О ФИЛОСОФСКО-МЕТОДОЛОГИЧЕСКОЙ НАПРАВЛЕННОСТИ ПРЕПОДАВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АНАЛИЗА

С.М. Шаова

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В данной статье рассматриваются возможности курса математического анализа в формировании научного мировоззрения студентов. Приводятся некоторые суждения о методике ознакомления студентов с философско-методологическими положениями математики в процессе преподавания математического анализа.

Введение

Формирование научного мировоззрения осуществляется на протяжении всей сознательной жизни человека. Оно протекает особенно интенсивно в годы учебы. Каждая дисциплина должна вносить в решение этой проблемы свой вклад. Существенная роль в формировании научного мировоззрения принадлежит математике. Важной составной частью мировоззрения являются правильные представления о происхождении научных понятий и теорий, о взаимоотношении науки и практики.

Вследствие специфических особенностей математической науки, а именно ее абстрактности и умозрительности, материал лекции, как правило, излагается строго логически, формальным языком. При таком изложении математической теории процесс возникновения и развития понятий оказывается скрытым от изучающего, вследствие чего вводимые понятия кажутся искусственными и оторванными от жизненной практики.

Приведем высказывания некоторых математиков об особенностях преподавания математических дисциплин в ВУЗах.

Профессор МГУ В.Н. Чубариков в статье [9], посвященной особенностям преподавания математического анализа, пишет: «Источником основных понятий математического анализа являются во многом представления о простейших свойствах геометрических объектов в реальном пространстве. Важным моментом в преподавании курсов математического анализа является тенденция к переходу от излишней абстрактности изложения к его содержательности».

А.А. Столяр указывает на диалектический аспект математического знания: «Преподавание математики не должно сводиться к изложению одной только формальной логики науки. Только доказательство каждой отдельной теоремы ведется по правилам формальной логики. Выбор направления исследования и создание новых теорий определяется в математике явлениями и процессами действительности и внутренними потребностями самой математики. И вот истинное обучение и должно объяснить учащимся этот диалектический процесс возникновения науки по законам диалектической логики. Иными словами, преподавание математики не может не касаться проблем развития понятий и теорий математики, борьбы противоположностей в их тенденциях, случаев перехода количественных характеристик в качественные и т. д.».

Вот что пишет К.А. Рыбников о значении истории математики в выработке научного мировоззрения: «История показывает, что главным, определяющим в развитии даже такой абстрактной науки, как математика, являются запросы материальной действительности. Абстрактность предмета лишь затушевывает происхождение (зачастую сложное, многостепенное, опосредованное) всех понятий математики из материальной действительности, но ни в коем случае не отменяет его. История показывает, что запас количественных отношений и пространственных форм, изучаемых математикой, непрерывно расширяется в неразрывной связи с запросами техники и естествознания, наполняя все более богатым содержанием общее определение математики» [6].

Из сказанного выше следует, что процесс преподавания математики и, в частности, математического анализа, требует сочетания формальной теории с рассмотрением вопросов истории, методологии и философии математики. В этом случае курс лекций будет не просто набором логически следующих друг за другом определений и теорем, а будет приобщать студентов к идейному богатству математики,

© С.М. Шаова

ее общим идеям, которые лежат в основе теорий. Студент получит ответы на следующие важные, формирующие его мировоззрение, вопросы:

Что изучает математика?

Как возникают и развиваются ее понятия и теории?

В чем смысл высокой абстрактности математики?

Каково отношение математики к действительности? и т. д.

Изложение философско-методологических проблем в курсе математического анализа связано в основном с рассмотрением таких вопросов, как возникновение основных понятий анализа, теорий и их приложений. При этом могут быть рассмотрены (более или менее полно) следующие философско-методологические положения математики:

1) основные этапы развития математики (переход от математики постоянных величин к математике переменных величин);
2) характерные особенности математики (абстрактность);
3) основные закономерности развития математики (например, обобщение в математике);
4) природа математических абстракций;
5) виды абстрагирования в математике;
6) математическое моделирование;
7) роль практики в математике, внутренние и внешние факторы развития математики и их взаимосвязь;
8) проблемы обоснования математики;
9) диалектическое развитие понятий и теорий математики.

В процессе преподавания математического анализа весь методологический аспект курса должен быть изложен при изучении тех вопросов анализа, где они могут быть раскрыты наиболее полно, и рассматриваться на всем протяжении курса в прямой логической связи с изучаемым материалом. Излагать методологические положения можно, в основном, во вступительных и заключительных лекциях к рассматриваемой теме или целому разделу курса.

Уже вводная лекция к курсу математического анализа несет большую мировоззренческую нагрузку. Основная ее цель показать, что математический анализ возник из потребностей практики и методы его служат для изучения окружающей действительности. Очень удачным для использования во вводной лекции является материал, приводимый в [4]. Здесь автор сначала показывает, что важнейшими и основными понятиями естествознания, являются время, скорость, ускорение, траектория движущейся частицы, масса, плотность, а затем убедительно показывает, что именно методы математического анализа как раз и служат для изучения этих важнейших понятий.

Кроме того, во вводной лекции должны найти отражение и такие методологические вопросы, как основные этапы развития математики, а именно, переход от математики постоянных величин к математике переменных величин, а также роль практики в развитии математики [2,3].

Заключительные лекции в конце темы или раздела дают больше возможностей (чем вводные лекции) для изложения методологических положений, так как в этих положениях будут фигурировать понятия, уже знакомые студентам и осознанные ими с достаточной отчетливостью.

§1. О некоторых принципах формирования мировоззрения студентов

В процессе формирования мировоззрения студентов средствами математического анализа можно придерживаться следующих принципов:

1) несколько уровней знакомства с философско-методологическими положениями математики;

2) систематичность в осуществлении принципа методологической направленности лекций;

3) упор на историческом рассмотрении всех проблем.

1. Суть первого положения состоит в следующем. На младших курсах студенты не всегда способны глубоко понять суть философских проблем математики, так как еще не располагают достаточными знаниями, как по философии, так и по математике. Сама структура построения курса математического анализа позволяет нам учесть это. Дело в том, что с основными понятиями математического анализа мы встречаемся при изучении разных его разделов, постепенно обобщая их. Поэтому при первой встрече с тем или иным понятием следует лишь коснуться философской стороны вопросов, касающихся этого понятия. При повторной встрече уже можно рассмотреть более сложные методологические положения, связанные с ним.

 © 2009 Физическое Общество РА

Например, с понятием «интеграл» студенты впервые встречаются на первом курсе. Понятие интеграла возникло в связи с необходимостью решения таких практических задач, как вычисление площадей плоских фигур, объемов тел, работы переменной силы и многих других задач практического содержания. С изложения таких задач и следует начинать знакомство студентов с понятием «интеграл». В связи с этим понятием можно было бы рассмотреть вопрос о том, что основные, исходные понятия математического анализа возникли из практики.

Основная идея метода интегрального исчисления состоит в разложении некоторой величины на бесконечно большое число бесконечно малых слагаемых. В этом методе в абстрактной форме отражена реальная возможность резать тела на тонкие слои.

Итак, история возникновения и развития интеграла убеждает нас в том, что не только основные понятия математики, но и основные методы возникли из практической деятельности людей.

На первом этапе развития интегрального исчисления задачи решались прямым вычислением интеграла как предела суммы, что приводило к громоздким вычислениям. При этом каждая вновь возникающая задача решалась своими специальными методами. Только после установления связи между дифференцированием и интегрированием стало возможным создание общих методов интегрального исчисления.

Таким образом, история развития интегрального исчисления позволяет также проиллюстрировать одну из закономерностей развития математики, которая состоит в том, что развитие математики происходит в направлении создания все более общих методов, которые позволяют единообразно решать целые классы задач.

Далее студенты изучают несобственные интегралы, двойные, криволинейные, поверхностные интегралы. Можно опять указать на происхождение этих понятий из реальной действительности, на роль практики в развитии математики. Затем рассмотреть другие методологические положения, например: роль метода обобщения в математике, математическое моделирование реальных процессов.

Действительно, рассматриваемые интегралы являются обобщением определенного интеграла. Поэтому следует отметить, что обобщение является одним из основных методов получения новых знаний в математике.

В заключительной лекции по данной теме можно дать общую схему геометрических и физических приложений интеграла, показывая, как математика изучает действительность с помощью построения моделей изучаемых явлений. Поднимаясь на более высокую ступень абстракции, можно ответить на вопрос: «какие же общие черты перечисленных выше задач геометрии и физики обусловливают возможность аналитически одинаково решать эти задачи, используя во всех случаях именно интеграл в качестве орудия, логически определяющего искомую величину и вместе с тем дающего ей количественную оценку» [8].

Таким образом, с ростом математического и философского уровня подготовки студентов будет расти и уровень понимания философских проблем математики.

2. Систематичность в осуществлении принципа методологической направленности лекций состоит в том, что каждый из основных философско-методологических вопросов математики следует рассматривать неоднократно на протяжении всего периода изучения математического анализа, закрепляя их в сознании студентов.

Чтобы убедить студентов, что основные понятия математики не есть формальные построения, а извлечены из действительного мира, следует каждый раз, рассматривая основные понятия анализа, говорить о природе этих математических абстракций. Например, показывая, что функция отражает в обобщенной, абстрактной форме разнообразные зависимости между реальными величинами, производная является отражением такого свойства реальных предметов как скорость движения, определенный интеграл – копия площадей и объемов зримых объектов и т. д., мы убеждаем студентов в том, что основные понятия анализа отражают реальные количественные отношения.

Или, например, на протяжении всего курса следует отмечать важную роль абстракции отождествления в образовании фундаментальных понятий математики. Суть ее состоит в отвлечении от несходных свойств отдельных объектов и в одновременном выделении их одинаковых, общих свойств, что позволяет установить между объектами отношение типа равенства и говорить об одинаковых предметах как об одном и том же объекте. Абстракция отождествления участвует в образовании таких понятий анализа как функция, производная функции, определенный интеграл, двойной и криволинейный интегралы и др.

Приведем два примера образования понятий анализа с помощью абстракции отождествления, понятия производной функции и метрического пространства.

 © 2009 Физическое Общество РА

Прежде чем дать определение производной следует рассмотреть соответствующие задачи из физики и геометрии и обратить внимание на то, что в результате мы приходим к необходимости вычисления пределов определенного вида. Например, чтобы найти скорость v прямолинейного движения, с законом $S = f(t)$, в данный момент времени t_0, надо вычислить

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle S}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{f(t_0 + \triangle t) - f(t_0)}{\triangle t}.$$

Или, чтобы найти в момент времени t_0 силу тока, если известна функция $Q = f(t)$, выражающая количество электричества, прошедшее через фиксированное сечение проводника за время t, надо вычислить

$$\lim_{\triangle t \to 0} \frac{\triangle Q}{\triangle t} = \lim_{\triangle t \to 0} \frac{f(t_0 + \triangle t) - f(t_0)}{\triangle t}.$$

И многие другие важные задачи (например, о плотности неравномерно распределенной массы, о скорости химической реакции и др.) приводят к необходимости рассмотрения пределов подобного вида. Отвлекаясь от конкретной качественной природы переменных, входящих в эти пределы, мы видим, что во всех случаях надо вычислять предел отношения приращения некоторой функции к вызвавшему его приращению аргумента, когда последнее стремится к нулю. В этом смысле все эти пределы можно отождествлять и считать одним математическим объектом – производной функции.

В разделе «функции нескольких переменных» изучается понятие метрического пространства. Существуют пространства, элементами которых являются конкретные математические объекты, например, действительные числа, непрерывные функции, упорядоченные наборы из n чисел. В каждом из этих пространств определим функцию $\rho(x, y)$, где x, y - элементы рассматриваемого пространства, соответственно равную

$$|x - y|, \quad \max_{t \in [a,b]} |x(t) - y(t)|, \quad \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}.$$

Оказывается, что функция $\rho(x, y)$ в этих различных пространствах обладает одними и теми же свойствами. Отвлекаясь от конкретной качественной природы элементов, входящих в эти пространства, можно мысленно отождествить их и говорить о них как об одном и том же математическом объекте – метрическом пространстве.

3. Рассмотрение философско-методологических проблем математики невозможно без обращения к истории математики. История математики дает богатейший материал для понимания того, как складывались математические методы познания мира, развивались математические теории, как наполнялись новым содержанием основные, исходные понятия математики. Поэтому при рассмотрении вопросов возникновения и развития понятий и теорий математики нужен исторический подход.

§2. О формировании мировоззрения студентов при изучении понятия функции

В процессе изучения понятия функции могут быть рассмотрены следующие философско-методологические положения математики:

основные этапы развития математики (переход от математики постоянных величин к математике переменных величин);

характерные особенности математики (абстрактность);

основные закономерности развития математики (например, обобщение в математике);

природа математических абстракций;

виды абстрагирования в математике (абстракция отождествления);

роль практики в математике, внутренние и внешние факторы развития математики и их взаимосвязь;

диалектическое развитие понятий и теорий математики.

Приведем некоторые методические рекомендации о месторасположении данных вопросов в лекционном курсе и об их содержании.

© 2009 Физическое Общество РА

1. Методологией современных наук неизбежно становится диалектика, так как они все глубже изучают свои объекты в их развитии. В диалектике все проблемы приобретают исторический характер. Поэтому для правильного рассмотрения вопроса о развитии понятия функции нужен исторический подход.

В [11] А.П. Юшкевич отмечает следующие этапы развития функции:

1) древность, когда понятие функциональной зависимости неявно содержится в простейших правилах измерения фигур, в первых таблицах сложения, умножения, деления, в простейших законах физики;

2) средневековье, с XIII или XIV в., когда понятия переменного аргумента и его функции впервые были явно выражены в геометрической или механической форме;

3) конец XVI в. и последующие двести с лишним лет, когда доминирующим становится аналитическое выражение функции;

4) середина XIX в., когда понятие функции освобождается от уз аналитического выражения, главный упор в новом общем определении функции делается на идею соответствия.

Основными из этих этапов являются третий и четвертый, поэтому остановимся на рассмотрении этих этапов.

В развитии учения о функциях большое значение имели как внутриматематические предпосылки, так и внешние факторы.

К внутриматематическим предпосылкам можно отнести возникновение буквенной символической алгебры. Оно подготовило почву для введения понятия о функции как аналитического выражения.

Среди внешних факторов следует подчеркнуть развитие механики и в ней новой отрасли - динамики, небесной механики, что привело к необходимости изучения криволинейного и неравномерного движения. Эти разделы физики доставляли математике для исследования большое число разнообразных зависимостей и кривых.

В XVII веке, прилагая новую алгебру к геометрии кривых линий, Ферма и Декарт, независимо друг от друга открыли аналитический способ задания функций. Р. Декарт писал в «Геометрии», что можно вычислять значения одной из переменных величин по данным значениям другой при помощи уравнения кривой (формулы).

Определение функции, свободное от геометрических идей, впервые дано в 1718 г. И. Бернулли: «функцией переменной величины здесь называется количество, составленное каким угодно способом из этой переменной величины и постоянных» [10].

Дальнейшее развитие понятие функции получило в трудах Эйлера. Эйлер заменил в определении функции, данном И. Бернулли слово «количество» на «аналитическое выражение». Под аналитическим выражением понималось выражение, которое можно получить, связывая элементарные функции посредством сложения, вычитания, умножения и деления, возведения в степень и извлечения корня, решения алгебраических уравнений и интегрирования. Такой подход к определению функции, когда функция отождествлялась с аналитическим выражением, господствовал в математике в XVIII веке. Аналитические выражения, формулы явились превосходным орудием исследования свойств функции. Как отмечает А.П. Юшкевич: «Именно аналитический способ задания функции произвел революцию в математике и естествознании и благодаря необыкновенной эффективности позволил понятию функции стать центральным во всех точных науках» [11]. Довольно долго для решения задач, поставляемых математике естествознанием, была достаточной общепринятая тогда трактовка понятия функции.

Первой существенной задачей, в которой математикам пришлось столкнуться с узостью этой трактовки, была задача о плоских колебаниях струны. Задача состоит в следующем. Упругой струне, закрепленной в двух точках оси абсцисс $x=0$ и $x=l$, придают некоторую первоначальную форму и затем отпускают без начальной скорости. Струна начинает колебаться, требуется определить форму струны в любой последующий момент времени. Это означает, что надо найти функцию $u(t,x)$ - отклонение точки x струны в момент времени t. Эта функция является решением уравнения в частных производных

$$\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial t^2}=\frac{\partial^2 u(t,x)}{\partial x^2}$$

при начальных условиях

 © 2009 Физическое Общество РА

$$u(0,x)=u_0(x), \qquad \frac{\partial u(0,x)}{\partial t}=0.$$

Решение уравнения можно получить по формуле

$$u(t,x)=\frac{u_0(x+t)+u_0(x-t)}{2} \quad (0\le x\le l,\ t\ge 0),$$

то есть решение $u(t,x)$ выражается через $u_0(x)$ - начальную форму струны.

Но, $u_0(x)$ - произвольная функция. Ее график может представлять, например, ломаную. Так как функция отождествлялась с аналитическим выражением, то возникал вопрос, а может ли ломаная определяться одним аналитическим выражением. Эйлер считал, что ломаная, состоящая из двух прямых отрезков, непредставима одним аналитическим выражением. Возникал и другой вопрос: всякое ли аналитическое выражение изображается какой-то кривой. По поводу того, что же есть произвольная функция – «произвольное аналитическое выражение» или «произвольно начерченная кривая» - возникла многолетняя дискуссия между крупнейшими математиками Эйлером, Даламбером и др. Спор между математиками был разрешен после создания Фурье теории тригонометрических рядов.

После изучения темы «ряды Фурье» следует обратить внимание студентов на роль идей Фурье в создании классического определения функции, так как именно появление тригонометрических рядов Фурье привело математиков к осознанию узости существующей тогда трактовки функции.

Для пояснения этого, можно рассмотреть две функции

$$f_1(x)=x, \qquad f_2(x)=\begin{cases}0, & -\pi\le x\le 0,\\ x, & 0\le x\le \pi.\end{cases}$$

Эти функции на отрезке $[-\pi,\pi]$ разлагаются в соответствующие тригонометрические ряды, то есть они представимы на отрезке $[-\pi,\pi]$ в виде аналитических выражений

$$f_1(x)=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{\sin nx}{n},$$

$$f_2(x)=\frac{\pi}{4}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n-1}{\pi n^2}\cos nx+\frac{(-1)^{n-1}}{n}\sin nx.$$

Из результатов, полученных для первой функции, видно, что два различных аналитических выражения могут давать одинаковые значения на одном участке и различные на другом; из результатов, полученных для второй функции, следует, что ломаная может быть задана единым аналитическим выражением. Эти выводы говорят о том, что понятие функции не следует отождествлять с понятием аналитического выражения.

Итак, работы Фурье убедительно доказывали ,что всякие указания на аналитический характер зависимости между переменными являются лишь тормозом в развитии понятия функции.

После этого математиками было сформулировано общее определение функции, в котором уже отсутствовало указание на аналитический характер зависимости между переменными, а главный упор делался на идею соответствия. Больцано, Лобачевский, Дирихле обобщили эйлерово толкование функции.

В 1817 году Больцано определил функцию как зависимость, заданную любым (известным или неизвестным) законом, лишь бы каждому значению одной из переменных соответствовало определенное значение другой [10].

В 1837 году немецкий математик Дирихле так сформулировал определение понятия функции: « y есть функция переменной x (на отрезке $a\le x\le b$), если каждому значению x (на этом отрезке) соответствует совершенно определенное значение y , причем безразлично, каким образом установлено это соответствие – аналитической формулой, графиком, таблицей либо просто словами» [10]. Примером, соответствующим этому определению, может служить так называемая функция Дирихле:

 © 2009 Физическое Общество РА

$$\chi(x)=\begin{cases}1, & x\in Q,\\ 0, & x\in I.\end{cases}$$

Аналитически ее можно определить и с помощью одной формулы, но она настолько сложна, что не может способствовать изучению свойств функции.

Во второй половине XVIII века после создания теории множеств в понятие функции, помимо идеи соответствия, была включена и идея множества. Функция теперь определяется следующим образом: если каждому элементу x множества X поставлен в соответствие некоторый определенный элемент y множества Y, то говорят, что на множестве X задана функция.

Однако на этом не прекратилось дальнейшее развитие этого понятия. Об обобщениях понятия функции, происшедших, начиная с конца двадцатых годов нашего века, можно найти в статье Г Шилова [10].

В 1930 году в книге Дирака «Основы квантовой механики» впервые была дана теория новых явлений в физике микромира. Дирак ввел новый объект, названный им «дельта - функцией». По определению Дирака «дельта – функция» есть функция $y=\delta(x)$ равная 0 при всех x, кроме $x=0$, а при $x=0$ обращающаяся в бесконечность, причем так, что

$$\int_{-\infty}^{\infty}\delta(x)\,dx=1.$$

Но, с точки зрения классического анализа, функция равная нулю всюду, кроме одной точки, должна иметь и интеграл равный нулю. Таким образом, «дельта – функция» не входила в класс объектов, описываемых классическим определением функции. Следовало создать новое определение функции. Работа по дальнейшему обобщению понятия функции была проделана академиком Л. Соболевым.

2. Рассмотрение этапов становления понятия функции убедит студентов в том, что, как пишет А.Д. Александров «всякое понятие как бы ни казалось оно точно определенным, все - таки подвижно, оно развивается и уточняется с развитием науки» [1].

Почему же математические понятия и теории не являются неподвижными? Математические понятия и теории возникают в результате процесса абстрагирования, который связан с огрублением действительности, отвлечением от ряда обстоятельств. Поэтому основные понятия, аксиомы и утверждения математики представляют приблизительно верное отражение реальных количественных и пространственных форм окружающего мира. С развитием науки и практики рано или поздно будут наблюдаться отклонения результатов теории от реальности. Установившиеся понятия вступают в противоречие с новыми требованиями науки и практики. Разрешение возникших противоречий, замена положений, которые плохо отражают природу вещей на новые, более совершенные, осуществляется по диалектическому закону отрицания. Переход от старой теории к новой должен предполагать устранение некоторых свойств старой, не существенных для новой теории, и сохранение свойств старой теории, существенных для новой теоретической системы. В результате возникает новая математическая модель изучаемого явления. От нее требуется не только объяснения всего того, что дала предшествующая модель, но и выявления еще не известных фактов. Наша задача и состоит в том, чтобы показать студентам, что основные понятия математики развиваются по законам диалектической логики.

Поясним эти общие положения на примере развития понятия функции. Долгое время определение функции, данное Эйлером (как аналитического выражения, которым оно задано) вполне устраивало математиков. Однако Эйлеру и другим математикам того времени становятся известными факты, показывавшие узость этого определения. Например, для решения задач математической физики необходимы функции, которые на различных участках области своего определения состоят «из частей различных непрерывных кривых». Так как Эйлер полагал, что его смешанные кривые аналитически невыразимы, то получалось, что важный и обширный класс функций не подходит под определение Эйлера. Стало ясно, что прежнее определение функции больше не удовлетворяет математику и не пригодно для задач, поставляемых практикой. Математики пришли к необходимости отказаться от прежнего определения функции и расширить его. Так было дано классическое определение функции как соответствия между двумя множествами. Переход от старого понятия функции к новому был осуществлен по закону диалектического отрицания. Действительно, прежнее понятие, как частный случай, входит в новое понятие и в тоже время новое понятие охватывает более широкий круг количественных зависимостей между вели-

 © 2009 Физическое Общество РА

чинами в окружающем нас мире. Определение функции охватило все известные функциональные зависимости, казалось совершенным и общим.

Однако на этом не прекратилось дальнейшее развитие понятия функции. Дираком была открыта «дельта – функция», которая не могла существовать с точки зрения классического анализа. Возникшее противоречие опять разрешается путем расширения смысла понятия функции. Следовало создать новое определение функции, которое включало бы классическое определение как частный случай и в тоже время охватывало такие зависимости как «дельта – функция» и другие.

Академик Л. Соболев открыл класс объектов, удовлетворяющих перечисленным выше требованиям. Они были названы «обобщенными функциями». Шилов Г.Е. пишет: «Определение функции совершенствовалось на протяжении двух с лишним сотен лет. И последняя его форма не означает конца его истории. Под воздействием новых требований, как в самой математике, так и других наук определение функции будет продолжать развиваться» [10].

3. Рассматривая историю развития понятия функции последовательно в разных разделах курса анализа, следует знакомить студентов с некоторыми важными философско–методологическими положениями математики.

3.1. Например, следует обратить внимание студентов, что именно с понятием функции связан один из основных этапов развития математики – переход от математики постоянных величин к математике переменных величин.

3.2 Можно показать роль общественной практики в развитии математики. Общественная практика поставляла математике для исследования различные конкретные функции, а исследование движения породило понятие переменной и функции. Именно практика поставила перед математикой задачи, решение которых приводило к дальнейшему развитию понятия функции. Можно рассмотреть и вопросы о внутренних и внешних источниках развития математики и их взаимосвязи [2,3].

С понятием функции тесно связаны и такие вопросы, как природа математических абстракций, виды абстрагирования, смысл высокой абстрактности математики и широта ее приложений.

3.3 Объект изучения математического анализа – функция –абстрактное понятие, и оно не существует в природе в том смысле как объекты изучения естественных наук. Но, если бы не было объективно существующих зависимостей между реальными величинами, не могло бы возникнуть и понятие функции. Вот почему, пишет академик А. Александров в [1], «если, например, социолог интересуется ростом народонаселения с течением времени, а физик изменением давления газа в связи с изменением температуры, то математик видит здесь только функциональную зависимость числа y от числа x».

Рассмотрим, как с помощью абстракции отождествления можно от установления зависимостей между реальными величинами прийти к абстрактному понятию функции, заданной аналитически.

В результате изучения объективных процессов и явлений, происходящих в природе, получаем, например, всевозможные зависимости между физическими величинами:

$$S=\frac{gt^2}{2},\quad S=vt,\quad W=\frac{mv^2}{2},\quad Q=k\frac{RI^2}{2},\quad F=-kx \qquad \text{и т.д.}$$

По виду аналитического выражения это множество зависимостей можно разбить на классы эквивалентности:

класс А	класс В	и т.д.
$S=\frac{gt^2}{2}$	$S=vt$	
$W=\frac{mv^2}{2}$	$F=-kx$	
$Q=k\frac{RI^2}{2}$ …………	……….	

 © 2009 Физическое Общество РА

Анализируя зависимости, входящие в один и тот же класс и, отвлекаясь от реального смысла входящих в рассмотренные соотношения величин, можно установить то общее свойство, которое присуще всем элементам этого класса. Отождествляя их по этому общему свойству и считая одним математическим объектом, получаем понятие о конкретной функциональной зависимости, например, для класса А - $y=\frac{1}{2}ax^2$, для класса В - $y=kx$ и т.д. На следующем этапе абстрагирования, отвлекаясь от определенного типа связи между величинами, множество конкретных зависимостей можно отнести к одному классу эквивалентности по общему признаку: каждому значению переменной x из некоторого множества X соответствует единственный элемент y из множества Y. Отождествляя их и считая одним математическим объектом, приходим к общему понятию числовой функции, заданной аналитически.

Из сказанного выше следует, что функция имеет происхождение в объективном мире. Она отражает в абстрактной форме разнообразные количественные зависимости между реальными величинами и общефилософскую идею о взаимосвязи явлений действительного мира.

3.4 Хотя первоначальные, исходные понятия математики и представляют глубокие абстракции, связь их с действительностью легко прослеживается. Ранее отмечалось насколько важно показать студентам, что исходные понятия математики складывались на основе обобщения громадного конкретного материала. Но, также важно обратить их внимание и на то, что большинство математических абстракций не являются абстракциями из опытных данных, а возникают внутри самой математики в результате отвлечения от уже сложившихся понятий и теорий. В итоге возникают характерные для математики многоступенчатые абстракции. Такими абстракциями, например, являются понятия функционала и оператора - дальнейшие обобщения понятия функции.

Понятие функции устанавливает соответствие между двумя числовыми множествами X и Y. Отвлечемся от конкретной природы элементов, входящих во множество X (область определения функции), то есть будем считать, что элементами множества X могут быть любые математические объекты (например, точки, линии, поверхности, функции и т.д.). Если каждому элементу $x\in \mathrm{X}$ соответствует определенное число $y\in Y$, то такое соответствие называют функционалом.

Можно пойти и дальше, то есть отвлечься от конкретной природы элементов, входящих в оба множества X и Y. Тогда мы придем к одному из самых общих и абстрактных понятий математики – понятию оператора, как соответствия между множествами любой природы. Например, при рассмотрении интегральных уравнений мы сталкиваемся с выражениями вида

$$g(x)=\int_a^b K(x,y)\,f(y)\,dy.$$

При заданном, так называемом ядре $K(x,y)$, написанное равенство указывает закон, по которому каждой функции f ставится в соответствие другая функция g.

Или, например, пусть X - множество функций, Y - множество производных этих функций, тогда соответствие между ними носит название оператора дифференцирования. Понятия функционала и оператора возникли внутри самой математики и не являются непосредственными абстракциями из действительности. Связь их с действительностью является опосредованной. Действительно, эти понятия – результат дальнейшего логического развития понятия функции, которым в свою очередь математика непосредственно соприкасается с жизнью. Тем не менее, понятие оператора, так же как и понятие функции, отражает объективные свойства действительности. Подтверждением этого является тот факт, что теория операторов представляет собой основной математический аппарат квантовой механики.

Итак, для правильного понимания сущности математических абстракций важно не только видеть в них отражение действительности, но и понимать сложность этого отражения.

3.5 Можно отметить еще одну характерную черту математики – широту приложений, которой она обладает благодаря ее абстрактности.

Дело в том, что во всех математических объектах отражаются свойства не одного какого - -либо объекта, а бесконечного числа разных объектов. Например, как мы видели, одна и та же функция $y=\frac{1}{2}ax^2$ выражает зависимость между разными физическими величинами и в механике, и в элек-

 © 2009 Физическое Общество РА

тричестве и в других областях естествознания. Поэтому и математические результаты, касающиеся этой функции, оказываются полезными в разных областях знания.

Важно убедить студентов в том, что все возрастающая абстрактность математики не означает ее оторванности от реального мира. Интересно провести сравнение современной более абстрактной математики с классической (древнегреческой геометрией и ньютоновским анализом). Классическая математика отражала более поверхностные свойства вещей, которые доступны глазу и другим органам чувств (это скорость, объем, площадь и т.д.). Современная же математика приспособлена для отражения важных свойств вещей, которые недоступны нашим органам чувств (например, движение микрочастиц и т. д.).

Опыт работы показывает, что знакомство студентов с философско-методологическими вопросами математики позволяет студентам намного глубже понять сущность методов математического анализа, формирует у них представления о математике как о живом, развивающемся организме, пробуждает устойчивый интерес к математике и способствует развитию творческих способностей. Поэтому всегда можно выделить некоторые второстепенные вопросы курса, которые можно изложить сокращенно, без ущерба для профессиональной подготовки и, тем самым, высвободить время для изложения философско-методологических положений математики.

Литература

1. *Александров А.Д.* Математика // Философская энциклопедия. Т.3. – М.: Советская энциклопедия, 1964. – 374 с.
2. *Киселева Н.А.* Математика и действительность. – М.: Изд-во МГУ, 1967. – 122 с.
3. *Молодший В.Н.* Очерки по философским вопросам математики. – М.: Просвещение, 1969. – 303 с.
4. *Потоцкий М.В.* Что изучается в курсе математического анализа? - М.: Просвещение, 1965. - 88с.
5. *Рыбников К.А.* Возникновение и развитие математической науки: Кн. для учителя. - М.: Просвещение, 1987. – 159 с.
6. *Рыбников К.А.* История математики: Учебник. - М.: Изд-во МГУ, 1994. - 496 с.
7. *Рузавин Г.И.* О природе математического знания. (Очерки по методологии математики). - М.: Мысль, 1968. - 302 с.
8. *Хинчин А.Я.* Восемь лекций по математическому анализу. – М.: Наука, 1977. - 280 с.
9. *Чубариков В.Н., Архипов Г.И.* Об особенностях преподавания математического анализа в вузах. / Материалы междунар. научно-метод. конф. «Современные проблемы преподавания математики и информатики», посвященной 100-летию академика С.М. Никольского (4-8 мая 2005 г.). - М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2005. - 178 с.
10. *Шилов Г.Е.* Что такое функция? // Математика в школе. - 1964. - №1. – С. 7-24.
11. *Юшкевич А.П.* Развитие понятия функции. – М.: Ист.-матем. исслед. - Вып. XVII, 1966. – С. 123-150.

On the philosophical and methodological orientation of the teaching of mathematical analysis

S.M. Shaova

This article discusses the possible course of mathematical analysis in the formation of a scientific outlook of students. We give some opinions about the method familiarize students with the philosophical and methodological provisions of mathematics in the teaching of mathematical analysis.

 © 2009 Физическое Общество РА