}$$

Следствие 1. Пусть выполнены все условия теоремы 1, и

$$g(\upsilon) > 0 \ \ \forall \upsilon \in \mathbb{R} \tag{13'}$$

$$\lim_{|y| \to +\infty} \Im(y) = +\infty. \tag{13}$$

Тогда все решения уравнения (1) продолжаемы.

Доказательство. Допустим противное. Тогда найдется такое решение $u(t)$ уравнения (1), определенное на некотором конечном промежутке $[0, T[$, что

$$\overline{\lim_{t \to T_{-0}}} (|u(t)| + |u'(t)| + |u''(t)|) = +\infty. \tag{14}$$

Но из (8) следует, что для всех $t \in [0, T[$

$$\Im(u'(t)) \le \varphi(0) b(t) \exp \int_0^t \left[p(\tau) d\tau + \frac{db_2(\tau)}{b(\tau)} \right],$$

откуда имеем, что $\Im(u'(t)) \le M(T) = const < +\infty \quad \forall t \in [0,T[.$ Следовательно, в силу (13), $u'(t),$ а потому и $u(t)$, ограничены на $[0,T[,$ что противоречит нашему предположению (14).

Следствие 2. Пусть выполнены условия:

$$signf(x) = signx, \tag{16}$$

$$a(t,x,y) \cdot y \ge 0 \quad \forall (t,x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2. \tag{17}$$

Тогда, если выполнены условия (6) и (13), то все решения уравнения (1) продолжаемы.

Доказательство. Из (15), (16) и (17) следует, соответственно, что $\Im_0 = F_0 = 0$ и $p(t) \equiv 0,$ поэтому будут выполнены все условия следствия 1.

Теорема 2. *Пусть*

$$b(t) = \frac{\alpha(t)}{\beta(t)}, \tag{18}$$

где $\alpha, \beta : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ *- неубывающие и непрерывные функции. Пусть, далее, выполнены условия* (5) *и* (7).

Тогда для любого решения $u(t) \ \ (0 \le t < T)$ *уравнения* (1) *справедлива оценка*

$$\Phi(t) \le \Phi(0) \exp \int_0^t p(\tau) d\tau, \tag{19}$$

где

$$\Phi(t) = \frac{\Im(u'(t))}{\alpha(t)} + \frac{F(u(t))}{\beta(t)}. \tag{20}$$

Доказательство. Очевидно, что для любого решения $u(t) \ \ (0 \le t < T)$ уравнения (1) справедливо тождество

$$\int_0^t \frac{d\Im(u'(\tau))}{\alpha(\tau)} + \int_0^t \frac{dF(u(\tau))}{\beta(\tau)} + \int_0^t \frac{a(\tau,u(\tau),u'(\tau))u'(\tau)}{\alpha(\tau)} d\tau = 0. \tag{*}$$

Отсюда, с учетом (7) и (20), получаем

$$\Phi(t) \le \Phi(0) + \int_0^t \Im(u'(\tau)) d[\alpha(\tau)]^{-1} + \int_0^t F(u(\tau)) d[\beta(\tau)]^{-1} + \int_0^t p(\tau) \frac{\Im(u'(\tau))}{\alpha(\tau)} d\tau.$$

Учитывая теперь, что при $t \ge 0$ функции α и β неубывающие, а $F(u(t))$ и $\Im(u'(t))$ неотрицательны, из последнего неравенства имеем

$$\Phi(t) \le \Phi(0) + \int_0^t p(\tau) \Phi(\tau) d\tau, \ \ t \in [0,T[,$$

из которого в силу леммы Гронуолла-Беллмана получаем (19).

Следствие 1. Если выполнены все условия теоремы 2, и выполняются условия (13'), (13), то все решения уравнения (1) продолжаемы.

Следствие 2. Если выполнены условия (16), (17), (18), (13') и (13), то все решения уравнения (1) продолжаемы.

Теорема 3. *Пусть функция* $b(t)$ *абсолютно непрерывна на* $\mathbb{R}_+$ *и пусть выполняются условия* (5) *и* (6). *Пусть, далее, существуют функции* $p_i(t) \in C(\mathbb{R}_+) (i = 1,2)$ *такие, что для всех* $(t,x,y) \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^2$ *справедлива двусторонняя оценка*

$$p_1(t) \Im(y) \le a(t,x,y) y \le p_2(t) \Im(y). \tag{11'}$$

Тогда для любого решения $u(t) \ \ (0 \le t < T)$ *уравнения* (1) *справедлива оценка*

$$\varphi(0)\exp\left[-\int_0^t\left(p_2(\tau)+\frac{b'(\tau)}{b(\tau)}\right)^+d\tau\right]\le\varphi(t)\le\varphi(0)\exp\int_0^t\left(p_1(\tau)+\frac{b'(\tau)}{b(\tau)}\right)^-d\tau,\ (0\le t<T)\quad(12')$$

где $\alpha^+(t)=\max\{0,\alpha(t)\},\ \alpha^-(t)=\max\{0,-\alpha(t)\}.$

Доказательство легко следует из равенства (10) и условий теоремы в силу произвольности ε.

Заметим, что из теоремы 3 так же, как и из теорем 1 и 2, можно получить условия продолжаемости решений уравнения (1).

§ 2. Условия ограниченности решений

Здесь мы выводим достаточные условия ограниченности продолжаемых решений уравнения (1).

Теорема 4. *Пусть выполнены условия теоремы* 1 *и*

$$\overline{\lim_{x\to+\infty}}F(x)=\overline{F}>0,\ \overline{\lim_{x\to-\infty}}F(x)=\underline{F}>0;\qquad(21)$$

$$\int_0^{+\infty}p(t)dt=p<+\infty,\qquad(22)$$

$$\int_0^{+\infty}\frac{db_2(t)}{b(t)}=\gamma<+\infty.\qquad(23)$$

Тогда любое продолжаемое решение $u(t)$ *уравнения* (1), *начальные данные которого удовлетворяют условию*

$$\varphi(0)\exp(p+\gamma)<\min\{\overline{F},\underline{F}\},\qquad(24)$$

ограничено при $t\to+\infty$, *а для производной* $u'(t)$ *справедлива оценк*а: $\Im(u'(t))=O(b(t)).$

Доказательство. Из (8), (9), (5), (22), (23) и (24) легко следует, что для любого продолжаемого решения $u(t)$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}F(u(t))\le\varphi(0)\exp(p+\gamma)<\min\{\overline{F},\underline{F}\}.\qquad(25)$$

Из (21) вытекает, что существуют такие две последовательности $(\overline{u}_k)$ и $(\underline{u}_k)$, что

$$\lim_{k\to+\infty}\overline{u}_k=+\infty,\ \lim_{k\to+\infty}\underline{u}_k=-\infty,\qquad(26)$$

$$\lim_{k\to+\infty}F(\overline{u}_k)=\overline{F},\ \lim_{k\to+\infty}F(\underline{u}_k)=\underline{F}.\qquad(27)$$

Допустим теперь, что уравнение (1) имеет продолжаемое и неограниченное решение $u(t)$, начальные данные которого удовлетворяют условию (24). Тогда ясно, что справедливо хотя бы одно из соотношений:

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}u(t)=+\infty \text{ либо } \underline{\lim_{t\to+\infty}}u(t)=-\infty.$$

Предположим, что имеет место первое соотношение. Тогда в силу (26) найдется такой номер k_0, что $\overline{u}_{k_0}>\inf\{u(t):t\ge0\}$. Теперь, очевидно, что существует такая возрастающая к $+\infty$ последовательность (t_n), что $\overline{u}_{k_0+n}=u(t_n)$ $(n=0,1,2,...)$ Поэтому, благодаря (27), имеем

$$\lim_{t\to+\infty}F(u(t_n))=\overline{F},$$

но тогда из (24) получаем, что $\overline{F}<\overline{F}$, чего не может быть. Аналогично рассматривается и случай $\underline{\lim_{t\to+\infty}}u(t)=-\infty.$

Оценка для производной, в силу (22), (23) и ограниченности $u(t)$, легко следует из (8).

Замечание 1. Проанализировав доказательство теоремы 4, легко указать достаточные условия односторонней ограниченности продолжаемых решений уравнения (1).

Замечание 2. Если кроме условий теоремы 4 выполняются еще условия:

$$b(t) \le b_0 \quad \forall t \ge 0,$$

$$\overline{\lim_{y \to +\infty}} \Im(y) = \overline{\Im} > 0, \quad \overline{\lim_{y \to -\infty}} \Im(y) = \underline{\Im} > 0, \tag{28}$$

то любое продолжаемое решение $u(t)$ уравнения (1), начальные данные которого, кроме (24), удовлетворяют условию

$$b_0 \varphi(0) \exp(p + \gamma) < \min\{\overline{\Im}, \underline{\Im}\},$$

ограничено вместе со своей производной.

Следствие. Если выполняются условия теоремы 4 и при этом $\overline{F} = \underline{F} = +\infty$, то все продолжаемые решения уравнения (1) ограничены при $t \to +\infty$.

Если же выполняются условия замечания 2 и при этом $\overline{F} = \underline{F} = \overline{\Im} = \underline{\Im} = +\infty$, то все решения уравнения (1) ограничены вместе со своими производными.

Заметим, что из этого предложения получаются отдельные результаты работ [1], [3] и [6].

Теорема 5. *Пусть* $\Im_0 = 0$ *и выполняются условия* (6), (16) *и* (17). *Пусть, далее,* $b(t)$ *- неубывающая функция.*

Тогда любое продолжаемое решение $u(t)$ *уравнения* (1), *для которого существуют точки* $t_1, t_2 (t_2 > t_1 \ge 0)$ *такие, что*

$$\dot{u}(t_1) = \dot{u}(t_2) = 0, \; u(t_1) \cdot u(t_2) < 0$$

(*в, частности, любое колеблющееся решение уравнения* (1)) *ограничено при* $t \to +\infty$.

Доказательство проводится так же, как и доказательство теоремы 5 из [3].

Теорема 6. *Пусть выполняются все условия теоремы* 2, *условия* (21), (22) *и* $\beta(t) \le l = const < +\infty \quad \forall t \ge 0$. *Тогда все продолжаемые решения* $u(t)$ *уравнения* (1) *с начальными данными*

$$\Phi(0) l \exp(p) < \min\{\overline{F}, \underline{F}\}$$

ограничены при $t \to +\infty$, *при этом* $\Im(u'(t)) = O(\alpha(t))$.

Если, кроме того, соблюдаются условия (28) *и* $\alpha(t) \le L = const < +\infty$, *то все продолжаемые решения с начальными данными*

$$\Phi(0) L \exp(p) < \min\{\overline{\Im}, \underline{\Im}\}$$

ограничены вместе со своими производными при $t \to +\infty$.

Следствие. Если в условиях теоремы 6 $\overline{F} = \underline{F} = +\infty$, то все продолжаемые решения уравнения (1) ограничены. Если при этом и $\overline{\Im} = \underline{\Im} = +\infty$, то все решения уравнения (1) продолжаемы и ограничены вместе с первыми производными.

Замечание. Если $a(t, x, y) \equiv 0$ и $g(y) > 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}$, то из этого следствия получается ряд результатов работы [2] (см. [2], теорему 3 и следствия из нее). Если $g(y) = 1, a(t, x, y) \equiv 0$, то получаем некоторые результаты работы [8], если, кроме того, $f(x) = x$, то получим известные теоремы Л.И. Камынина [7].

Заметим также, что, рассматривая в качестве функции $b(t)$ те же примеры, что и в работах [2] и [8], с помощью теоремы 6 можно получить усиление следствий из теоремы 3 работы [2].

Теорема 7. *Пусть функция* $b(t)$ *абсолютно непрерывна на* $\mathbb{R}_+$ *и выполняются условия* (5), (6) *и* (21). *Пусть, кроме того, функция* $a(t, x, y)$ *удовлетворяет левой части неравенства* (11') *и*

$$\int_0^{+\infty} \left[p_1(\tau) + \frac{b'(\tau)}{b(\tau)} \right]^- d\tau = c < +\infty. \tag{29}$$

Тогда любое продолжаемое решение $u(t)$ *уравнения* (1) *с достаточно малыми начальными данными*, (*а именно, с* $\varphi(0)\exp(c) < \min\{\overline{F}, \underline{F}\}$) *ограничено при* $t \to +\infty$.

Здесь также можно сформулировать аналоги следствий из теорем 4 и 6.

§ 3. Существование пределов: $\lim\limits_{t\to+\infty}\varphi(t)$ и $\lim\limits_{t\to+\infty}\Phi(t)$

Установим асимптотику функций (9) и (20) при $t \to +\infty$.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия* (5), (6), (17) *и*

$$\int_0^{+\infty} \frac{db_2(t)}{b(t)} < +\infty. \tag{30}$$

Тогда для любого продолжаемого решения $u(t)$ *уравнения* (1) *существует конечный предел*

$$\varphi_0 = \lim_{t\to+\infty}\varphi(t). \tag{31}$$

Если же выполняется условие (11) *с*

$$p_2(t) \equiv 0, \quad \int_0^{+\infty} p_1(t)dt = p_1 < +\infty \tag{32}$$

и существует конечный предел

$$\lim_{t\to+\infty} b_1(t) = b_1, \tag{33}$$

то

$$\varphi_0 \ge \varphi(0)\exp\left(-p_1 - \frac{b_1}{b_0}\right), \tag{34}$$

где $b_0 = \inf\{b(t) : t \ge 0\} > 0.$

Доказательство. Существование конечного предела (31) следует непосредственно из (10), если положить, например, $\varepsilon = 1,$ и учесть условия (17), (30) и то, что $0 \le \dfrac{\Im(u'(t))}{b\cdot[\varphi(t)+1]} \le 1$ для всех $t \ge 0.$

Оценка (34) следует из левой части (12) и условий теоремы. То, что $b_0 > 0,$ доказывается так же, как и в [1].

Теорема 8'. *Пусть выполнены условия* (5), (6) *и* (17). *Пусть, далее, функция* $b(t)$ *абсолютно непрерывна на* $\mathbb{R}_+$ *и*

$$\int_0^{+\infty} \frac{[b'(t)]^- dt}{b(t)} < +\infty. \tag{30'}$$

Тогда для любого продолжаемого решения $u(t)$ *уравнения* (1) *существует конечный предел* (31).

Если при этом выполняется условие (11') *с*

$$p_1(t) \equiv 0, \quad \int_0^{+\infty}\left[p_2(t) + \frac{b'(t)}{b(t)}\right]^+ dt = p_0 < +\infty \tag{32'}$$

то

$$\varphi_0 \ge \varphi(0)\exp(-p_0). \tag{34'}$$

Теорема 9. *Пусть выполнены условия* (5), (17) *и* (18). *Тогда для любого продолжаемого решения* $u(t)$ *уравнения* (1) *существует конечный предел*

$$\Phi_0 = \lim_{t\to+\infty}\Phi(t) \le \Phi(0). \tag{35}$$

Доказательство. Из (*) имеем:

$$\Phi(t)+\int_0^t\frac{\Im(u'(\tau))}{\alpha(\tau)}\cdot\frac{d\alpha(\tau)}{\alpha(\tau)}+\int_0^t\frac{F(u(\tau))}{\beta(\tau)}\cdot\frac{d\beta(\tau)}{\beta(\tau)}+\int_0^t\frac{a(\tau,u(\tau),u'(\tau))u'(\tau)d\tau}{\alpha(\tau)}=\Phi(0)$$

для всех $t\geq 0,$ откуда легко следует (35).

§ 4. Условия неограниченности решений

Здесь выводятся достаточные условия при которых продолжаемые решения уравнения (1) неограниченны.

Теорема 10. *Пусть выполнены все условия теоремы* 8 (8') *и*

$$\sup\{F(z):z\in\mathbb{R}\}=F^*<+\infty. \tag{36}$$

В случае теоремы 8' *пусть, кроме того,* $b_0>0.$ *Пусть, далее, существует непрерывная возрастающая функция* $\psi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$ *такая, что*

$$\Im(y)\leq\psi(|y|)\ \ \forall y\in\mathbb{R}. \tag{37}$$

Тогда любое продолжаемое решение $u(t)$ *уравнения* (1) *с начальными данными*

$$\varphi(0)>F^*\exp\left(p_1+\frac{b_1}{b_0}\right)\ \ (\varphi(0)>F^*\exp(p_0)) \tag{38}$$

неограниченно, причем $|u(t)|\uparrow+\infty$ *при* $t\to+\infty$.

Доказательство. Пусть $u(t)$ - произвольное продолжаемое решение уравнения (1). Тогда из (9), (11) и (11') в силу условий теоремы имеем

$$\frac{\Im(u'(t))}{b(t)}+F(u(t))\geq\varphi(0)\exp\left(-p_1-\frac{b_1}{b_0}\right)\ \big(\geq\varphi(0)\exp(-p_0)\big).$$

Отсюда, с учетом (37) и (38), следует, что для всех $t\geq 0$

$$\psi(|u'(t)|)\geq\Im(u'(t))\geq c, \tag{39}$$

где

$$c=\left[\varphi(0)\exp\left(-p_1-\frac{b_1}{b_0}\right)-F^*\right]b_0>0\ \ \big(c=\left[\varphi(0)\exp(-p_0)-F^*\right]b_0>0\big).$$

Из (39) получаем: $|u'(t)|\geq\psi^{-1}(c)>0$ для всех $t\geq 0,$ и поэтому $|u(t)|\uparrow+\infty$ при $|t\to+\infty.$ Теорема доказана.

Следствие. Пусть существуют конечные пределы

$$\lim_{z\to+\infty}F_1(z)\ \text{ и }\ \lim_{z\to-\infty}F_1(z), \tag{36'}$$

а функции a,b,g удовлетворяют всем условиям теоремы 10. Тогда любое продолжаемое решение $u(t)$ уравнения (1) с начальными данными (38) неограниченно, причем $|u(t)|\uparrow+\infty$ при $t\to+\infty$ и

$$0<c\leq\lim_{t\to+\infty}\Im(u'(t))<+\infty. \tag{40}$$

Доказательство. Из (36') следует, что $F_0>-\infty$ и $F^*<+\infty.$ Поэтому для любого продолжаемого решения $|u(t)$ уравнения (1) в силу теоремы 10 имеем: либо $|u(t)|\uparrow+\infty$, либо $|u(t)|\downarrow-\infty$ при $|t\to+\infty,$ но тогда из (36') ясно, что существует $\lim\limits_{t\to+\infty}F(u(t))=F^*.$ Следовательно, в силу (31) и (37), имеет место (40).

Замечание. Если $g(u')\equiv 1,$ то из последнего предложения получается один результат из [3], а если при этом и $a(t,u,u')\equiv 0,$ то получаем соответствующий результат из [1].

§ 5. Условия колеблемости решений

В этом параграфе даны достаточные условия колеблемости правильных решений уравнения (1).

Теорема 11. *Пусть выполнены условия* (6), (15), (16), (17) *и*

$$\sup\{g(\upsilon):|\upsilon|\geq\gamma\}>0\ \ \forall\gamma>0. \tag{15'}$$

Тогда для колеблемости всех правильных и ограниченных решений уравнения (1) *достаточно, чтобы существовала абсолютно непрерывная, неотрицательная и неубывающая на* $[t^*,+\infty[$ $g(u')\equiv 1,\ (t^*\geq 0)$ *функция* $r(t)$ *такая, что* $r'(t)$ *не возрастает и*

$$\int^{+\infty} r(t)b(t)dt=+\infty. \tag{41}$$

Доказательство. Допустим противное, что уравнение (1) имеет правильное, ограниченное, но неколеблющееся решение $u(t)$. Тогда найдется $t_0\geq t^*$, что для всех $t\geq t_0$ будет выполняться условие (4). Поэтому из равенства (1) с учетом условий теоремы следует, что для всех $t\geq t_0$ будут выполняться неравенства

$$g(u'(t))>0,\ u(t)\cdot u'(t)>0,\ u(t)\cdot u''(t)<0. \tag{42}$$

Считая $t\geq t_0$, умножим обе части равенства (1) на $\dfrac{r(t)}{g(u'(t))}$ и проинтегрируем от t_0 до $t\geq t_0$. Тогда получим, что для всех $t\geq t_0$ справедливо равенство

$$r(t)\,|u(t)|'-r(t_0)\,|u'(t_0)|-\int_{t_0}^{t}|u(\tau)|'\,r'(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\frac{r(\tau)\,|a(\tau,u(\tau),u'(\tau))|}{g(u'(\tau))}d\tau+$$
$$+\int_{t_0}^{t}b(\tau)r(\tau)\frac{|f(u(\tau))|}{g(u'(\tau))}d\tau=0. \tag{43}$$

Из (42) легко следует, что $|u(t)|'=|u'(t)|>0$ и $|u'(t)|$ не возрастает на $[t_0,+\infty[$, следовательно, существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+\infty}u'(t)$. Далее, так как $u(t)$ - ограничено и $|u(t)|'>0$, то для всех $t\geq t_0$ $|u(t_0)|\leq|u(t)|<|u(+\infty)|<+\infty$. Поэтому в силу (16)

$$\inf_{t_0\leq t<+\infty}|f(u(t))|\equiv\sigma>0. \tag{44}$$

Далее, очевидно, что существует конечный предел $\lim\limits_{t\to+\infty}g(u'(t))=g_0\geq 0$.

Следовательно, найдется такое $t_1\geq t_0$, что для всех $t\geq t_1$ будет справедливо неравенство

$$0<g(u'(t))<g_0+1. \tag{45}$$

Учитывая теперь (6), (44), (45) и неотрицательность $r(t)$, из (43) получаем, что для всех $t\geq t_1$

$$\frac{\sigma}{g_0+1}\int_{t_1}^{t}b(\tau)r(\tau)d\tau\leq r(t_0)\,|u'(t_0)|+\int_{t_0}^{t}|u(\tau)|'\,r'(\tau)d\tau,$$

или, так как $r'(t)\leq r'(t_0)$ при $t\geq t_0$ (по условию), то

$$\int_{t_1}^{t}b(\tau)r(\tau)d\tau\leq\frac{g_0+1}{\sigma}\big[r(t_0)\,|u'(t_0)|+|u(+\infty)|\,r'(t_0)\big]$$

при всех $t\geq t_1$, что противоречит условию (41).

Замечание. Если $g(u') \equiv 1, r(t) \equiv t,$ то из теоремы 11 получаем один результат из [3], если при этом $a(t,x,y) \equiv 0,$ то получим соответствующий результат из [1].

Следствие 1. Пусть выполнены условия (6), (15), (15'), (16) и (17). Тогда любое правильное и неколеблющееся решение $u(t)$ уравнения (1) является монотонным на $[t_0,+\infty[,$ где t_0 - достаточно большое число и

$$0 \le \alpha = \lim_{t\to+\infty} \frac{|u(t)|}{t} = \lim_{t\to+\infty} |u'(t)| < +\infty.$$

Если при этом υ_1 и υ_2 два последовательных нуля функции $g(y)$ таких, что $\upsilon_1 < \upsilon_2,$ $\upsilon_1 \cdot \upsilon_2 > 0$ и, если существует такое $\bar{t} \ge 0,$ что $\upsilon_1 < u'(\bar{t}) < \upsilon_2,$ то $\upsilon_1 \le u'(t) \le \upsilon_2$ при $t \ge \bar{t}$ и $\min\{|\upsilon_1|,|\upsilon_2|\} \le \alpha \le \max\{|\upsilon_1|,|\upsilon_2|\}.$

Следствие 2. Пусть $b(t) \ge 0$ при $t \ge 0,$ $g(y) > 0$ для $y \in \mathbb{R}$ и выполняются все остальные условия теоремы 11. Тогда все правильные и ограниченные решения уравнения (1) являются колеблющимися.

Следующие теоремы охватывают и случай неограниченных решений.

Теорема 12. *Если соблюдаются условия* (6), (15), (15'), (16), (17) *и*

$$\int^{+\infty} b(t)dt = +\infty, \tag{41'}$$

$$\inf\{|f(x)| : |x| > \gamma\} > 0 \quad \forall \gamma > 0, \tag{46}$$

то все правильные решения уравнения (1) *колеблющиеся.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 11.

Теорема 13. *Пусть* $b(t) \ge 0$ *при* $t \ge 0,$ $g(y) > 0$ *при* $y \in \mathbb{R}$ *и выполняются условия* (16), (17), (41') *и* (46). *Тогда все правильные решения уравнения* (1) *колеблющиеся.*

Замечание. Если $a(t,x,y) \equiv 0,$ то теорема 13 превращается в известный результат (см. теорему 1 из [2]).

Теорема 14. *Пусть* $b(t) \ge b_0 > 0$ *при* $t \ge 0$ *и*

$$\lim_{|z|\to+\infty} F_1(z) = +\infty. \tag{47}$$

Пусть, кроме того, выполнены условия (15), (16), (17) *и* (15'). *Тогда все правильные решения уравнения* (1) *колеблющиеся.*

Доказательство. В силу теоремы 11 достаточно показать, что любое правильное и неограниченное решение уравнения (1) колеблется. Допустим противное, т. е. что уравнение (1) имеет правильное, неограниченное и неколеблющееся решение $u(t).$ Тогда найдется такое $t_0 \ge 0,$ что для всех $t \ge t_0$ будут соблюдаться условия: (4), (42) и $f(u(t))u'(t) > 0.$ Далее, так как существует конечный предел $\lim_{t\to+\infty} u'(t),$ то найдутся такие числа $t_1 \ge t_0$ и $k > 0,$ что для всех $t \ge t_1$ $1/g(u'(t)) \ge k.$ Тогда, умножив обе части равенства (1) на $\dfrac{u'(t)}{g(u'(t))}$ и проинтегрировав от t_1 до $t \ge t_1,$ получим

$$\frac{|u'(t)|^2}{2} - \frac{|u'(t_1)|^2}{2} + \int_{t_1}^{t} \frac{a(\tau,u(\tau),u'(\tau))u'(\tau)}{g(u'(\tau))}d\tau + \int_{t_1}^{t} b(\tau)\frac{f(u(\tau))u'(\tau)}{g(u'(\tau))}d\tau = 0,$$

откуда легко следует:

$$\int_{t_1}^{t} f(u(\tau))du(\tau) = \int_{u(t_1)}^{u(t)} f(x)dx \le \frac{u'^2(t_1)\cdot k}{2b_0}, t \ge t_1,$$

что противоречит условию (47), так как $\lim_{t\to+\infty} |u(t)| = +\infty.$

Замечание. Если $g(y) > 0 \;\; \forall y \in \mathbb{R}$ и $a(t,x,y) \equiv 0,$ то из теоремы 14 получаем теорему 2 из [2].

Литература

1. *Изюмова Д.В., Кигурадзе И.Т.* Некоторые замечания о решениях уравнения $u''+a(t)f(t) = 0$. // Дифференциальные уравнения.).. – 1968. - Т. 4. - No. 4. – С. 589-605.
2. *Каменев И.В.* Колеблемость и ограниченность решений нелинейного уравнения второго порядка с мультипликативно разделенной правой частью // Дифференциальные уравнения. - 1968. – Т. 4. - № 5. - С. 845-849.
3. Мамий К.С., Мирзов Д.Д. Свойства решений нелинейного дифференциального уравнения второго порядка на полуоси // Дифференциальные уравнения. - 1971. - Т. 5. - № 7. - С. 1330-1332.
4. *Wong, J.S.W., Burton, T.A.* Some properties of solutions of $u''(t)+a(t)f(u)g(u')=0$. II. // Monatsh. Math. – 1965. – Vol. 69. – P. 368-374.
5. Wong J.S.W. Some properties of solutions of $u''(t) = a(t)f(u)g(u') = 0$. III. // SIAM. J. Appl. Math. – 1966. – Vol. 14. - P. 209–214.
6. *Клоков Ю.А.* Некоторые теоремы об ограниченности решений обыкновенных дифференциальных уравнений // УМН. – 1958. – Т. 13. – Вып. 2(80). – С. 189–194.
7. *Камынин Л.И.* Об ограниченности решений дифференциального уравнения $y'' + F(x)y = 0$ // Вестник МГУ. Сер. физ.-мат. - 1951. - № 5. - С. 3-12.
8. *Мамий К.С.* Первая научная конференция молодых ученых Адыгеи (доклады и сообщения). - Майкоп: АГПИ, 1971. – С. 8-13.

Some properties of solutions of one nonlinear second order differential equation

K.S. Mamiy

The article is devoted deriving of sufficient conditions continued, boundednesses, limitlessness and a variability of solutions of one nonlinear differential equation with a singularity and with a damping member.

