

К ВОПРОСУ О ГЕНЕРАЦИИ ГАРМОНИК ВЫСОКОГО ПОРЯДКА

Н.Е. Коваль, В.Б. Тлячев

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В рамках метода Левенштейна получен спектр излучения атома водорода в сильном лазерном поле.

За последние полвека в лазерной технике произошли существенные изменения, главными из которых являются достижение высоких интенсивностей излучения порядка 10^{18} Вт/см² и генерация ультракоротких импульсов длительностью порядка фемтосекунд¹. Более того, в настоящее время говорят уже об аттосекундах² и появлении аттосекундной физики³. Такие значения лазерного поля значительно превышают напряженность электрического поля в атоме, а частоты соответствуют частоте вращения электронов вокруг атомных ядер. Достиженные результаты инициировали поток экспериментальных и теоретических работ по исследованию взаимодействия такого излучения с атомно-молекулярными системами, что привело не только к открытию новых физических явлений, таких как многофотонная и надпороговая ионизация (МФИ/НПИ), многофотонная и надпороговая диссоциация молекул, ГГВП, ослабление и усиление химической связи, прямая двойная ионизация, кулоновский взрыв, когерентный контроль физических и химических процессов и др., но и их активному использованию.

Пионерские теоретические исследования были сделаны задолго до появления современных экспериментальных возможностей. К ним нужно отнести работы Coppert Mayer [4] и Л.В. Келдыша [5].

В настоящее время исследования в области взаимодействия интенсивного лазерного излучения с веществом привели к созданию теории многофотонных процессов. Более подробно историю развития и полное описание теории можно получить из учебной и монографической литературы [7–11].

Большой интерес к исследованиям процесса генерации гармоник высокого порядка (ГГВП) обусловлен возможностью их использования для генерации сверхкоротких фемтосекундных лазерных импульсов, а также перспективами создания источников когерентного рентгеновского излучения.

Эффект ГВП был открыт более 30 лет назад, когда на практике стали использовать мощные источники лазерного излучения гигаваттного диапазона пико и субнаносекундных импульсов [18].

Достаточно полный и хороший обзор развития теории ГГВП дан в работах [13].

Упрощенно модель процесса генерации ГВП можно представить следующим образом: при облучении атома интенсивным лазерным излучением происходит туннелирование электрона через потенциальный барьер. В постоянном поле далее электрон стал бы удаляться от атома на бесконечность. Но, в силу того, что поле периодичное, то выбитый электрон снова возвращается в атом и рекомбинируя излучает гармонику высокого порядка. Причем ионизация происходит в течение одного периода лазерного поля с малой вероятностью и потому повторяется на многих периодах как квазипериодический процесс.

Рассмотрим решение уравнения Шредингера, зависящего от времени в приближении сильного поля. Решение будем проводить опираясь на метод, предложенный М. Левенштейном [16] (см. также [1] стр. 99-106). Данный метод предполагает следующие упрощающие предположения:

¹В лабораториях, как правило, используют лазеры с интенсивностью $3,51 \cdot 10^{18}$ Вт/см², что соответствует напряженности электрического поля волны $5,14 \cdot 10^{11}$ В/м, Сравните у солнечного света, соответственно – 0,13 Вт/см², 1000 В/м. [1]

²1 фемтосекунда (1 fs) = 10^{-15} с, 1 аттосекунда (1 as) = 10^{-18} с.

³По этому поводу смотри Corkum P.B., Krausz F. Attosecond science // Nature Phys. – 2007. – Vol. 3. – с 6. – P. 381Ц387. Krausz F., Ivanov M. Attosecond physics // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81. – с 1. – P. 163Ц234.

1) В приближении сильного поля в качестве дискретных состояний мы учитываем только одно состояние – начальное, а непрерывный спектр ионизированного электрона описывается на базе из плоских волн;

2) Переходами в непрерывном спектре пренебрегаем, так как их вклад в генерацию ГВП очень мал (10^{-10} – 10^{-12});

3) Рассматриваем взаимодействие электронов с электромагнитным полем в калибровке длины, то есть оператор действия ЭМ поля на атом имеет вид $zE \cos \omega t$;

4) Здесь также верны все приближения: однородность и стационарность поля лазера, незначительность влияния поля ядра на электрон в ионизированном состоянии;

5) Спектр гармоник рассчитывается в приближении, что атомы находятся далеко друг от друга, то есть каждый атом не влияет на излучение других атомов. Фактически рассматривается один атом, а не ансамбль;

6) Расчет мощности гармоник происходит путем вычисления математического ожидания координаты $\langle \Psi(t) | z | \Psi(t) \rangle$ с последующим выполнением Фурье-преобразования.

Запишем уравнение Шредингера зависящее от времени:

$$i \frac{\partial \Psi(\mathbf{r}t)}{\partial t} = \left[-\frac{1}{2} \nabla^2 + v(\mathbf{r}) + zE \cos(\omega t) \right] \Psi(\mathbf{r}t). \quad (1)$$

Согласно приближению 1) метода Левенштейна, будем искать решение этого уравнения в виде:

$$\Psi(\mathbf{r}t) = \exp(iI_p t) \Psi_0(\mathbf{r}) + \exp(iI_p t) \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}), \quad (2)$$

где I_p – потенциал ионизации; $\Psi_0(\mathbf{r})$ – пространственная часть функции основного состояния; $\Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \exp(i\mathbf{p}\mathbf{r})$ – пространственная часть плоской волны; $b(\mathbf{p}t)$ – функция от импульса. Подставив эту функцию в уравнение (1), мы получим выражение

$$\begin{aligned} -I_p \Psi_0(\mathbf{r}) - I_p \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + i \int d^3 \mathbf{p} \frac{\partial b(\mathbf{p}t)}{\partial t} \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \\ = -\frac{1}{2} \nabla^2 \Psi_0(\mathbf{r}) + \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \mathbf{p}^2 \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + v(\mathbf{r}) \Psi_0(\mathbf{r}) + \\ + v(\mathbf{r}) \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + zE \cos(\omega t) \Psi_0(\mathbf{r}) + zE \cos(\omega t) \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (3)$$

Так как Ψ_0 есть основное состояние атома, то

$$-I_p \Psi_0(\mathbf{r}) = H_0 \Psi_0(\mathbf{r}) = \left(-\frac{1}{2} \nabla^2 + v(\mathbf{r}) \right) \Psi_0(\mathbf{r}).$$

Используя последнее уравнение, упростим (3):

$$\begin{aligned} -I_p \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + i \int d^3 \mathbf{p} \frac{\partial b(\mathbf{p}t)}{\partial t} \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) = \frac{1}{2} \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \mathbf{p}^2 \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + \\ + v(\mathbf{r}) \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + zE \cos(\omega t) \Psi_0(\mathbf{r}) + zE \cos(\omega t) \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}). \end{aligned} \quad (4)$$

Далее умножим (4) на $\Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r})$ и проинтегрируем по пространственной координате \mathbf{r} . По определению

$$\int \Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}), \quad \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = b(\mathbf{p}'t),$$

с учетом этого получим:

$$\begin{aligned} -I_p b(\mathbf{p}'t) + i \frac{\partial b(\mathbf{p}'t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}'^2}{2} b(\mathbf{p}'t) + \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \int \Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) v(\mathbf{r}) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} + \\ + E \cos(\omega t) \int \Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) z \Psi_0(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} + E \cos(\omega t) \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \int \Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) z \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \end{aligned} \quad (5)$$

Согласно приближению 2) опустим второе слагаемое справа, соответствующее переходам между состояниями в непрерывном спектре. Тогда

$$-I_p b(\mathbf{p}'t) + i \frac{\partial b(\mathbf{p}'t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}'^2}{2} b(\mathbf{p}'t) + E \cos(\omega t) \int \Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) z \Psi_0(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} + \\ + E \cos(\omega t) \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \int \Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) z \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}; \quad (6)$$

$$-I_p b(\mathbf{p}'t) + i \frac{\partial b(\mathbf{p}'t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}'^2}{2} b(\mathbf{p}'t) + E \cos(\omega t) \int \Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) z \Psi_0(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} + \\ + E \cos(\omega t) \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \int \left(i \frac{\partial}{\partial p'_z} \Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) \right) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r}. \quad (7)$$

Рассмотрим отдельно последнее слагаемое в (7):

$$E \cos(\omega t) \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \int \left(i \frac{\partial}{\partial p_z} \Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) \right) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} = \\ = E \cos(\omega t) \int d^3 \mathbf{p} b(\mathbf{p}t) i \frac{\partial}{\partial p'_z} \delta(\mathbf{p}' - \mathbf{p}) = E \cos(\omega t) \left(i \frac{\partial}{\partial p'_z} b(\mathbf{p}'t) \right).$$

Тогда

$$-I_p b(\mathbf{p}'t) + i \frac{\partial b(\mathbf{p}'t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}'^2}{2} b(\mathbf{p}'t) + E \cos(\omega t) \int \Psi_{\mathbf{p}'}^*(\mathbf{r}) z \Psi_0(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} + E \cos(\omega t) \left(i \frac{\partial}{\partial p'_z} b(\mathbf{p}'t) \right).$$

Или, заменяя \mathbf{p}' на \mathbf{p} (т. к. они равноправны), получим:

$$-I_p b(\mathbf{p}t) + i \frac{\partial b(\mathbf{p}t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}^2}{2} b(\mathbf{p}t) + E \cos(\omega t) \int \Psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) z \Psi_0(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r} + E \cos(\omega t) \left(i \frac{\partial}{\partial p_z} b(\mathbf{p}t) \right). \quad (8)$$

Введем обозначение:

$$d_z(\mathbf{p}) = \int \Psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) z \Psi_0(\mathbf{r}) d^3 \mathbf{r},$$

тогда

$$-I_p b(\mathbf{p}t) + i \frac{\partial b(\mathbf{p}t)}{\partial t} = \frac{\mathbf{p}^2}{2} b(\mathbf{p}t) + E \cos(\omega t) d_z(\mathbf{p}) + E \cos(\omega t) \left(i \frac{\partial b(\mathbf{p}t)}{\partial p_z} \right). \quad (9)$$

Умножим последнее выражение на i :

$$\frac{\partial b(\mathbf{p}t)}{\partial t} = -i \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2} + I_p \right) b(\mathbf{p}t) - i E \cos(\omega t) d_z(\mathbf{p}) + E \cos(\omega t) \frac{\partial b(\mathbf{p}t)}{\partial p_z}, \quad (10)$$

где \mathbf{p} – это вектор, но не оператор. Запишем последнее выражение так, чтобы производные были в левой части:

$$\frac{\partial b(\mathbf{p}t)}{\partial t} - E \cos(\omega t) \frac{\partial b(\mathbf{p}t)}{\partial p_z} = -i \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2} + I_p \right) b(\mathbf{p}t) - i E \cos(\omega t) d_z(\mathbf{p}). \quad (11)$$

Далее перепишем левую часть относительно некоторой новой переменной $s = s(\mathbf{p}t)$:

$$\frac{db(\mathbf{p}t)}{ds} = \frac{\partial b(\mathbf{p}t)}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial s} + \frac{\partial b(\mathbf{p}t)}{\partial p_z} \frac{\partial p_z}{\partial s} = -i \left(\frac{\mathbf{p}^2}{2} + I_p \right) b(\mathbf{p}t) - i E \cos(\omega t) d_z(\mathbf{p}), \quad (12)$$

где, сравнивая (12) с (11), находим:

$$\frac{\partial t}{\partial s} = 1; \quad (13)$$

$$\frac{\partial p_z}{\partial s} = -E \cos(\omega t). \quad (14)$$

Проинтегрируем выражение (13) при условии $t(s=0) = 0$, получим, что $t = s$. Выражение (14) интегрируем при условии $p_z(t=0) = p_0$, получим, что $p_z = A(\omega t) + p_0 \Rightarrow \mathbf{p} = \mathbf{A}(\omega t) + \mathbf{p}_0$. Тогда

$$\frac{db(s)}{ds} + i \left(\frac{(\mathbf{A}(\omega s) + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right) b(s) = -i E \cos(\omega s) d_z(\mathbf{A}(\omega s) + \mathbf{p}_0). \quad (15)$$

Найдем частное решение уравнения (15) с нулевой правой частью

$$\frac{db_{\text{homo}}(s)}{ds} + i \left(\frac{(\mathbf{A}(\omega s) + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right) b_{\text{homo}}(s) = 0. \quad (16)$$

Решение, соответствующее однородному уравнению, имеет вид:

$$b_{\text{homo}}(s) = \exp \left(-i \int_0^s dt' \left[\frac{(\mathbf{A}(\omega t') + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right] \right). \quad (17)$$

Далее найдем общее решение уравнения (15) в виде:

$$b(s) = C(s) b_{\text{homo}}(s). \quad (18)$$

Подставим это решение в уравнение (15), получим:

$$\begin{aligned} \frac{dC(s)}{ds} b_{\text{homo}}(s) + C(s) \frac{d}{ds} \left[\exp \left(-i \int_0^s dt' \left[\frac{(\mathbf{A}(\omega t') + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right] \right) \right] + \\ + i \left(\frac{(\mathbf{A}(\omega s) + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right) b_{\text{homo}}(s) C(s) = -i E \cos(\omega s) d_z(\mathbf{A}(\omega s) + \mathbf{p}_0). \end{aligned} \quad (19)$$

Рассмотрим отдельно второе слагаемое (19):

$$\begin{aligned} C(s) \frac{d}{ds} \left[\exp \left(-i \int_0^s dt' \left[\frac{(\mathbf{A}(\omega t') + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right] \right) \right] = \\ = C(s) b_{\text{homo}}(s) \left(-i \int_0^s d \left[\frac{(\mathbf{A}(\omega t') + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right] \frac{dt'}{ds} \right) = \\ = C(s) b_{\text{homo}}(s) \left(-i \left[\frac{(\mathbf{A}(\omega s) + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right] \right). \end{aligned}$$

Тогда выражение (19) упрощается

$$b_{\text{homo}}(s) \frac{dC(s)}{ds} = -i E \cos(\omega s) d_z(\mathbf{A}(\omega s) + \mathbf{p}_0). \quad (20)$$

Или

$$\frac{dC(s)}{ds} = -i E \cos(\omega s) d_z(\mathbf{A}(\omega s) + \mathbf{p}_0) \exp \left(i \int_0^s dt' \left[\frac{(\mathbf{A}(\omega t') + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right] \right).$$

Решая последнее уравнение, находим:

$$C(s) = -i \int_0^s dt'' E \cos(\omega t'') d_z(\mathbf{A}(\omega t'') + \mathbf{p}_0) \times \exp \left(i \int_0^{t''} dt' \left[\frac{(\mathbf{A}(\omega t') + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right] \right). \quad (21)$$

Подставляя (17) и (21) в (18), получаем:

$$\begin{aligned} b(s) = -i \exp \left(-i \int_0^s dt' \left[\frac{(\mathbf{A}(\omega t') + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right] \right) \times \\ \times \int_0^s dt'' E \cos(\omega t'') d_z(\mathbf{A}(\omega t'') + \mathbf{p}_0) \exp \left(i \int_0^{t''} dt' \left[\frac{(\mathbf{A}(\omega t') + \mathbf{p}_0)^2}{2} + I_p \right] \right). \end{aligned}$$

Или

$$b(\mathbf{p}t) = -i \int_0^t dt'' E \cos(\omega t'') d_z(\mathbf{A}(\omega t'') - \mathbf{A}(\omega t) + \mathbf{p}) \times \\ \times \exp \left(-i \int_{t''}^t dt' \left[\frac{(\mathbf{A}(\omega t') - \mathbf{A}(\omega t) + \mathbf{p})^2}{2} + I_p \right] \right). \quad (22)$$

Вычислим далее математическое ожидание дипольного момента $z(t) = \langle \Psi(t) | z | \Psi(t) \rangle$. Используя выражение (2), получим:

$$z(t) = \int \Psi_0^*(\mathbf{r}) z \Psi_0(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r} + \int d^3\mathbf{r} \Psi_0^*(\mathbf{r}) z \int d^3\mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \Psi_{\mathbf{p}}(\mathbf{r}) + \\ + \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \Psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) z \Psi_0(\mathbf{r}) + \int d^3\mathbf{r} \int d^3\mathbf{p} b(\mathbf{p}t) \Psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) z b(\mathbf{p}t) \Psi_0(\mathbf{r}).$$

С учетом того, что $d_z(\mathbf{p}) = \int \Psi_{\mathbf{p}}^*(\mathbf{r}) z \Psi_0(\mathbf{r}) d^3\mathbf{r}$, получаем:

$$z(t) = \int d^3\mathbf{p} d_z^*(\mathbf{p}) b(\mathbf{p}t) + c.c. \quad (23)$$

Представив канонический импульс в виде $\mathbf{p} = \mathbf{p}_c + \mathbf{A}(\omega t)$ и подставив вместо $b(\mathbf{p}t)$ выражение (22), мы получим для $z(t)$:

$$z(t) = -i \int d^3\mathbf{p} d_z^*(\mathbf{p}_c + \mathbf{A}(\omega t)) \int_0^t dt'' E \cos(\omega t'') d_z(\mathbf{A}(\omega t'') + \mathbf{p}_c) \times \\ \times \exp \left(-i \int_{t''}^t dt' \left[\frac{(\mathbf{A}(\omega t') + \mathbf{p}_c)^2}{2} + I_p \right] \right) + c.c. \quad (24)$$

Представим квазиклассическое действие в виде

$$S(\mathbf{p}, t, t') = \int_{t'}^t dt'' \left[\frac{(\mathbf{p} + \mathbf{A}(\omega t''))^2}{2} + I_p \right],$$

тогда математическое ожидание координаты (в атомной системе единиц координата и дипольный момент эквивалентны) переписется следующим образом:

$$z(t) = -i \int_0^t dt' \int d^3\mathbf{p} d_z^*(\mathbf{p} + \mathbf{A}(\omega t)) E \cos(\omega t') d_z(\mathbf{A}(\omega t') + \mathbf{p}) \times \\ \times \exp(-iS(\mathbf{p}, t, t')) + c.c. \quad (25)$$

Уравнение (25) имеет замечательную физическую интерпретацию как сумма амплитуд вероятности следующего трехфазного процесса: в первой фазе электрон покидает связанное состояние в момент времени t' . Амплитуда вероятности этого процесса есть $E \cos(\omega t') d_z(\mathbf{A}(\omega t') + \mathbf{p})$. Во второй фазе электрон движется в поле электромагнитной волны от момента времени t' до момента t , набирая фазовый множитель $\exp(-iS(\mathbf{p}, t, t'))$, где $S(\mathbf{p}, t, t')$ – квазиклассическое действие. И, наконец, в третьей фазе электрон рекомбинирует в начальное состояние с амплитудой вероятности $d_z^*(\mathbf{p} + \mathbf{A}(\omega t))$ ⁴.

С помощью метода седловой точки⁵ мы получим окончательный вид $z(t)$. Вычислим для начала стационарный импульс из уравнения

$$\nabla_{\mathbf{p}} S(\mathbf{p}, t, t') = 0. \quad (26)$$

⁴Lewenstein, M. Op. cit. - Pg. 2120.

⁵Шапиро, Д.А. Методы математической физики: Часть 1. Уравнения в частных производных, специальные функции, асимптотики, Н., 2004. С. 77 - 90.

В нашем случае, $\mathbf{A}(\omega t) = -\int \mathbf{E}(\omega t) dt \Rightarrow A_z(\omega t) = -\frac{E}{\omega} \sin(\omega t)$. Тогда

$$\begin{aligned} S(p_z, t, t') &= \int_{t'}^t dt'' \left[\frac{p_z^2}{2} + p_z \left(-\frac{E}{\omega} \sin(\omega t'') \right) + \frac{E^2}{2\omega^2} \sin^2(\omega t'') + I_p \right] = \\ &= \frac{p_z^2}{2} (t - t') + \frac{E p_z}{\omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega t')) + \frac{E^2}{2\omega^2} \int_{t'}^t \frac{1 - \cos(2\omega t'')}{2} dt'' + I_p (t - t') = \\ &= \frac{p_z^2}{2} (t - t') + \frac{E p_z}{\omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega t')) + \frac{E^2}{4\omega^2} (t - t') - \frac{E^2}{8\omega^3} \sin(2\omega t) + \\ &\quad + \frac{E^2}{8\omega^3} \sin(2\omega t') + I_p (t - t'). \end{aligned} \quad (27)$$

Из условия $\frac{\partial S}{\partial p_z} = 0$ находим:

$$p_{z \text{ st}} = -\frac{E(\cos(\omega t) - \cos(\omega t'))}{\omega^2(t - t')}. \quad (28)$$

Обозначив $\tau = t - t'$, мы перепишем формулы (27) и (28):

$$p_{z \text{ st}} = -\frac{E(\cos(\omega t) - \cos(\omega(t - \tau)))}{\omega^2 \tau}. \quad (29)$$

$$\begin{aligned} S(p_z, t, \tau) &= \left(\frac{p_z^2}{2} + I_p \right) \tau + \frac{p_z E}{\omega^2} (\cos(\omega t) - \cos(\omega(t - \tau))) + \frac{E^2}{4\omega^2} \tau - \\ &\quad - \frac{E^2}{8\omega^3} \sin(2\omega t) + \frac{E^2}{8\omega^3} \sin(2\omega t - \omega \tau). \end{aligned} \quad (30)$$

Подставив (29) в (30), с учетом пондеромоторной энергии в виде $U_p = \frac{E^2}{4}$, получим выражение для действия:

$$S_{\text{st}}(t, \tau) = (I_p + U_p)\tau - \frac{2U_p}{\omega^2 \tau} (1 - \cos(\omega \tau)) - \frac{U_p}{\omega} \cos(2\omega t - \omega \tau) C(\tau), \quad (31)$$

где

$$C(\tau) = \sin(\omega \tau) - \frac{2}{\omega \tau} (1 - \cos(\omega \tau)).$$

Окончательное выражение для координаты имеет вид:

$$\begin{aligned} z(t) &= -i \int_0^\infty d\tau \left(\frac{\pi}{\epsilon + i\tau/2} \right)^{3/2} d_z^*(p_{z \text{ st}} + A_z(\omega t)) E \cos(\omega(t - \tau)) \times \\ &\quad \times d_z(p_{z \text{ st}} + A_z(\omega(t - \tau))) \exp(-iS_{\text{st}}(t, \tau)) + c.c. \end{aligned} \quad (32)$$

Далее определим мощности гармоник, излучаемых атомом водорода, помещенным в лазерное поле. Для этого найдем Фурье-преобразование для функции $z(t)$ (32). Функцию $d_z(\mathbf{p})$ для атома водорода используем в виде⁶

$$d_z(\mathbf{p}) = i \left(\frac{2^{7/2} (2I_p)^{5/4}}{\pi} \right) \frac{\mathbf{p}}{(\mathbf{p}^2 + 2I_p)^3}.$$

Коэффициент Фурье равен

$$z_\omega = \frac{1}{T} \int_0^T z(t) \exp(-i\omega t) dt,$$

⁶Lewenstein, M. Op. cit. - Pg. 2123.

где T – период лазера.

На рис. 1 изображен график функции $|z_\omega|^2$. По оси абсцисс откладывается частота гармоник в единицах частоты лазера ($\omega = 0.057$ а.е.), а по оси ординат – мощности гармоник в произвольной системе единиц. Интенсивность лазерного поля равна $I = I_0 E^2$, где $I_0 = \frac{E^2}{120\pi} = 0.351 \cdot 10^{17}$ Вт/см², а $E = 0.015$ а. е.. Тогда интенсивность равна $I \approx 8 \cdot 10^{12}$ Вт/см². Длина волны лазерного излучения равна 800 нм.

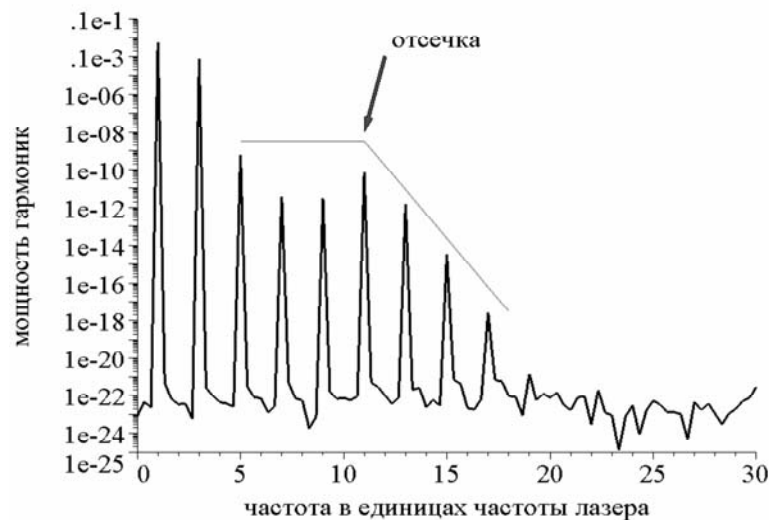


Рис. 1. Спектр гармоник излучения атома водорода, помещенного в лазерное поле.

При генерации гармоник высокого порядка спектр имеет характерное плато, которое заканчивается отсечкой – быстрым убыванием мощности гармоник. Частота отсечки равна

$$\omega_{ots} = I_p + 3.17U_p \quad (33)$$

(в атомных единицах). Используя квазиклассическую картину процесса, мы легко можем понять формулу (33). Максимальная кинетическая энергия электрона при возврате к ядру есть $3.17U_p$, в то время как энергия связи захваченного электрона есть I_p . В случае, если электрон испытывает радиационный захват, он должен излучить этот избыток энергии, равный сумме $I_p + 3.17U_p$.

Список литературы

1. Bauer, D. Theory of intense laser-matter interaction. – Heidelberg: Max-Planck-Institut für Kernphysik, 2006. – 106 p.
2. Грюбеле, М., Зивейл, А.Х. Сверхбыстрая динамика химических реакций // УФН. – 1991. – Т. 161. – № 3. – С. 691-87.
3. Хэнш, Т.В. Страсть к точности // УФН. – 2006. – Т. 176. – № 12. – С. 1368-1380.
4. Goppert-Mayer M. Über Elementarakte mit zwei Quantensprungen // Ann. Phys. – 1931. – Vol. 9. – S. 273-294.
5. Келдыш Л.В. Ионизация атома в поле сильной электромагнитной волны // ЖЭТФ. – 1965. – Т. 20. – С. 1307-1314.
6. Попов, В.С. Фотоионизация атомов: от Эйнштейна до наших дней // Соросовский образовательный журнал. – 1999. – № 3. – С. 103-109.

7. Делоне, Н.Б. Взаимодействие лазерного излучения с веществом: Курс лекций: Учеб. руководство. – М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1989. – 280 с.
8. Делоне, Н.Б. Туннельная и надбарьерная ионизация атомов и ионов в поле лазерного излучения / Н.Б. Делоне, В.П. Крайнов // Успехи физических наук. – 1998. – Том 168. – № 5. – С. 537-538.
9. Делоне, Н.Б., Крайнов, В.П. Нелинейная ионизация атомов лазерным излучением. – М.: Наука. Гл.ред.физ.-мат.лит., 1989. – 320 с.
10. Делоне, Н.Б. Атом в сильном поле лазерного излучения. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2002. – 64 с.
11. Попов, В.С. Туннельная и многофотонная ионизация атомов и ионов в сильном лазерном поле (теория Келдыша) // УФН. – 2004. – Том 174. – № 9. – С. 921-951.
12. Кон, В. Электронная структура вещества – волновые функции и функционалы плотности / В. Кон // Успехи физических наук. – март 2002. – Том 172. – № 3. – С. 340 - 344.
13. Платоненко, В.Т. Генерация гармоник высокого порядка в поле интенсивного лазерного излучения / В.Т. Платоненко, В.В. Стрелков // Квантовая электроника. – 1998. – Том 25, № 7. – С. 582 - 587.
14. Делоне Н.Б., Крайнов В.П., Шепелянский Д.Л. Высоковозбужденный атом в электромагнитном поле // УФН. – 1983. – Том 140. – Вып. 3. – С. 355-392.
15. Шапиро, Д.А. Методы математической физики: Часть 1. Уравнения в частных производных, специальные функции, асимптотики / Д.А. Шапиро. – Новосибирск: Изд-во НГУ, 2004. – 123 с.
16. Lewenstein, M. Theory of high-harmonic generation by low-frequency laser field / M. Lewenstein // Physical Review A. – 1994. – Vol.49. – No 3. – P. 2118-2123.
17. Tong, Xiao-Minand, Chu, Shih-I. Theoretical study of multiple high-order harmonic generation by intense ultrashort pulsed laser fields: A new generalized pseudospectral time-dependent method // Chem. Phys. – 1997. – Vol. 217. – P. 119-130.
18. Li X.F., L’Huillier A., Ferray M., Lompre L.A., Mainfray G. Phys. Rev.A, 39, 5751 (1989).
19. Corkum, P.B., Krausz, F. Attosecond science // Nature Phys. – 2007. – Vol. 3. – № 6. – P. 381-387.
20. Krausz, F., Ivanov, M. Attosecond physics // Rev. Mod. Phys. – 2009. – Vol. 81/ – № 1. – P. 163-234.
21. Сатанин А.М. Введение в теорию функционала плотности. Учебно-методическое пособие. – Нижний Новгород: Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, 2009. – 64 с.
22. McPherson A., Gibson G., Jara H., Johann U., Luk T.S., et all. Studies of multiphoton production of vacuum-ultraviolet radiation in the rare gases. // J. Opt. Soc. Am. B, 1987. – Vol. 4(4). – P. 595-601.
23. Ferray M., L’Huillier A. et all. Multipleharmonic conversion of 1064 nm radiation in rare gases. // J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys., 1988. – Vol. 21(3). – L31.

About on question of generation high order garmonic

N.E. Koval, V.B. Tlyachev.

In the context of M.Levenshtejna’s method the radiation spectrum of the hydrogen atom in the strong laser field is obtained. The time-dependent Kohn-Sham equation in the approximation of the strong field is solved and the spectrum of radiation of helium atom is determined.