ПРИМЕРНЫЕ ОБРАЗЦЫ РЕШЕНИЯ НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ, СВЯЗАННЫХ С ЕГЭ

К.С. Мамий

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В работе излагаются примерные образцы решения ряда алгебраических задач с параметрами, либо предлагавшихся на ЕГЭ, либо содержащихся в некоторых учебных пособиях, посвященных ЕГЭ.

Пример 1 [1]. При каких значениях a сумма $\log_a(\cos^2 x+1)$ и $\log_a(\cos^2 x+5)$ будет равна единице хотя бы при одном значении x?

Решение. В силу определения и свойств логарифма данные функции определены при любых значениях x, а также при $a>0$ и $a\neq 1$. При этом

$$\log_a(\cos^2 x+1)+\log_a(\cos^2 x+5)=\log_a(\cos^2 x+1)(\cos^2 x+5),$$

$$\log_a(\cos^2 x+1)(\cos^2 x+5)=1 \Leftrightarrow (\cos^2 x+1)(\cos^2 x+5)=a.$$

Положим $f(x)=(\cos^2 x+1)(\cos^2 x+5).$ Тогда задача сводится к тому, чтобы выяснить при каких значениях a уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы одно решение? Ответ на этот вопрос очевиден: уравнение $f(x)=a$ имеет хотя бы одно решение тогда и только тогда, когда $a\in E(f).$ Поэтому сначала следует найти множество значений $E(f)$ функции f.

Так как $0\le \cos^2 x\le 1$ на множестве **R**, то $1\le \cos^2 x+1\le 2$ и $5\le \cos^2 x+5\le 6$ на множестве **R**, откуда следует, что на множестве **R** $5\le f(x)\le 12$. Далее, очевидно, что $5=\min\limits_R f = f(\pi/2)$, а $12=\max\limits_R f = f(0)$. Следовательно, в силу непрерывности функции f на **R**, она принимает и все значения, заключенные между 5 и 12, т.е. $E(f)=[5;12]$.

Ответ: $a\in[5;12]$.

Пример 2 [1]. При каких значениях a сумма $\log_a\left(\frac{4+3|x|}{1+|x|}\right)$ и $\log_a\left(\frac{6+5|x|}{1+|x|}\right)$ больше единицы при всех x?

Решение. Так как сумма логарифмов по одному основанию двух выражений равна логарифму по тому же основанию произведения этих выражений, то задачу можно переформулировать так: при каких значениях a верно неравенство

$$\log_a\left(\frac{4+3|x|}{1+|x|}\right)\cdot\left(\frac{6+5|x|}{1+|x|}\right)>1 \tag{1}$$

при всех x? Положим $f(x)=\left(\frac{4+3|x|}{1+|x|}\right)\cdot\left(\frac{6+5|x|}{1+|x|}\right)$. Тогда неравенство (1) равносильно неравенству $\log_a f(x)>1$, которое равносильно совокупности двух неравенств:

$$0<f(x)<a \text{ при } 0<a<1, \tag{2}$$

$$f(x)>a \text{ при } a>1. \tag{3}$$

Представим функцию f в более удобной форме:

$$f(x)=\left(\frac{1+3(1+|x|)}{1+|x|}\right)\cdot\left(\frac{1+5(1+|x|)}{1+|x|}\right)\Leftrightarrow f(x)=\left(\frac{1}{1+|x|}+3\right)\cdot\left(\frac{1}{1+|x|}+5\right).$$

Из этого представления легко понять, что выражение $1/(1+|x|)$ может принимать только значения, меньшие или равные 1, причем $1/(1+|x|)=1$ только при $x=0$. Следовательно, $\max\limits_R 1/(1+|x|)=1$. Кроме того, при неограниченном возрастании $|x|$ выражение $1/(1+|x|)$ убывая приближается к нулю, или по другому, $\lim\limits_{|x|\to+\infty}1/(1+|x|)=0$. Далее, так как $1/(1+|x|)$ представляет собой функцию, непрерывную на всей числовой прямой, то она принимает в качестве своих значений все числа между 0 и 1, включая 1, но не включая числа 0. Поэтому справедливо двойное неравенство $3<1/(1+|x|)+3\le 4$ при всех x. Аналогично рассуждая, получим, что и выражение $1/(1+|x|)+5$ принимает все значения между 5 и 6, но не включая 5. Таким образом, функция f непрерывна на всей числовой прямой и при всех x $15<f(x)\le 24$, т.е. $E(f)=(15;24]$.

Перейдем теперь к рассмотрению неравенств (2) и (3). Пусть $0<a<1$. Тогда

$$f(x)<a\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+|x|}+3\right)\cdot\left(\frac{1}{1+|x|}+5\right)<a\Leftrightarrow x\in\varnothing,$$

то есть в этом случае исходное неравенство (1) не может выполняться ни при каких x.

Рассмотрим теперь случай, когда $a>1$. Тогда имеем

$$f(x)>a\Leftrightarrow\left(\frac{1}{1+|x|}+3\right)\cdot\left(\frac{1}{1+|x|}+5\right)>a. \tag{4}$$

Но так как $f(x)>15$ для всех x, то неравенство (4) будет выполняться при всех x тогда и только тогда, когда $a\le 15$ и $a>1$, т.е. когда $1<a\le 15$.

Ответ: $(1;15]$..

Пример 3 [1]. Найти все значения a, при которых область определения функции $y=(a^{x+0,5}+\sqrt{x}\cdot a^4-x^{0,5+x\log_x a}-a^{4,5})^{0,5}$ содержит одно целое число.

Решение. Так как $t^{0.5}=\sqrt{t}$, то данная функция определена тогда и только тогда, когда выражение, стоящее в скобках, неотрицательно, т.е. когда выполняется неравенство

$$a^{x+0.5}+\sqrt{x}\cdot a^4-x^{0.5+x\log_x a}-a^{4,5}\ge 0. \tag{5}$$

Прежде чем приступить к решению неравенства (5), отметим возможные значения переменных a и x. Так как a находится под знаком логарифма, а x в его основании, то $a>0$, $x>0$ и $x\ne 1$. В силу свойств степени и логарифма справедлива следующая цепочка равносильностей:

$$(5)\Leftrightarrow a^x\cdot\sqrt{a}+\sqrt{x}\cdot a^4-\sqrt{x}\cdot x^{\log_x a^x}-a^4\cdot\sqrt{a}\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(a^x-a^4)\sqrt{a}+\sqrt{x}(a^4-a^x)\ge 0\Leftrightarrow(a^x-a^4)(\sqrt{a}-\sqrt{x})\ge 0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow(\sqrt{x}-\sqrt{a})(a^x-a^4)\le 0.$$

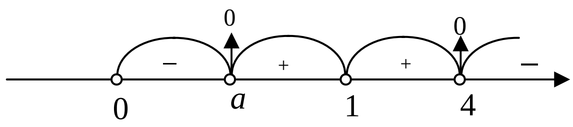
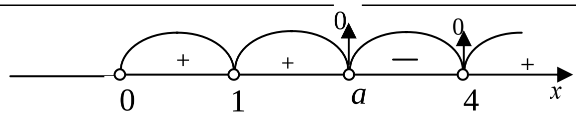
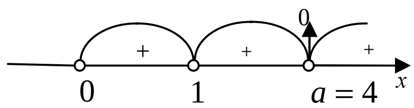
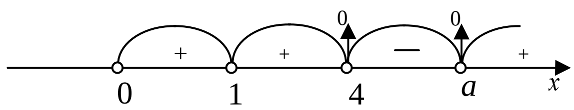
Так как $\sqrt{x}+\sqrt{a}>0$ (в силу предположений), то умножив последнее неравенство на $\sqrt{x}+\sqrt{a}$, получим более простое неравенство

$$(x-a)(a^x-a^4)\le 0, \tag{6}$$

равносильное неравенству (5). При $a=1$ неравенство (6) выполняется для всех допустимых значений x, поэтому (при таком a) $D(y)=(0;1)\bigcup(1;+\infty)$ и $D(y)$ содержит бесконечное множество целых чисел, что не удовлетворяет условию задачи. Дальше рассмотрим следующие случаи: $0<a<1$,

$1<a<4$, $a=4$ и $a>4$. В каждом из этих случаев найдем $D(y)$ методом интервалов. Положим $f(x)=(x-a)(a^x-a^4)$. Тогда неравенство (6) будет равносильно неравенству $f(x)\le 0$. Для решения этого неравенства рассмотрим все возможные случаи расположения точки a относительно точек 0, 1 и 4 на координатной прямой. Оформим процесс решения неравенства $f(x)\le 0$ в виде таблицы, заметив, что $f(x)=0 \Leftrightarrow x\in\{a;4\}$ и что, a^x строго убывает при $0<a<1$, a^x строго возрастает при $a>1$.

Таблица № 1

№	Положение точки a	Знаки функции $f(x)=(x-a)(a^x-a^4)$	$D(y)$
1	$0<a<1$		$(0;a]\cup[4;+\infty)$
2	$1<a<4$		$[a;4]$
3	$a=4$		$\{4\}$
4	$a>1$		$[4;a]$

Из таблицы № 1 легко видеть, что при $0<a<1$ $D(y)$ содержит бесконечное множество целых чисел, что не удовлетворяет условию задачи.

Если $1<a<4$, то $D(y)=[a;4]$ может содержать одно целое число 4, только при $3<a<4$; если $a=4$, то $D(y)=\{4\}$ содержит только одно целое число 4; если $a>4$ $D(y)=[4;a]$ может содержать одно целое число 4, только при $4<a<5$. Объединив все эти рассуждения, получаем

О т в е т : $a\in(3;5)$.

У п р а ж н е н и е

Используя таблицу № 1, найдите все значения a, при которых область определения функции, рассмотренной в примере 3, содержит только: а) два целых числа; б) три целых числа; в) четыре целых числа; г) два двузначных числа?

Прежде чем рассмотреть следующий пример, покажем, как сравнительно легко установить справедливость следующего равенства

$$a^n-b^n=(a-b)(a^{n-1}+a^{n-2}b+a^{n-3}b^2+\ldots+ab^{n-2}+b^{n-1}), \qquad (7)$$

где n – натуральное число. Хорошо известно, что сумма $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}$ первых n членов геометрической прогрессии со знаменателем $q\ne 1$ равна $(1-q^n)/(1-q)$, то есть для любого числа $q\ne 1$ и любого натурального числа n справедливо равенство $1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}=\dfrac{1-q^n}{1-q}$, откуда следует, что

$$1-q^n=(1-q)(1+q+q^2+\ldots+q^{n-1}). \qquad (8)$$

Равенство (8), очевидно, верно и для $q=1$.

Положим в равенстве (8) $q=\dfrac{b}{a}$, где $a\neq 1$. Тогда получим

$$1-\frac{b^n}{a^n}=\left(1-\frac{b}{a}\right)\left(1+\frac{b}{a}+\frac{b^2}{a^2}+\ldots+\frac{b^{n-1}}{a^{n-1}}\right),$$

откуда следует (7), после умножения обеих частей последнего равенства на a^n.

Пример 4 [1]. Найти все значения a, при которых область определения функции

$$y=\left(a^{x+1}\cdot x^{4\log_x a}+a^{3+5\log_a x}-\left(\sqrt{x}\right)^{10+2x\log_x a}-\sqrt{a^{16}}\right)^{-0,5}$$

содержит ровно три целых числа.

Решение. Так как и a, и x находятся в основании логарифмов, то должны выполняться условия: $a>0$, $a\neq 1$, $x>0$ и $x\neq 1$.

Дальше будем считать, что эти ограничения на a и x всюду выполняются. Тогда область определения $D(y)$ данной функции для каждого допустимого значения параметра a представляет собой множество решений неравенства (так как $t^{-0,5}=1/\sqrt{t}$):

$$a^{x+1}\cdot x^{4\log_x a}+a^{3+5\log_a x}-(\sqrt{x})^{10+2x\log_x a}-\sqrt{a^{16}}>0. \qquad (9)$$

Используя свойства степеней и логарифмов, получим следующую цепочку равносильностей:

$$(9)\Leftrightarrow a^x\cdot a\cdot x^{\log_x a^4}+a^3\cdot a^{\log_a x^5}-(\sqrt{x})^{10}\cdot x^{\log_x a^x}-a^8>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^x\cdot a^5+a^3\cdot x^5-x^5\cdot a^x-a^8>0\Leftrightarrow a^x\cdot(a^5-x^5)+a^3(x^5-a^5)>0\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x^5-a^5)(a^3-a^x)>0\Leftrightarrow (x^5-a^5)(a^x-a^3)<0.$$

В силу (7) $x^5-a^5=(x-a)(x^4+x^3a+x^2a^2+xa^3+a^4)$, причем выражение, стоящее во второй скобке положительно, так как $a>0$ и $x>0$. Поэтому $(x^5-a^5)(a^x-a^3)<0\Leftrightarrow(x-a)(a^x-a^3)<0.$

Положим $\varphi(x)=(x-a)(a^x-a^3)$. Тогда неравенство (9) будет равносильно неравенству $\varphi(x)<0$, причем $\varphi(x)=0\Leftrightarrow x=a\vee x=3$.

Если теперь в таблице 1 цифру 4 заменить цифрой 3, то получим такую же таблицу знаков и для функции φ. Поэтому, в силу строгости неравенства (9), здесь справедливы следующие утверждения:

1. $D(y)=(0;a)\bigcup(3;+\infty)$, если $0<a<1$;
2. $D(y)=(a;3)$, если $1<a<3$;
3. $D(y)=\varnothing$, если $a=3$;
4. $D(y)=(3;a)$, если $a>3$.

В случае 1. $D(y)$ содержит бесконечное множество целых чисел, что не удовлетворяет условию; в случае 2. $D(y)$ может содержать не более одного целого числа; в случае 3. $D(y)$ вообще не содержит никаких чисел; в случае 4. очевидно, что $D(y)=(3;a)$ будет содержать ровно три целых числа 4, 5 и 6 тогда и только тогда, когда $6<a\leq 7$.

Ответ: $a\in(6;7]$.

Упражнение

В условиях примера 4 при каких значениях a $D(y)$ будет содержать только: а) одно целое число; в) два целых числа; в) три двузначных числа; г) одно трехзначное число?

П р и м е р 5 [1]. Из области определения функции $y=\log_{0,8}\left(a^a-a^{\frac{8x+5}{x+5}}\right)$ взяли все положительные целые числа и сложили их. Найти все положительные значения a, при которых такая сумма будет больше 8, но меньше 15 при каждом положительном значении a.

Р е ш е н и е . Данная функция определена на множестве всех решений неравенства

$$a^a-a^{\frac{8x+5}{x+5}}>0. \qquad (10)$$

Очевидно, что если $a=1$, то $D(y)=\varnothing$. Поэтому следует рассмотреть два случая: 1) $0<a<1$ и 2) $a>1$.

1) Пусть $0<a<1$. Тогда показательная функция a^t строго убывает, поэтому, применив правило: «прибавить и вычесть», получим:

$$(10)\Leftrightarrow a^{\frac{8x+5}{x+5}}<a^a \Leftrightarrow \frac{8x+5}{x+5}>a \Leftrightarrow \frac{8x+40-40+5}{x+5}>a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8-\frac{35}{x+5}>a \Leftrightarrow \frac{35}{x+5}<8-a. \qquad (11)$$

Так как в силу условия задачи достаточно искать только положительные значения x, то всюду дальше будем считать, что $x>0$.
Тогда

$$(11)\Leftrightarrow x+5>\frac{35}{8-a} \Leftrightarrow x>-5+\frac{35}{8-a} \Leftrightarrow x>\frac{5a-5}{8-a} \text{ и } a-1<0.$$

Следовательно, в этом случае $D(y)$ содержит все положительные числа, что не удовлетворяет условию задачи.

2) Пусть теперь $a>1$. Тогда функция a^t строго возрастает, поэтому

$$(10)\Leftrightarrow a^{\frac{8x+5}{x+5}}<a^a \Leftrightarrow \frac{8x+5}{x+5}<a \Leftrightarrow \frac{8x+40-35}{x+5}<a \Leftrightarrow 8-\frac{35}{x+5}<a \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 8-a<\frac{35}{x+5}. \qquad (12)$$

Если допустить, что $a\ge 8$, то неравенство (12) будет верно для всех $x>0$. Следовательно, и в этом случае $D(y)$ содержит бесконечное множество положительных целых чисел, что не удовлетворяет условию задачи.

Допустим теперь, что $1<a<8$. Тогда, так как $x>0$ и $8-a>0$, то из неравенства (12) получаем, что

$$x+5<\frac{35}{8-a} \Leftrightarrow x<\frac{35}{8-a}-5.$$

Следовательно, в этом случае можно считать, что $D(y)=\left(0;\frac{35}{8-a}-5\right)$. Так как $8<10$, $10=1+2+3+4$ и $10<10+5$, то числа 1, 2, 3, 4 должны принадлежать $D(y)$, но число 5 не должно принадлежать $D(y)$. Поэтому условиям задачи будут удовлетворять только такие значения a, которые будут удовлетворять следующему двойному неравенству:

$$4<\frac{35}{8-a}-5\le 5. \qquad (13)$$

Решим неравенство (13) путем равносильных преобразований:

$$(13) \Leftrightarrow 9 < \frac{35}{8-a} \le 10 \Leftrightarrow \frac{9}{35} < \frac{1}{8-a} \le \frac{10}{35} \Leftrightarrow \frac{35}{10} \le 8-a < \frac{35}{9} \Leftrightarrow \frac{35}{10} - 8 \le -a < \frac{35}{9} - 8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow -\frac{45}{10} \le -a < -\frac{37}{9} \Leftrightarrow \frac{37}{9} < a \le \frac{45}{10} \Leftrightarrow 4\frac{1}{9} < a \le 4{,}5.$$

О т в е т : $a \in \left(4\frac{1}{9}; 4{,}5\right].$

П р и м е р 6 [1]. Найти все значения параметра a, при которых множество D_a всех решений неравенства

$$1 - \frac{a}{x} < \frac{3}{x}\left(2 - \frac{2a+3}{x} + \frac{3a}{x^2}\right) \qquad (14)$$

содержится в некотором отрезке длиной 5 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 3.

Р е ш е н и е . Путем равносильных преобразований упростим неравенство (14). Имеем:

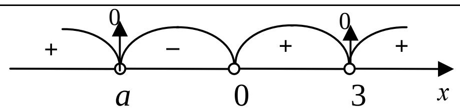
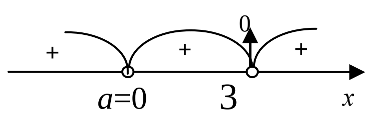
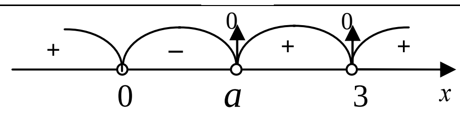
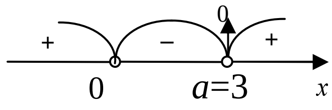
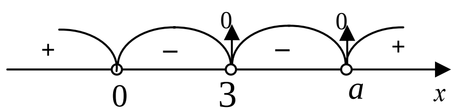
$$(14) \Leftrightarrow \frac{x-a}{x} < \frac{3}{x} \cdot \frac{2x^2 - 2ax - 3x + 3a}{x^2} \overset{(x^2>0)}{\Leftrightarrow} x(x-a) < \frac{3}{x} \cdot (2x(x-a) - 3(x-a)) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2(x-a) - 6x(x-a) + 9(x-a)}{x} < 0 \Leftrightarrow \frac{(x-a)(x^2-6x+9)}{x} < 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-a)(x-3)^2}{x} < 0. \qquad (15)$$

Дальше неравенство (15) решаем методом интервалов. Положим $f(x) = \dfrac{(x-a)(x-3)^2}{x}$. Тогда $D(f) = \boldsymbol{R} \backslash 0$ и $f(x) = 0 \Leftrightarrow x = a \vee x = 3$. Дальнейшее решение оформим в виде таблицы 2, откуда легко видеть ответ на вопрос задачи.

Таблица №2

№	Положение точки a	Знаки функции $f(x) = \dfrac{(x-a)(x-3)^2}{x}$	D_a
1	$a < 0$		$(a;0)$
2	$a = 1$		$\varnothing$
3	$0 < a < 3$		$(0;a)$
4	$a = 3$		$(0;3)$
5	$a > 3$		$(0;3) \cup (3;a)$

Из таблицы № 2 видно, что в случае $a<0$ интервал $(a;0)$ будет содержать какой-нибудь отрезок длиной 3, если $a<-3$ и будет содержаться в некотором отрезке длиной 5, если $a\ge -5$.

Следовательно, в случае $a<0$, чтобы a удовлетворяло требованиям задачи, следует потребовать, чтобы было истинно двойное неравенство: $-5\le a<-3$. В случаях 2-5 нетрудно понять, что не существует нужных значений параметра a.

О т в е т : $a\in[-5;-3)$.

П р и м е р 7 [ЕГЭ, 2004]. Найти все положительные значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$a^{ax^2+3x}\cdot 243^{5{,}6x-4{,}8}\le 81^{2ax+7x} \tag{16}$$

содержит числа, большие чем 2, но не содержит числа, меньшие чем $-0{,}6$.

Р е ш е н и е . Заметив, что $243=3^5$ и $81=3^4$, получим:

$$(16)\Leftrightarrow a^{ax^2+3x}\cdot 3^{5(5{,}6x-4{,}8)}\le 3^{4(2ax+7x)}\Leftrightarrow a^{ax^2+3x}\cdot 3^{28x-24}\le 3^{8ax+28x}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a^{ax^2+3x}\le 3^{8ax+24}\Leftrightarrow a^{x(ax+3)}\le 3^{8(ax+3)}.$$

Так как логарифмическая функция с основанием больше 1 строго возрастающая, то, логарифмируя обе части последнего неравенства по основанию 3, получим неравенство $x(ax+3)\log_3 a\le 8(ax+3)$, откуда имеем:

$$(ax+3)(x\log_3 a-8)\le 0. \tag{17}$$

Таким образом, неравенство (16) равносильно неравенству (17). Если $a=1$, то множество всех решений неравенства (17) есть промежуток $[-3;+\infty)$, который содержит числа, меньшие $-0{,}6$. Следовательно, случай $a=1$ не подходит. Положим

$$y=(ax+3)(x\log_3 a-8). \tag{18}$$

Допустим теперь, что $0<a<1$. Тогда $\log_3 a<0$, т.е. коэффициент при x^2 правой части неравенства (17) отрицателен. Следовательно, парабола (18) пересекает ось Ox в точках

$$x_1:=-\frac{3}{a}\ \text{и}\ x_2:=\frac{8}{\log_3 a},$$

расположенных левее нуля, а ветви параболы направлены вниз.

Так как $-\frac{3}{a}$ удовлетворяет неравенству (16) и $0<a<1$, то $-\frac{3}{a}<-0{,}6$, т.е. и в этом случае множество решений неравенства (16) содержит числа, меньшие чем $-0{,}6$, что недопустимо по условию.

Рассмотрим, наконец, случай, когда $a>1$. Тогда $x_1<0$, $x_2>0$ и ветви параболы (18) направлены вверх. Следовательно, множество решений неравенства (16) есть отрезок $[x_1;x_2]$. При этом, в силу условия, x_1 и x_2 должны удовлетворять неравенствам: $x_1\ge -0{,}6$ и $x_2>2$, откуда подставляя вместо x_1 и x_2 их значения, получим:

$$\begin{cases} a>1,\\ -\dfrac{3}{a}\ge -0{,}6,\\ 8/\log_3 a>2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a>1,\\ a\ge 5,\\ \log_3 a<4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases} a\ge 5,\\ a<3^4\end{cases}\Leftrightarrow 5\le a<81.$$

О т в е т : $a\in[5;81)$.

П р и м е р 8 [ЕГЭ, 2004]. Найти все положительные значения параметра a, при каждом из которых для любого числа из отрезка [-2; 2] верно неравенство

$$|3x+a|x|-11|\ge 3. \tag{19}$$

Р е ш е н и е . Неравенство (19) будем решать методом интервалов. Для этого положим $f(x;a)=|\,3x+a\,|\,x\,|-11\,|-3.$ Тогда неравенство (19) будет равносильно неравенству

$$f(x;a)\ge 0. \qquad (19')$$

Функция f непрерывна по переменной x на всей числовой прямой при любом значении параметра $a>0$. Поэтому, если для каждого $a>0$ найдем нули функции f и удалим их из числовой прямой, то на каждом из полученных интервалов знак функции f не будет меняться. Найдем нули функции f. В силу определения модуля действительного числа, имеем:

$$f(x;a)=0 \Leftrightarrow |\,3x+a\,|\,x\,|-11\,|=3 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{ll}\begin{cases}x\ge 0,\\ |(3+a)x-11|=3;\end{cases} & (20)\\ \begin{cases}x<0,\\ |(3-a)x-11|=3.\end{cases} & (21)\end{array}\right.$$

Решим отдельно системы (20) и (21). Так как модули противоположных чисел равны, то

$$(20)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}(3+a)x-11=3,\\ (3+a)x-11=-3\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\ \left[\begin{array}{l}(3+a)x=14,\\ (3+a)x=8\end{array}\right.\end{cases}\overset{(a>0)}{\Leftrightarrow} x=\frac{14}{a+3}\ \vee\ x=\frac{8}{a+3}.$$

Для системы (21) число 3 является «особым» значением параметра a, так как при переходе значений a через число 3 уравнение этой системы претерпевает качественные изменения. Очевидно, что при $a=3$ множество решений системы (21) пусто. Рассмотрим теперь случаи, когда $0<a<3$ и $a>3$.

Пусть $0<a<3$. Тогда $3-a>0$, поэтому

$$(21)\Leftrightarrow\begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}(3-a)x-11=3,\\ (3-a)x-11=-3.\end{array}\right.\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x<0,\\ \left[\begin{array}{l}(3-a)x=14,\\ (3-a)x=8.\end{array}\right.\end{cases}\overset{(3-a>0)}{\Leftrightarrow} x\in\varnothing.$$

Таким образом, при $0<a<3$ уравнение $f(x;a)=0$ имеет только два корня: $\dfrac{8}{a+3}$ и $\dfrac{14}{a+3}$. Поэтому, как видно из рисунка 1 знаков f, при $0<a<3$ множество решений неравенства (19) представляет собой объединение двух промежутков:

$$\left(-\infty;\frac{8}{a+3}\right]\cup\left[\frac{14}{a+3};+\infty\right).$$

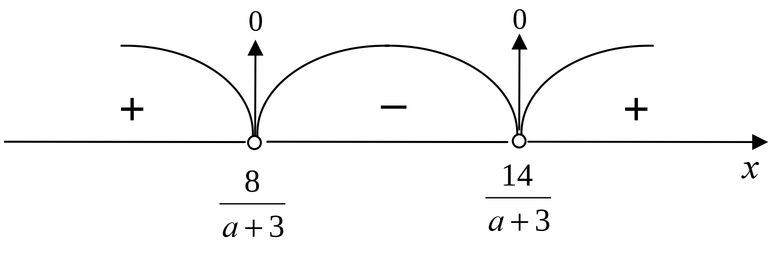


Рис. 1.

Следовательно, все числа из отрезка [-2;2] будут удовлетворять неравенству (19) тогда и только тогда, когда выполняется неравенство $2 \le \dfrac{8}{a+3}$, которое равносильно неравенству $a \le 1$. Следовательно, все числа $a \in (0;1]$ удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим теперь случай, когда $a > 3$. Покажем, что при таких значениях a система (21) будет иметь решения. В самом деле,

$$(21) \Leftrightarrow \begin{cases} x < 0, \\ (3-a)x = 14, \\ (3-a)x = 8 \end{cases} \overset{(3-a<0)}{\Leftrightarrow} x = \frac{14}{3-a} \vee x = \frac{8}{3-a} \Leftrightarrow x = -\frac{14}{a-3} \vee x = -\frac{8}{a-3}.$$

Значит, при $a > 3$ уравнение $f(x;a) = 0$ имеет четыре корня: два положительных и два отрицательных. В этом случае рисунок знаков f выглядит так:

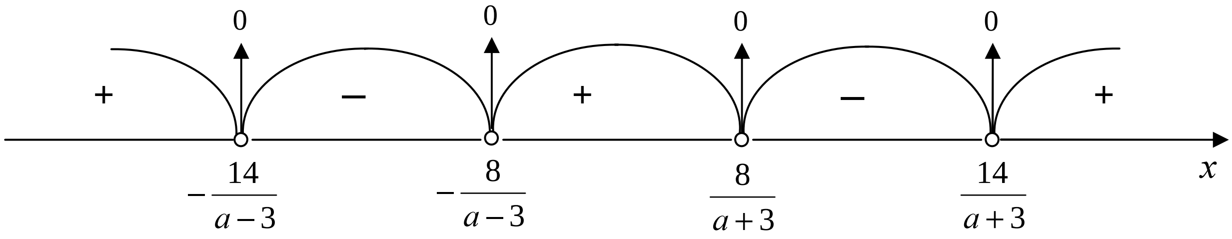


Рис. 2.

Из рисунка 2 следует, что при $a > 3$ множество решений неравенства (19) представляет собой объединение трех промежутков:

$$\left(-\infty; -\frac{14}{a-3}\right] \cup \left[-\frac{8}{a-3}; \frac{8}{a+3}\right] \cup \left[\frac{14}{a+3}; +\infty\right).$$

Следовательно, все числа из отрезка [-2;2] могут быть решениями неравенства (19) лишь только тогда, когда выполняются условия:

$$-\frac{8}{a-3} \le -2 \wedge 2 \le \frac{8}{a+3} \Leftrightarrow a \le 7 \wedge a \le 1 \Leftrightarrow a \le 1,$$

что противоречит условию $a > 3$.

О т в е т : $a \in (0;1]$.

П р и м е р 9 [ЕГЭ, 2004]. Найти все положительные значения параметра a, при которых для любого числа x из отрезка [2;4] верно неравенство $|\, ax + 4\,|\,x\,| - 16\,| < 8$, а для любого числа x из отрезка [-3;-1] это неравенство неверно.

Р е ш е н и е . Как и в предыдущей задаче, положим $f(x,a) := |\, ax + 4\,|\,x\,| - 16\,| - 8$. Тогда данное неравенство будет равносильно неравенству

$$f(x,a) < 0. \qquad (22)$$

Функция f определена и непрерывна по переменной x на всем **R**. Решаем неравенство (22) методом интервалов. Для этого найдем сначала нули функции f. Имеем:

$$f(x;a) = 0 \Leftrightarrow |ax + 4\,|\,x\,| - 16| - 8 = 0 \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &ax + 4\,|\,x\,| - 16 = 8, \\ &ax + 4\,|\,x\,| - 16 = -8 \end{aligned}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{aligned} &ax + 4\,|\,x\,| = 24, \quad (23) \\ &ax + 4\,|\,x\,| = 8. \quad (24) \end{aligned}\right.$$

Решим отдельно уравнения (23) и (24).

$$(23)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0\\(a+4)x=24\end{cases}\vee\begin{cases}x<0\\(a-4)x=24\end{cases}\overset{(a>0)}{\Leftrightarrow}$$

$$\overset{(a>0)}{\Leftrightarrow}\begin{cases}x\ge 0,\\x=\dfrac{24}{a+4}\end{cases}\vee\begin{cases}x<0,\\a<4,\\x=-24/(4-a)\end{cases}\vee\begin{cases}x<0,\\a\ge 4,\\x\in\varnothing\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{24}{a+4}\vee\begin{cases}0<a<4,\\x=-\dfrac{24}{4-a}.\end{cases}$$

$$(24)\Leftrightarrow\begin{cases}x\ge 0,\\(a+4)x=8\end{cases}\vee\begin{cases}x<0,\\(a-4)x=8\end{cases}\overset{(a>0)}{\Leftrightarrow}x=\frac{8}{a+4}\vee$$

$$\vee\begin{cases}x<0,\\a<4,\\x=-\dfrac{8}{4-a}\end{cases}\vee\begin{cases}x<0,\\a\ge 4,\\x\in\varnothing\end{cases}\Leftrightarrow x=\frac{8}{a+4}\vee\begin{cases}0<a<4,\\x=-\dfrac{8}{4-a}.\end{cases}$$

Пусть D_a - множество решений неравенства (22). Тогда при $0<a<4$ из рисунка 3 знаков f видно, что $D_a=\left(-\dfrac{24}{4-a};-\dfrac{8}{4-a}\right)\cup\left(\dfrac{8}{a+4};\dfrac{24}{a+4}\right)$.

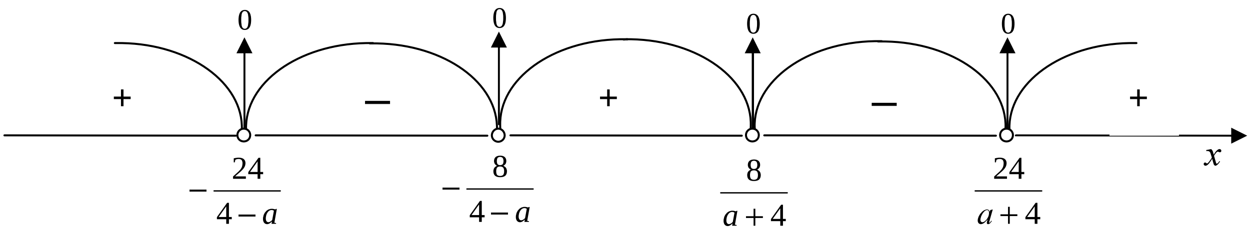


Рис. 3.

Следовательно, все значения параметра $a\in(0;4)$ будут удовлетворять условиям задачи тогда и только тогда, когда будут выполняться условия:

$$\begin{cases}\dfrac{8}{a+4}<2,\\4<\dfrac{24}{a+4},\\-\dfrac{8}{4-a}\le -3\vee -1\le -\dfrac{24}{4-a},\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a+4>4,\\a+4<6,\\-8\le -12+3a\vee -4+a\le -24\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a>0\\a<2\\a\ge\dfrac{4}{3}\end{cases}\vee\begin{cases}0<a<2\\a\le -20\end{cases}\Leftrightarrow\frac{4}{3}\le a<2\vee a\in\varnothing\Leftrightarrow\frac{4}{3}\le a<2.$$

Если $a\ge 4$, то $D_a=\left(\dfrac{8}{a+4};\dfrac{24}{a+4}\right)$. Ясно, что в этом случае отрезок [-3;-1] не имеет общих точек с D_a. Покажем, что при $a\ge 4$ и отрезок [2;4] не может содержаться в D_a. В самом деле, если допустить противное, то должны выполняться неравенства:

$$\frac{8}{a+4}<2\wedge 4<\frac{24}{a+4}\Leftrightarrow a+4>4\wedge a+4<6\Leftrightarrow a>0\wedge a<2\Leftrightarrow 0<a<2,$$

но по условию $a\ge 4$. Получили противоречие.

О т в е т : $\left[\dfrac{4}{3};2\right)$.

П р и м е р 10. [ЕГЭ, 2004]. Найти все значения параметра a, при каждом из которых в области определения функции $y=\sqrt{\log_a(x-a)-\log_a(ax+2)}$ имеются натуральные числа, кратные 5, и их количество равно количеству натуральных чисел, кратных 7, принадлежащих этой области определения.

Р е ш е н и е . Так как квадратный корень существует только из неотрицательных чисел, то область определения D(y) данной функции представляет собой множество решений неравенства

$$\log_a(x-a)-\log_a(ax+2)\ge 0, \qquad (25)$$

для которого, в силу свойств логарифмической функции ($\log_a$ строго возрастает при $a>1$ и $\log_a$ строго убывает при $0<a<1$), справедлива следующая цепочка равносильностей:

$$(5)\Leftrightarrow \log_a(x-a)\ge\log_a(ax+2)\Leftrightarrow \begin{cases}0<a<1,\\ x-a>0,\\ x-a\le ax+2\end{cases}\vee\begin{cases}a>1,\\ x-a>0,\\ x-a\le ax+2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<a<1,\\ x>a,\\ x-ax\le a+2\end{cases}\vee\begin{cases}a>1,\\ x>a,\\ ax-x<-a-2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<a<1,\\ x>a,\\ x(1-a)\le a+2\end{cases}\vee\begin{cases}a>1,\\ x>a,\\ (a-1)x\le -a-2\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}0<a<1,\\ a<x\le\dfrac{a+2}{1-a}\end{cases}\vee\begin{cases}a>1,\\ x>a>0,\\ x\le-\dfrac{a+2}{a-1}<0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0<a<1,\\ a<x\le\dfrac{a+2}{1-a}\end{cases}\vee x\in\varnothing,$$

из которой следует, что $D(y)=\varnothing,$ если $a>1$ и $D(y)=\left(a;\dfrac{a+2}{1-a}\right]$, если $0<a<1$. Выпишем теперь ряд натуральных чисел, кратных 5 и 7:

<u>5</u>, *7*, <u>10</u>, *14*, <u>15</u>, <u>20</u>, *21*, <u>25</u>, *28*, <u>30</u>, *35*, <u>40</u>, *42*, <u>45</u>, *49*, …,

в котором числа, кратные 5 подчеркнуты черточкой, а числа, кратные 7, выделены курсивом. Из этого видно, что, начиная с числа 15, числа, кратные 5, встречаются чаще, чем числа кратные 7. Следовательно, поровну эти числа будут встречаться только при тех значениях a, которые удовлетворяют следующей совокупности двойных неравенств:

$$7\le\frac{a+2}{1-a}<10\vee 14\le\frac{a+2}{1-a}<15\Leftrightarrow\begin{cases}7-7a\le a+2,\\ a+2<10-10a\end{cases}\vee\begin{cases}14-14a\le a+2,\\ a+2<15-15a\end{cases}\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\begin{cases}a\ge\dfrac{5}{8},\\ a<\dfrac{8}{11}\end{cases}\vee\begin{cases}a\ge\dfrac{12}{15}\\ a<\dfrac{13}{16}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{5}{8}\le a<\frac{8}{11}\vee\frac{4}{5}\le a<\frac{13}{16}\Leftrightarrow a\in\left[\frac{5}{8};\frac{8}{11}\right)\bigcup\left[\frac{4}{5};\frac{13}{10}\right).$$

О т в е т : $\left[\dfrac{5}{8};\dfrac{8}{11}\right)\bigcup\left[\dfrac{4}{5};\dfrac{13}{10}\right).$

П р и м е р 11. [2]. Найти все значения a, при которых в области определения функции

$$y=\log_{19+a}\left(\ln\frac{18x+a}{a-2x}\right)$$

содержится отрезок длины 6, состоящий из отрицательных чисел.

Р е ш е н и е . Отметим сначала возможные значения параметра a. Так как основание логарифма, по определению, должно быть положительным и не равным единице, то параметр a должен удовлетворять условиям: $19+a>0$ и $19+a\neq 1,$ откуда следует, что $a>-19$ и $a\neq -18$. Кроме того, при $a=0$ выражение, стоящее под знаком внутреннего логарифма отрицательно, чего не может быть. Следовательно, $a\neq 0$. В итоге приходим к выводу, что допустимые значения параметра a должны удовлетворять условию:

$$a\in(-19;-18)\cup(-18;\ 0)\cup(0;+\infty). \tag{26}$$

Далее, очевидно, что область определения $D(y)$ данной функции представляет собой множество решений неравенства

$$\ln\frac{18x+a}{a-2x}>0. \tag{27}$$

Так как основание натурального логарифма число $e>1,$ то $\ln$ и $\ln 1=0$. Следовательно,

$$(27)\Leftrightarrow\frac{18x+a}{a-2x}>1\Leftrightarrow\frac{18x+a-a+2x}{a-2x}>0\Leftrightarrow\frac{20x}{-2\cdot\left(x-\dfrac{a}{2}\right)}>0\Leftrightarrow x\left(x-\frac{a}{2}\right)<0.$$

Если $a>0,$ то последнее неравенство равносильно двойному неравенству $0<x<\dfrac{a}{2},$ т.е. в этом случае $D(y)=\left(0;\dfrac{a}{2}\right),$ что не подходит по условию задачи, так как $D(y)$ содержит только положительные числа.

Если $a<0$ и выполняется условие (26), то $D(y)=\left(\dfrac{a}{2};0\right).$ Выясним теперь при каких a в $D(y)$ содержится отрезок длины 6.

Пусть $-18<a<0.$ Тогда $-9<\dfrac{a}{2}<0$ и чтобы интервал $\left(\dfrac{a}{2};0\right)$ содержал отрезок длины 6 достаточно, чтобы длина этого интервала $0-\dfrac{a}{2}$ была больше 6, т.е. чтобы выполнялось неравенство: $-\dfrac{a}{2}>6\Leftrightarrow -a>12\Leftrightarrow a<-12.$ С учетом условия (26) теперь ясен

О т в е т : $a\in(-19;-18)\cup(-18;-12).$

П р и м е р 12 [2]. Найдите все значения параметра a, для которых существует такое число b, что функция

$$y=\log_{a^2+1}\left(x^2-2ax+4b+6ab-b^2\right)$$

определена для всех действительных значений x.

Р е ш е н и е . Сразу отметим, что $a\neq 0,$ так как основание логарифма, по определению, положительно и не равно 1. Далее, очевидно, что данная функция будет определена на всем **R** тогда и только тогда, когда неравенство

$$x^2-2ax+4b+6ab-b^2>0$$

справедливо для всех $x\in\mathbf{R}$. Но это возможно тогда и только тогда, когда $\dfrac{D}{4}<0,$ где D – дискриминант квадратного трехчлена, т.е. когда справедливо неравенство

$$a^2+b^2-6ab-4b<0. \tag{28}$$

Вчитавшись ещё раз внимательно в текст задачи, можно понять, что на неравенство (28) следует смотреть, как на квадратное неравенство относительно b. Тогда разумно переписать его в следующей форме:

$$b^2 - 2(3a+2)b + a^2 < 0.$$

Но последнее неравенство будет иметь решения тогда и только тогда, когда его четверть дискриминанта будет больше нуля, т.е. когда

$$(3a+2)^2 - a^2 > 0 \Leftrightarrow (a+1)\cdot\left(a+\frac{1}{2}\right) > 0 \Leftrightarrow a < -1 \vee a > -\frac{1}{2}.$$

Вспомнив, что $a \neq 0,$ запишем

О т в е т : $a \in (-\infty;-1) \bigcup \left(-\frac{1}{2};0\right) \bigcup (0;+\infty).$

П р и м е р 13 [3]. Найти все значения параметра a, при которых множество D_a решений неравенства

$$x^2 - (a+6)|x| + 6a \le 0 \tag{29}$$

содержит все члены последовательности вида: $a_n = -6 + b_n$, где (b_n) – какая-то бесконечно убывающая геометрическая прогрессия с первым членом, равным 7,5 и положительным знаменателем.

Р е ш е н и е . В силу определения геометрической прогрессии для любого натурального числа n справедливо равенство: $b_n = 7{,}5q^{n-1}$, где знаменатель прогрессии q удовлетворяет условию: $0 < q < 1$. Так как $b_1 = 7{,}5;$ $b_n = 7{,}5 \cdot q^{n-1} < 7{,}5$ при всех $n > 1$, то $a_1 = -6 + 7{,}5 = 1{,}5$ и $a_n = -6 + 7{,}5 \cdot q^{n-1} < 1{,}5$ при всех $n > 1$, т.е. $a_n \le 1{,}5$ при всех $n \ge 1$. Поэтому задача сводится к тому, чтобы найти все значения a, при которых $a_n \in D_a$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

Так как $x^2 = |x|^2$, то неравенство (29) равносильно неравенству $|x|^2 - (a+6)|x| + 6a \le 0,$ которое по теореме, обратной теореме Виета, равносильно неравенству

$$(|x|-a)(|x|-6) \le 0, \tag{29$'$}$$

из которого видно, что числа 0 и 6 являются «особыми» значениями параметра a. При этом:

1) если $a \le 0$, то $|x| - a \ge 0$ и $(29') \Leftrightarrow |x| - 6 \le 0 \Leftrightarrow -6 \le x \le 6.$ Следовательно, в этом случае $D_a = [-6;6]$ и $a_n \in D_a$, так как $0 < a_n \le 1{,}5$ для всех $n \in \mathbf{N}$.

2) если $0 < a < 6,$ то $(29') \Leftrightarrow a \le |x| \le 6 \Leftrightarrow a \le x \le 6 \vee -6 \le x \le -a,$ т.е. $D_a = [-6;-a] \bigcup [a;6],$ откуда следует, что $a_n \in D_a$ для всех n тогда и только тогда, когда $0 < a \le 1{,}5.$

3) если $a > 6,$ то $(29') \Leftrightarrow 6 < |x| < a \Leftrightarrow 6 < x < a \vee -a < x < -6.$ Значит, в этом случае $a_n \notin D_a$ для всех $n \in \mathbf{N}$, так как $-6 < 1{,}5 < 6.$

Из пунктов 1), 2) и 3) вытекает

О т в е т : $(-\infty;1{,}5].$

П р и м е р 14. Найти все значения параметра a, при которых множество D_a – решений неравенства

$$(x^2 - 3a)(x + 3a - 2) > 0 \tag{30}$$

не содержит отрезок [-1; 0,5].

Р е ш е н и е . Положим $f(x,a) = (x^2 - 3a)(x + 3a - 2)$. Тогда неравенство (30) будет равносильно неравенству

$$f(x,a) > 0. \tag{30$'$}$$

I. Если $a=0$, то $(30')\Leftrightarrow x^2(x-2)>0\Leftrightarrow x\neq 0\wedge x>2\Leftrightarrow x>2.$ Если $a<0$, то $x^2-3a>0$ для всех $x\in\mathbf{R}$. Поэтому $(30')\Leftrightarrow x>2-3a.$ Таким образом, если $a\le 0,$ то $D_a=(2-3a;+\infty),$ где $2-3a\ge 2.$ Следовательно, D_a не содержит отрезок [-1; 0,5] при $a\le 0.$

II. Рассмотрим теперь случай, когда $a>0.$ Тогда $f(x,a)$ можно представить в виде

$$f(x,a)=\left(x+\sqrt{3a}\right)\left(x-\sqrt{3a}\right)\left(x-(2-3a)\right).$$

При этом $f(x,a)=0\Leftrightarrow x\in\left\{-\sqrt{3a};\sqrt{3a};\ 2-3a\right\}.$ Далее неравенство $(30')$ будем решать методом интервалов. Здесь придется рассмотреть несколько случаев в зависимости от взаимного расположения нулей функции f на координатной прямой.

1. Ясно, что $-\sqrt{3a}<\sqrt{3a}$ при любом $a>0.$ Выясним теперь, при каких a выполняется неравенство $\sqrt{3a}<2-3a$. При этом, не оговаривая каждый раз, будем пользоваться теоремой, обратной теореме Виета. Имеем:

$$\sqrt{3a}<2-3a\Leftrightarrow 3a+\sqrt{3a}-2<0\Leftrightarrow\left(\sqrt{3a}\right)^2+\sqrt{3a}-2<0\Leftrightarrow\left(\sqrt{3a}+2\right)\left(\sqrt{3a}-1\right)<0\overset{(a>0)}{\Leftrightarrow}a<\frac{1}{3}.$$

Таким образом, при $0<a<\dfrac{1}{3},$ получим следующий рисунок 4 знаков функции f

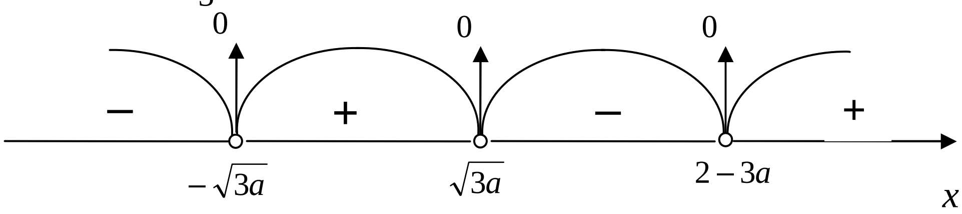


Рис. 4.

из которого видно, что $D_a=\left(-\sqrt{3a};\sqrt{3a}\right)\cup\left(2-3a;+\infty\right).$ Покажем, что в этом случае отрезок [-1; 0,5] не может содержаться в D_a. В самом деле, так как $2-3a>0$, то отрезок [-1; 0,5] не содержится в интервале $(2-3a;+\infty).$ Для того, чтобы доказать, что он не содержится и в интервале $\left(-\sqrt{3a};\ \sqrt{3a}\right)$, достаточно показать, что –1 не принадлежит ему. Допустим, что $-1\in\left(-\sqrt{3a};\ \sqrt{3a}\right).$ Тогда будем иметь:

$$-\sqrt{3a}<-1\Leftrightarrow\sqrt{3a}>1\Leftrightarrow a>\frac{1}{3},$$

что противоречит условию $a<\dfrac{1}{3}.$ Если положить $a=\dfrac{1}{3},$ то $\sqrt{3a}=2-3a=1$ и рисунок 5 знаков f выглядит так:

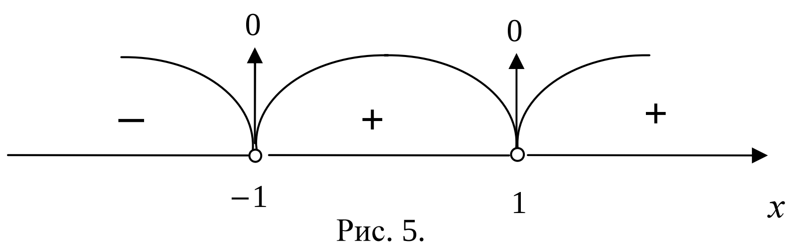


Рис. 5.

из которого видно, что $D_a=(-1;1)\cup(1;+\infty)$ и, что отрезок [-1; 0,5] не содержится в D_a. Таким образом, если $0<a\le\dfrac{1}{3}$, то отрезок [-1; 0,5] не содержится в D_a.

2. Пусть теперь $-\sqrt{3a} < 2-3a \wedge 2-3a < \sqrt{3a}$. Тогда получим:

$$\begin{cases} 3a-\sqrt{3a}-2<0, \\ 3a+\sqrt{3a}-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left(\sqrt{3a}-2\right)\left(\sqrt{3a}+1\right)<0, \\ \left(\sqrt{3a}+2\right)\left(\sqrt{3a}-1\right)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sqrt{3a}<2, \\ \sqrt{3a}>1 \end{cases} \Leftrightarrow \frac{1}{3}<a<\frac{4}{3}.$$

В этом случае из рисунка 6 знаков функции f видно, что $D_a = \left(-\sqrt{3a};\ 2-3a\right)\cup\left(\sqrt{3a};+\infty\right)$.

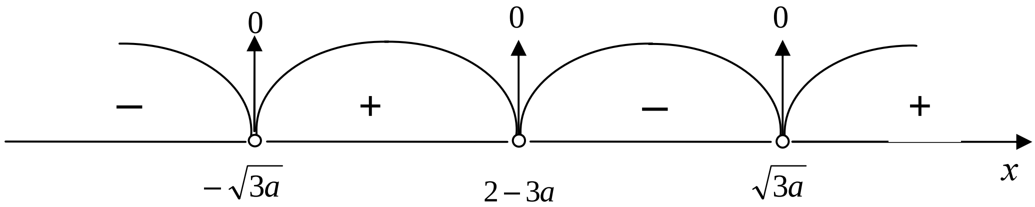


Рис. 6.

При этом отрезок [-1; 0,5] будет содержаться в D_a тогда и только тогда, когда

$$-\sqrt{3a}<-1 \wedge 0{,}5<2-3a \Leftrightarrow \sqrt{3a}>1 \wedge 3a<1{,}5 \Leftrightarrow a>\frac{1}{3} \wedge a<\frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{3}<a<\frac{1}{2}.$$

Следовательно, при $\frac{1}{2}<a<\frac{4}{3}$ отрезок [-1; 0,5] не содержится в D_a.

3. Рассмотрим теперь последний случай, когда $2-3a<-\sqrt{3a}$. Тогда получим:

$$3a-\sqrt{3a}-2>0 \Leftrightarrow \left(\sqrt{3a}-2\right)\left(\sqrt{3a}+1\right)>0 \Leftrightarrow \sqrt{3a}>2 \Leftrightarrow a>\frac{4}{3}.$$

В этом случае из рисунка 7 знаков f получаем, что $D_a = \left(2-3a;-\sqrt{3a}\right)\cup\left(\sqrt{3a};+\infty\right)$. Здесь отрезок [-1; 0,5] может содержаться в D_a в том и только в том случае, когда выполняется условие $2-3a<-1 \wedge 0{,}5<-\sqrt{3a}$, которые невозможны, так как $-\sqrt{3a}<0$.

Подведя итоги исследования теперь нетрудно записать

О т в е т : $a \in \left(-\infty;0\right]\cup\left[\frac{1}{2};+\infty\right)$.

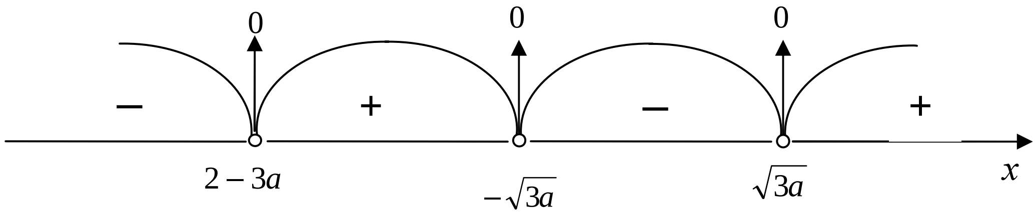


Рис. 7.

Литература

1. Единый государственный экзамен. Математика 2003/2004. Контрольно-измерительные материалы. / Л.С. Денищева, Е.М. Бойченко, Ю.А. Глазков - М.: Просвещение, 2004. - 191 с.
2. *Балаян Э.Н.* Как сдать ЕГЭ по математике на 100 баллов. – Ростов-на-Дону: Феникс, 2004. – 288 с.
3. Математика. Единый государственный экзамен: учебно-тренировочные тесты-2004 / Ф.Ф. Лысенко, А.Б. Неймарк, Б.Е. Давыдов. - Ростов-на-Дону: Сфинкс, 2004. - 176 с.

4. Пособие для подготовки к единому государственному экзамену по математике./Авторский коллектив: Клово А.Г., Калашников В.Ю., Середа А.М., Ляхова Н.Е. и др.- М.: Федеральный центр тестирования, 2005.

Examples of the decision of some problems with the parametres, connected with degree examination

K.S. Mamiy

In work the samples of the decision of some algebraic problems with parametres, containing in some manuals devoted degree examination are stated.

