2007 г. №12

Т р у д ы Ф О Р А

НЕКОТОРЫЕ ТЕОРЕМЫ О ВЫСКАЗЫВАНИЯХ, СОДЕРЖАЩИХ КВАНТОРЫ

К.С. Мамий

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В работе сформулированы и доказаны теоремы, выражающие свойства высказываний с кванторами. Носит методический характер, из личного опыта работы автора.

Работа состоит из трех частей. В первой части, для удобства читателя, приведены определения основных понятий и их обозначений. Во второй части сформулированы и доказаны теоремы, выражающие некоторые свойства высказываний с кванторами. В третьей части приведены примеры возможных применений теорем, рассмотренных во второй части.

1. Основные понятия и обозначения

О.1. Высказыванием называют любое повествовательное предложение, которое либо истинно, либо ложно.

Высказывания принято обозначать большими буквами латинского алфавита.

О.2. Отрицанием высказывания A называют такое высказывание, обозначаемое $\overline{A}$ (не A), которое ложно тогда и только тогда, когда A истинно. Символическая запись: $\overline{A}$-Л:$\Leftrightarrow$ A-И, то есть $\overline{A}$ ложно, по определению, тогда и только тогда, когда A истинно.

Следствие: $\overline{A}$-И$\Leftrightarrow$ A-Л.

О.3. Конъюнкцией двух высказываний A и B называют такое высказывание, обозначаемое символом $A \wedge B$ (A и B), которое <u>истинно</u> тогда и только тогда, когда оба высказывания истинны, то есть $A \wedge B$-И:$\Leftrightarrow$ A-И и B-И.

Следствие: $A \wedge B$ ложно тогда и только тогда, когда хотя бы одно их двух высказываний ложно, то есть $A \wedge B$-Л$\Leftrightarrow$ A-Л, B-И, либо A-И, B-Л, либо A-Л и B-Л.

О.4. Дизъюнкцией двух высказываний A и B называют такое высказывание, обозначаемое символом $A \vee B$ (A или B), которое <u>ложно</u> тогда и только тогда, когда оба высказывания ложны, то есть $A \vee B$-Л:$\Leftrightarrow$ A-Л и B-Л.

Следствие: $A \vee B$ истинно тогда и только тогда, когда хотя бы одно их двух высказываний истинно, то есть $A \vee B$-И$\Leftrightarrow$ A-И или B-И, или A-И и B-И.

О.5. Импликацией двух высказываний A и B называют такое высказывание, обозначаемое символом $A \to B$, которое ложно тогда и только тогда, когда A (посылка) истинно, а B (заключение) ложно, то есть ($A \to B$) ложно:$\Leftrightarrow$ A-И, а B-Л. Импликацию $A \to B$ можно прочесть либо как "A имплицирует B", либо как "если A, то B,"либо как "из A следует B."

Следствие: Импликация $A \to B$ истинна тогда и только тогда, когда либо оба высказывания A и B истинны, либо посылка ложна.

О.6. Эквиваленцией высказываний A и B называют такое высказывание, обозначаемое символом $A \leftrightarrow B$, которое истинно тогда и только тогда, когда оба высказывания либо истинны, либо ложны, то есть когда оба высказывания принимают одинаковые истинностные значения.

Следствие: $A \leftrightarrow B$ ложна тогда и только тогда, когда A и B принимают различные истинностные значения.

Так как операции конъюнкция и дизъюнкция обладают свойством ассоциативности, то их можно определить не только для двух высказываний, но и для любого семейства высказываний $\{A_\alpha/\alpha \in D\}$, где D – множество индексов, содержащее не менее двух элементов. Для этого необходимо сначала ввести понятия предиката и кванторов.

О.7. Предикатом называют любое повествовательное предложение, содержащее не менее одной переменной, которое превращается в высказывание при подстановке вместо переменных конкретных возможных их значений. При этом предикаты, зависящие от одной переменной, называют одноместными, а зависящие от двух, трех и т.д. переменных – двухместными, трехместными и т.д. Примерами предикатов являются всевозможные уравнения и неравенства с одной или несколькими переменными, а также их совокупности и системы.

Предикаты можно превратить в высказывания не только путем подстановки вместо переменных конкретных возможных их значений, но и путем навешивания кванторов всеобщности и существования на все переменные, от которых зависит предикат.

Например, если $P(x) :\Leftrightarrow x^2 - 4 > 0$, то область определения предиката $D_P = \mathbb{R}$. Навесив кванторы $\forall$ – всеобщности или $\exists$ – существования на переменную $x \in \mathbb{R}$, получим два высказывания:

$$1)\forall x \in \mathbb{R}/P(x) \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R}/x^2 - 4 > 0,$$

$$2)\exists x \in \mathbb{R}/P(x) \Leftrightarrow \exists x \in \mathbb{R}/x^2 - 4 > 0,$$

которые можно прочесть так:

1) "для любого действительного числа x справедливо утверждение $P(x)$", или, что все равно, "для любого действительного числа x верно неравенство $x^2 - 4 >\ 0$." Очевидно, что эти высказывания ложны.

2) "существует число $x \in \mathbb{R}$, такое, что истинно $P(x)$," то есть "существует такое число $x \in \mathbb{R}$, что справедливо неравенство $x^2 - 4 >\ 0$." Ясно, что эти высказывания истинны.

О.8. Конъюнкцией семейства высказываний $\{A_\alpha/\alpha \in D\}$ назовем такое высказывание, обозначаемое символом $\bigwedge\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$, которое истинно тогда и только тогда, когда все высказывания A_α семейства истинны, то есть $\bigwedge\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$–И: $\Leftrightarrow \forall \alpha \in D(A_\alpha$–И).

Следствие: $\bigwedge\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$–Л $\Leftrightarrow \exists \alpha \in D(A_\alpha$–Л).

О.9. Дизъюнкцией семейства высказываний $\{A_\alpha/\alpha \in D\}$ называют такое высказывание, обозначаемое символом $\bigvee\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$, которое ложно тогда и только тогда, когда все высказывания A_α семейства ложны, то есть $\bigvee\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$–Л: $\Leftrightarrow \forall \alpha \in D(A_\alpha$–Л).

Следствие: $\bigvee\limits_{\alpha \in D} A_\alpha$–И $\Leftrightarrow \exists \alpha \in D(A_\alpha$–И), то есть дизъюнкция семейства высказываний истинна тогда и только тогда, когда хотя бы одно из высказываний семейства истинно.

2. Некоторые теоремы о высказываниях, содержащих кванторы

Пусть $P(x)$ и $Q(x)$ – произвольные предикаты, определенные на одном и том же множестве, а B – любое высказывание или предикат, но не зависящий от переменной x. Тогда справедливы следующие утверждения (теоремы), выражающие некоторые свойства высказываний, содержащих кванторы:

$1^\circ.\ \overline{\forall x/P(x)} \Leftrightarrow \exists x/\overline{P(x)}.$ $2^\circ.\ \overline{\exists x/P(x)} \Leftrightarrow \forall x/\overline{P(x)}.$

$3^\circ.\ \forall x/P(x) \wedge \forall x/Q(x) \Leftrightarrow \forall x/P(x) \wedge Q(x).$ $4^\circ.\ \exists x/P(x) \vee \exists x/Q(x) \Leftrightarrow \exists x/P(x) \vee Q(x).$

$5^\circ.\ \forall x/B \wedge P(x) \Leftrightarrow B \wedge \forall x/P(x).$ $6^\circ.\ \exists x/B \vee P(x) \Leftrightarrow B \vee \exists x/P(x).$

$7^\circ.\ \forall x/B \vee P(x) \Leftrightarrow B \vee \forall x/P(x).$ $8^\circ.\ \exists x/B \wedge P(x) \Leftrightarrow B \wedge \exists x/P(x).$

$$9^\circ.\ \forall x/P(x) \vee \forall x/Q(x) \Rightarrow \forall x/P(x) \vee Q(x).$$
$$10^\circ.\ \exists x/P(x) \wedge Q(x) \Rightarrow \exists x/P(x) \wedge \exists x/Q(x).$$
$$11^\circ.\ \forall x/P(x) \Rightarrow \exists x/P(x).$$

В процессе доказательства этих теорем будем пользоваться некоторыми свойствами операций над высказываниями, которые можно найти в книге [1]. В этой же книге приведены – подробные словесные доказательства первых двух теорем, рассмотрев отдельно необходимость и достаточность истинности их правых частей для истинности их левых частей. Ниже приведем более компактные методы доказательства первых восьми теорем.

▶ $1^\circ.\ \overline{\forall x/P(x)}$–И$\Leftrightarrow (\forall x/P(x))$–Л$\Leftrightarrow \exists x/(\overline{P(x)}$–И$)\Leftrightarrow \exists x/\overline{P(x)}$–И •

► 2°. Здесь воспользуемся законом двойного отрицания и симметричностью отношения логической равносильности. Имеем: $\forall x/\overline{P(x)} \Leftrightarrow \overline{\overline{\forall/\overline{P(x)}}} \overset{1^\circ}{\Leftrightarrow} \overline{\exists x/\overline{\overline{P(x)}}} \Leftrightarrow \overline{\exists x/P(x)}$•

► $3^\circ. \forall x/P(x) \wedge \forall x/Q(x)-$ И $\Leftrightarrow \forall x/P(x)-$ И $\wedge \forall x/Q(x)-$ И $\Leftrightarrow P(x) \equiv$ И $\wedge Q(x) \equiv$ И $\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow P(x) \wedge Q(x) \equiv$ И $\Leftrightarrow \forall x/P(x) \wedge Q(x)-$ И •

► 4°. $\exists x/P(x) \vee \exists x/Q(x) \Leftrightarrow \overline{\overline{\exists x/P(x) \vee \exists x/Q(x)}} \Leftrightarrow \overline{\overline{\exists x/P(x)} \wedge \overline{\exists x/Q(x)}} \overset{2^\circ}{\Leftrightarrow}$
$\overset{2^\circ}{\Leftrightarrow} \overline{\forall x/\overline{P(x)} \wedge \forall x/\overline{Q(x)}} \overset{3^\circ}{\Leftrightarrow} \overline{\forall x/\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}} \overset{1^\circ}{\Leftrightarrow} \exists x/\overline{\overline{P(x)} \wedge \overline{Q(x)}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \exists x/\overline{\overline{P(x)}} \vee \overline{\overline{Q(x)}} \Leftrightarrow \exists x/P(x) \vee Q(x)$•

► $5^\circ. \forall x/B \wedge P(x)-$И$\Leftrightarrow B \wedge P(x) \equiv$И $\Leftrightarrow B-$И$\wedge P(x) \equiv$И$\Leftrightarrow B-$И$\wedge \forall x/P(x)-$И$\Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow B \wedge \forall x/P(x)-$И•

► $6^\circ. \exists x/(B \vee P(x)) \Leftrightarrow \overline{\overline{\exists x/(B \vee P(x))}} \overset{2^\circ}{\Leftrightarrow} \overline{\forall x/\overline{B \vee P(x)}} \Leftrightarrow \overline{\forall x/\overline{B} \wedge \overline{P(x)}} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{\overline{B} \wedge \forall x/\overline{P(x)}} \Leftrightarrow \overline{\overline{B}} \vee \overline{\forall x/\overline{P(x)}} \overset{1^\circ}{\Leftrightarrow} B \vee \exists x/\overline{\overline{P(x)}} \Leftrightarrow B \vee \exists x/P(x)$•

► $7^\circ. \forall x/(B \vee P(x))-$И$\Leftrightarrow B \vee P(x) \equiv$И $\Leftrightarrow B-$И$\vee \forall x/P(x)-$И$\Leftrightarrow (B \vee \forall x/P(x))-$И•

► $8^\circ. \exists x/B \wedge P(x) \Leftrightarrow \overline{\overline{\exists x/B \wedge P(x)}} \Leftrightarrow \overline{\forall x/\overline{B \wedge P(x)}} \Leftrightarrow \overline{\forall x/\overline{B} \vee \overline{P(x)}} \overset{7^\circ}{\Leftrightarrow} \overline{\overline{B} \vee \forall x/\overline{P(x)}} \Leftrightarrow$ $\overline{\overline{B}} \wedge \overline{\forall x/\overline{P(x)}} \Leftrightarrow B \wedge \exists x/\overline{\overline{P(x)}} \Leftrightarrow B \wedge \exists x/P(x)$•

► $9^\circ. \forall x/P(x) \vee \forall x/Q(x)-$И$\Leftrightarrow \forall x/P(x)-$И$\vee \forall x/Q(x)-$И$\Leftrightarrow P(x) \equiv$И$\vee Q(x) \equiv$И$\Rightarrow$
$\Rightarrow P(x) \vee Q(x) \equiv$И$\Leftrightarrow \forall x/P(x) \vee Q(x)-$И. Следовательно, утверждение 9° верно в силу свойства транзитивности отношений логической равносильности и логического следования.•

► 10°. Эту теорему докажем двумя способами. Первый способ основан на том, что любая теорема вида $A \Rightarrow B$ равносильна обратно-противоположной теореме $\overline{B} \Rightarrow \overline{A}$. Поэтому достаточно доказать, что $\overline{\exists x/P(x) \wedge \exists x/Q(x)} \Rightarrow \overline{\exists x/P(x) \wedge Q(x)}$. Имеем: $\overline{\exists x/P(x) \wedge \exists x/Q(x)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{\exists x/P(x)} \vee \overline{\exists x/Q(x)} \Leftrightarrow \forall x/\overline{P(x)} \vee \forall x/\overline{Q(x)} \overset{9^\circ}{\Rightarrow} \forall x/\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)} \Leftrightarrow \forall x/\overline{P(x) \wedge Q(x)} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \overline{\exists x/P(x) \wedge Q(x)}$.

► Второй способ основан на законах двойного отрицания и контрапозиции. С учетом этих замечаний имеем:
$\exists x/P(x) \wedge Q(x) \Leftrightarrow \overline{\overline{\exists x/P(x) \wedge Q(x)}} \Leftrightarrow \overline{\forall x/\overline{P(x) \wedge Q(x)}} \Leftrightarrow \overline{\forall x/\overline{P(x)} \vee \overline{Q(x)}} \overset{9^\circ}{\Rightarrow}$
$\Rightarrow \overline{\forall x/\overline{P(x)} \vee \forall x/\overline{Q(x)}} \Leftrightarrow \overline{\forall x/\overline{P(x)}} \wedge \overline{\forall x/\overline{Q(x)}} \Leftrightarrow \exists x/P(x) \wedge \exists x/Q(x)$.•

► 11°. Хотя эта теорема фактически очевидна, тем не менее докажем ее методом от противного. Пусть посылка $\forall x/P(x)$ истинна и, тем не менее, заключение $\exists x/P(x)$ – ложно. Тогда получим: $\exists x/P(x)-$Л$\Leftrightarrow \overline{\exists x/P(x)}-$И$\Leftrightarrow \forall x/\overline{P(x)}-$И, откуда, в силу условия, получаем:

$\forall x/P(x)-$И$\wedge \forall x/\overline{P(x)}-$И$\xRightarrow{3^\circ} \forall x/P(x) \wedge \overline{P(x)}-$И, чего быть не может и теорема 11° доказана. •

Заметим, что теоремы $9^\circ - 11^\circ$ необратимы. В самом деле, высказывания
$\forall x \in \mathbb{R}/x < 0 \vee x \leq 0$ и $\exists x \in \mathbb{R}/x \geq 0 \wedge \exists x \in \mathbb{R}/x < 0$ истинны. Тем не менее, высказывания $\forall x \in \mathbb{R}/x \geq 0 \vee \forall x \in \mathbb{R}/x < 0$ и $\exists x \in \mathbb{R}/x \leq 0 \wedge x > 0$ ложны.

Отметим еще одно свойство высказываний с кванторами для двухместных предикатов (см. [1] и [2]):

$12^\circ. \exists x \forall y/P(x;y) \Rightarrow \forall y \exists x/P(x;y)$, при этом утверждение 12° также необратимо, как и утверждения $9^\circ - 11^\circ$.

3. Несколько примеров на применения рассмотренных теорем

Здесь будут установлены некоторые свойства функций. Поэтому предварительно разъясним смысл понятия функции.

О. 10. Пусть X и Y не пустые множества. Тогда отношением (соответствием) R между множествами X и Y будем называть тройку множеств $(X;Y;\Gamma)$, где Γ – некоторое подмножество декартова произведения $X \times Y$, то есть

$$R := (X;Y;\Gamma), \text{ где } \Gamma \subset X \times Y.$$

При этом будем говорить, что X – область отправления отношения R, Y – область прибытия отношения R, $\Gamma =: \Gamma_R$ – график отношения R.

Совокупность первых (вторых) компонент пар $(x;y) \in \Gamma_R$ будем называть областью определения (множеством значений) отношения R и обозначать D_R (E_R), то есть

$$D_R := \{x \in X : \exists y \in Y / xRy\},$$
$$E_R := \{y \in Y : \exists x \in X / xRy\}.$$

О. 11. Если задано отношение $R = (X;Y;\Gamma_R)$ и если $(x;y) \in \Gamma_R$ или, что все равно, xRy (x находится в отношении R к y), то будем говорить, что отношение R элементу $x \in X$ ставит в соответствие элемент $y \in Y$, или что элементу $x \in X$ соответствует элемент $y \in Y$, в силу отношения R.

Если $(x_0;y_0) \in \Gamma_R$, то элементу x_0 может соответствовать не только элемент y_0, но и некоторые другие элементы из Y.

О. 12. Совокупность всех элементов $y \in Y$, для которых $(x_0;y) \in \Gamma_R$ назовем полным образом элемента x_0 при отношении R и обозначим его символом $R(x_0)$. Таким образом $R(x_0) \subset Y$ $\forall x_0 \in X$, то есть $R(x_0) = \{y \in Y/(x_0, y) \in \Gamma_R\}$.

Пример. Пусть $X = \{4;30;7\}$ и $Y = \{2;3;6\}$ и пусть отношение R между этими множествами задано в виде: "x делится на y". Тогда $\Gamma_R = \{(4;2),(30;2),(30;3),(30;6)\}$, $R(4) = \{2\}$; $R(7) = \varnothing$, $R(30) = \{2;3;6\}$.

О. 13. Отношение f между двумя произвольными множествами X и Y назовем функцией (или отображением) из X в Y, если оно каждому элементу множества X ставит в соответствие не более одного элемента из Y, то есть если $f(x)$ – одноэлементное множество $\forall x \in D_f$.

Заметим, что если $x \in X \backslash D_f$, то $f(x) = \varnothing$. Если $f(x) \neq \varnothing$, то $\exists! y \in Y/f(x) = \{y\}$. В этом случае, для удобства, условимся писать $f(x) = y$ вместо не общепринятой записи $f(x) = \{y\}$.

Множество всех функций, действующих из X в Y, обозначим символом $(X \to Y)$. Пусть $f \in (X \to Y)$, 2^X и 2^Y – булианы множеств X и Y. Тогда можно считать, что $f \in (2^X \to 2^Y)$, если $\forall A \in 2^X$, или, что все равно, $\forall A \subset X$, положить

$$f(A) := \{y \in Y : \exists x \in A / f(x) = y\}. \qquad (*)$$

При этом $f(A)$ называют образом множества A при отображении f. Из определения (*) видно, что $f(A) \subset Y$ и что имеют место равносильности:

$$y \in f(A) \Leftrightarrow \exists x \in A/f(x) = y;\ f(A) \neq \varnothing \Leftrightarrow A \cap D_f \neq \varnothing;\ f(A) = \varnothing \Leftrightarrow A \cap D_f = \varnothing.$$

Установим теперь несколько свойств функции $f \in (X \to Y)$. Пусть $A, A_\alpha, B \subset X$, где α пробегает некоторое множество индексов. Тогда справедливы следующие утверждения:

$$1.\ f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B). \quad 2.\ f(\bigcap_\alpha A_\alpha) \subset \bigcap_\alpha f(A_\alpha).$$
$$3.\ f(A \cup B) \subset f(A) \cup f(B). \quad 4.\ f(\bigcup_\alpha A_\alpha) \subset \bigcup_\alpha f(A_\alpha).$$
$$5.\ f(A \backslash B) \subset f(A \backslash B).$$

▶ 1. Пусть $y \in f(A \cap B)$. Тогда справедлива следующая цепочка логических равносильностей и логических следований:

$y \in f(A \cap B) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} \exists x (x \in A \cap B \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow \exists x((x \in A \wedge x \in B) \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x/(x \in A \wedge f(x) = y) \wedge (x \in B \wedge f(x) = y) \overset{10^\circ}{\Longrightarrow} \exists x/(x \in A \wedge f(x) = y)) \wedge$

$\wedge \exists x/(x \in B \wedge f(x) = y) \overset{(*)}{\Leftrightarrow} y \in f(A) \wedge y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cap y \in f(B).$

В силу свойства транзитивности отношений логической равносильности и логического следования из полученной цепочки вытекает, что $\forall y \in f(A \cap B)$ справедливо утверждение:

$$y \in f(A \cap B) \Rightarrow y \in f(A) \cap f(B),$$

что и означает истинность утверждения 1.●

▶ 2. Пусть $y \in f(\bigcap_\alpha A_\alpha)$. Тогда справедлива следующая цепочка логических равносильностей и логических следований:

$y \in f(\underset{\alpha}{\cap} A_\alpha) \Leftrightarrow \exists x \in \underset{\alpha}{\cap} A_\alpha / y = f(x) \Leftrightarrow \exists x/(x \in \underset{\alpha}{\cap} A_\alpha \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x \forall \alpha / x \in A_\alpha \wedge f(x) = y \stackrel{12^\circ}{\Longrightarrow} \forall \alpha(\exists x/x \in A_\alpha \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow \forall \alpha / y \in f(A_\alpha) \Leftrightarrow y \in \underset{\alpha}{\cap} f(A_\alpha)$.

Рассуждая также, как и при доказательстве утверждения 1., приходим к выводу, что $\forall y \in f(\underset{\alpha}{\cap} A_\alpha)$ справедливо утверждение: $y \in f(\underset{\alpha}{\cap} A_\alpha) \Rightarrow y \in \underset{\alpha}{\cap} f(A_\alpha)$, откуда следует истинность 2.•

▶ 3. Пусть $y \in f(A \cup B)$. Тогда имеем:

$y \in f(A \cup B) \Leftrightarrow \exists x \in A \cup B / f(x) = y \Leftrightarrow \exists x / x \in A \cup B \wedge f(x) = y \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x/(x \in A \vee x \in B) \wedge f(x) = y \Leftrightarrow \exists x((x \in A \wedge f(x) = y) \vee (x \in B \wedge f(x) = y)) \stackrel{4^\circ}{\Longleftrightarrow}$

$\stackrel{4^\circ}{\Longleftrightarrow} \exists x(x \in A \wedge f(x) = y) \vee \exists x(x \in B \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \in f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \cap f(B)$.•

▶ 4. Пусть $y \in f(\underset{\alpha}{\cup} A_\alpha)$. Тогда имеем:

$y \in f(\underset{\alpha}{\cup} A_\alpha) \Leftrightarrow \exists x(x \in \underset{\alpha}{\cup} A_\alpha \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow \exists x(\exists \alpha / x \in A_\alpha \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists \alpha(\exists x/x \in A_\alpha \wedge y = f(x)) \Leftrightarrow \exists \alpha / y \in f(A_\alpha) \Leftrightarrow y \in \underset{\alpha}{\cup} f(A_\alpha)$.•

▶ 5. Пусть $y \in f(A) \setminus f(B)$. Тогда имеем:

$y \in f(A) \setminus f(B) \Leftrightarrow y \in f(A) \wedge y \notin f(B) \Leftrightarrow (\exists x/x \in A \wedge f(x) = y) \wedge \forall t \in B / f(t) \neq y \Rightarrow$

$\Rightarrow \exists x(x \in A \wedge f(x) = y \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \exists x/((x \in A \wedge x \neq B) \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \exists x/(x \in A \setminus B \wedge f(x) = y) \Leftrightarrow y = f(A \setminus B)$. Следовательно, $\forall y$ имеем: $y \in f(A) \setminus f(B) \Rightarrow \Rightarrow y \in f(A \setminus B)$. Значит, $f(A) \setminus f(B) \subset f(A \setminus B)$.•

Заметим, что включения 1., 2. и 5. необратимы. Примеры, подтверждающие это замечание, можно найти в [1] и [2].

Приведем еще несколько примеров на применения теорем $5^\circ - 8^\circ$ для установления некоторых свойств операций над множествами. Докажем, что справедливы следующие равенства:

$$6.\ B \setminus \underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha = \underset{\alpha\in D}{\cup}(B \setminus A_\alpha). \quad 7.\ (\underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha) \cup B = \underset{\alpha\in D}{\cup}(B \cup A_\alpha).$$
$$8.\ (\underset{\alpha\in D}{\cap} A_\alpha) \cap B = \underset{\alpha\in D}{\cap}(A_\alpha \cap B). \quad 9.\ (\underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha) \cap B = \underset{\alpha\in D}{\cup}(A_\alpha \cap B).$$
$$10.\ B \setminus \underset{\alpha\in D}{\cap} A_\alpha) = \underset{\alpha\in D}{\cap}(B \setminus A_\alpha). \quad 11.\ (\underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha) \setminus B = \underset{\alpha\in D}{\cup}(A_\alpha \setminus B).$$

$$12.\ \underset{\alpha\in D}{\cap} A_\alpha \setminus B = \underset{\alpha\in D}{\cap}(A_\alpha \setminus B).$$

где B, A_α и D произвольные непустые множества.

▶ 6. Пусть $x \in B \setminus \underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha$. Тогда будет справедлива следующая цепочка логических равносильностей:

$x \in B \setminus \underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha \Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin \underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha \Leftrightarrow x \in B \wedge \forall \alpha \in D / x \notin A_\alpha \stackrel{5^\circ}{\Leftrightarrow} \forall \alpha \in D / x \in B \wedge x \notin A_\alpha \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \forall \alpha \in D / x \in B \setminus A_\alpha \Leftrightarrow x \in \underset{\alpha\in D}{\cap}(B \setminus A_\alpha)$.

В силу свойства транзитивности отношения логической равносильности первое звено полученной цепи равносильно последнему, а это и означает, что равенство 6. верно. •

Далее, для краткости, будем применять символ "ℷ", что означает слово "Пусть".

▶ 7. $ℷx \in (\underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha) \cup D$. Тогда будем иметь:

$x \in (\underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha) \cup B \Leftrightarrow x \in \underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha \vee x \in B \Leftrightarrow (\exists \alpha \in D / x \in A_\alpha) \vee x \in B \stackrel{6^\circ}{\Longleftrightarrow}$

$\stackrel{6^\circ}{\Longleftrightarrow} \exists \alpha \in D/(x \in A_\alpha \vee x \in B) \Leftrightarrow \exists \alpha \in D / x \in A_\alpha \cup B \Leftrightarrow x \in \underset{\alpha\in D}{\cup}(A_\alpha \cup B)$. Значит равенство 7. верно. •

▶ 8. $ℷx \in (\underset{\alpha\in D}{\cap} A_\alpha) \cup B$. Тогда будем иметь:

$x \in (\underset{\alpha\in D}{\cap} A_\alpha) \cup B \Leftrightarrow x \in \underset{\alpha\in D}{\cap} A_\alpha \vee x \in B \Leftrightarrow (\forall \alpha \in D / x \in A_\alpha) \vee x \in B \stackrel{7^\circ}{\Longleftrightarrow}$

$\stackrel{7^\circ}{\Longleftrightarrow} \forall \alpha \in D/(x \in A_\alpha \vee x \in B) \Leftrightarrow \forall \alpha \in D / x \in A_\alpha \cup B \Leftrightarrow x \in \underset{\alpha\in D}{\cap}(A_\alpha \cup B)$.•

▶ 9. $ℷx \in (\underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha) \cap B$. Тогда будем иметь:

$x \in (\underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha) \cap B \Leftrightarrow x \in \underset{\alpha\in D}{\cup} A_\alpha \wedge x \in B \Leftrightarrow (\exists \alpha \in D / x \in A_\alpha) \wedge x \in B \stackrel{8^\circ}{\Longleftrightarrow}$

$\stackrel{8^\circ}{\Longleftrightarrow} \exists\alpha \in D/(x \in A_\alpha \wedge x \in B) \Leftrightarrow \exists\alpha \in D/x \in A_\alpha \cap B \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{\alpha\in D}(A_\alpha \cap B).\bullet$

▶ 10. ⅂$x \in B \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in D} A_\alpha$. Тогда получим:

$x \in B \setminus \bigcap\limits_{\alpha\in D} A_\alpha \Leftrightarrow x \in B \wedge x \notin \bigcap\limits_{\alpha\in D} A_\alpha \Leftrightarrow x \in B \wedge \exists\alpha \in D/x \notin A_\alpha \stackrel{8^\circ}{\Longleftrightarrow}$

$\stackrel{8^\circ}{\Longleftrightarrow} \exists\alpha \in D/x \in B \wedge x \notin A_\alpha \Leftrightarrow \exists\alpha \in D/x \in B \setminus A_\alpha \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{\alpha\in D}(B \setminus A_\alpha).\bullet$

▶ 11. ⅂$x \in (\bigcup\limits_{\alpha\in D} A_\alpha) \setminus B$. Тогда имеем:

$x \in (\bigcup\limits_{\alpha\in D} A_\alpha) \setminus B \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{\alpha\in D} A_\alpha \wedge x \notin B \Leftrightarrow (\exists\alpha \in D/x \in A_\alpha) \wedge x \notin B \stackrel{8^\circ}{\Longleftrightarrow}$

$\stackrel{8^\circ}{\Longleftrightarrow} \exists\alpha \in D/(x \in A_\alpha \wedge x \notin B) \Leftrightarrow \exists\alpha \in D/x \in A_\alpha \setminus B \Leftrightarrow x \in \bigcup\limits_{\alpha\in D}(A_\alpha \setminus B).\bullet$

▶ 12. ⅂$x \in (\bigcap\limits_{\alpha\in D} A_\alpha) \setminus B$. Тогда получим:

$x \in (\bigcap\limits_{\alpha\in D} A_\alpha) \setminus B \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\alpha\in D} A_\alpha \wedge x \notin B \Leftrightarrow (\forall\alpha \in D/x \in A_\alpha) \wedge x \notin B \stackrel{8^\circ}{\Longleftrightarrow}$

$\stackrel{8^\circ}{\Longleftrightarrow} \forall\alpha \in D/x \in A_\alpha \wedge x \notin B \Leftrightarrow \forall\alpha \in D/x \in A_\alpha \setminus B \Leftrightarrow x \in \bigcap\limits_{\alpha\in D}(A_\alpha \setminus B).\bullet$

Литература

1. *Никольская И.Л.* Математическая логика. Учебник. – М.: Высш. школа, 1981. – 127 с.

2. *Мамий К.С.* Основы современной математики. Учебное пособие для студентов математических факультетов пединститутов и университетов. – Майкоп: РИПО "Адыгея", 1994. – 144 с.

Some theorems of the sentences containing quantors

K.S. Mamiy

In work the theorems expressing properties of sentences with quantors are formulated and proved. It has methodical character from a personal operational experience of the author.

