2009 г — Труды ФОРА — № 14

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПО ВЕРОЯТНОСТИ ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ СТОХАСТИЧЕСКИХ СИСТЕМ ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.М. Шумафов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В статье проведено исследование устойчивости по вероятности двумерных линейных стационарных систем, параметры которых возмущены «белым» шумом. Исследование проводится модифицированным методом функций Ляпунова. В качестве примера рассматривается уравнение упругих колебаний в среде, один из коэффициентов которых подвержен случайному возмущению.

1. Введение

Хорошо известно, каким эффективным и чрезвычайно общим является прямой метод функций Ляпунова для исследования свойства устойчивости (а также и других свойств) решений детерминированных дифференциальных систем. Метод функций Ляпунова нашел широкое применение также в стохастической теории дифференциальных уравнений. В работах Г.Дж. Кушнера [1] и Р.З. Хасьминского [2] метод функций Ляпунова был перенесен на стохастический случай. Основная трудность при исследовании систем (как детерминированных, так и стохастических) методом функций Ляпунова состоит в отыскании подходящей функции Ляпунова. Общего «рецепта» для построения подходящей функции Ляпунова для заданной системы не существует. Имеется лишь определенный набор приемов и методов построения функций Ляпунова для определенных классов детерминированных дифференциальных систем (см., например, [3]). Для стохастических систем возможность применения способа построения функций Ляпунова, используемого в детерминистической теории, для изучения вопросов устойчивости линейных стохастических систем с постоянными коэффициентами была отмечена в работе [4]. В [2] доказана общая теорема о существовании функции Ляпунова для линейных стационарных стохастических систем в виде однородных форм четного порядка. В [5] и [6] были построены функции Ляпунова для стационарных линейных и нелинейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка.

В настоящей статье для стационарных линейных стохастических систем второго порядка строятся функции Ляпунова в виде квадратичных форм и на основе их даются достаточные условия устойчивости по вероятности нулевого решения рассматриваемых систем.

Отметим, что построенные нами стохастические функции Ляпунова для линейных систем могут быть, во-первых, «опорными» при построении функций Ляпунова для нелинейных систем и, во-вторых, они служат как бы «эталонными» функциями Ляпунова, позволяющими во многих случаях усмотреть ценность построенной функции Ляпунова для сложной нелинейной системы.

2. Постановка задачи

Рассмотрим двумерную систему линейных стохастических уравнений Ито с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} dx(t) = (ax(t) + by(t))dt + (ex(t) + fy(t)d\xi(t), \\ dy(t) = (cx(t) + ky(t))dt + (gx(t) + hy(t)d\xi(t). \end{cases} \quad (2.1)$$

Здесь $x(t) = x(t,\omega)$, $y(t) = y(t,\omega)$ - скалярные случайные процессы, a, b, c и k - постоянные, а $\xi(t)$ – винеровский процесс; $dx(t)$, $dy(t)$ и $d\xi(t)$ - стохастические дифференциалы в смысле Ито процессов $x(t)$, $y(t)$ и $\xi(t)$ соответственно.

Цель настоящей статьи – дать достаточные условия устойчивости по вероятности нулевого решения $x(t)\equiv 0$, $y(t)\equiv 0$ системы (2.1). Здесь мы ограничимся случаями, когда одна или две из констант e, f, g, h отличны от нуля, а остальные равны нулю.

3. Некоторые определения и факты из стохастической теории устойчивости дифференциальных уравнений

Все приводимые ниже определения и факты можно найти, например, в [1], [2].

Пусть (Ω, U, P) - вероятностное пространство, где $\Omega=\{\omega\}$ - пространство элементарных событий ω, U - борелевское поле событий в Ω, P - вероятностная мера на U.

Хорошо известно [2], что для любых начальных данных $t_0, x_0, y_0 \in \boldsymbol{R}$ существует и единственно решение $z(t,\omega;t_0,z_0) := (x(t,\omega;t_0,x_0,y_0), y(t,\omega;t_0,x_0,y_0))$, удовлетворяющее начальному условию $z(t)=z_0$. Здесь $z_0 := (x_0, y_0)$. В силу автономности системы (2.1) можно считать $t_0=0$.

Определение 1. Тривиальное решение $x(t)\equiv 0$, $y(t)\equiv 0$ системы (2.1) называется устойчивым по вероятности при $t\ge 0$, если для любых t_0 и $\varepsilon>0$

$$\lim_{z_0\to 0} P\{\sup_{t>t_0}\|z(t,\omega,z_0)\|>\varepsilon\}=0.$$

Определение 2. Производящим дифференциальным оператором системы (2.1) называется оператор

$$L=(ax+by)\frac{\partial}{\partial x}+(cx+dy)\frac{\partial}{\partial y}+\frac{1}{2}\left\{(ex+fy)^2\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\right.$$

$$\left.+2(ex+fy)(gx+hy)\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+(gx+hy)^2\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right\}.$$

Ниже нами будет использоваться следующее хорошо известное утверждение, являющееся стохастическим аналогом первой теоремы Ляпунова в детерминистической теории устойчивости.

Лемма [2]. *Пусть в области G, содержащей начало координат $(x=0, y=0)$, существует положительно определенная дважды непрерывно дифференцируемая функция $V(x,y)$, удовлетворяющая при $x\neq 0$ условию $LV(x,y)\le 0$.*

Тогда тривиальное решение $x(t)\equiv 0$, $y(t)\equiv 0$ системы (2.1) устойчиво по вероятности.

4. Устойчивость по вероятности

Рассмотрим систему (2.1).

4.1. ***Случай, когда один из коэффициентов «случайной» части системы отличен от нуля, а остальные равны нулю.***

Из всех четырех возможных случаев достаточно рассмотреть случаи:

A) $e\neq 0, f=g=h=0$, B) $f\neq 0, e=g=h=0$.

Оставшиеся два случая сводятся к A) или B) заменой $x\to y, y\to x$.

A) *Случай* $e\neq 0, f=g=h=0$.

Построим стохастическую функцию Ляпунова V в виде квадратичной формы, удовлетворяющую условию $LV=\Delta x^2$, где $\Delta=2e^2[k^2+(ak-bc)]+4(a+k)(ak-bc)$.

После элементарных выкладок, получим

$$V=2(kx-by)^2+2(ak-bc)x^2. \tag{4.1}$$

Условие положительной определенности формы (4.1) после некоторых упрощений принимает вид: $ak-bc>0$. Так как при $e=0$ мы получаем детерминированную линейную систему, то будем считать выполненными условия Рауса-Гурвица. Из леммы п. 3 и общего утверждения, приведенного в [5], получим следующий результат.

Теорема 1. *Пусть в системе* (2.1) $e \neq 0,\ f = g = h = 0.$ *Пусть, далее, выполнены следующие условия:*

a) $a + k < 0$

b) $ak - bc > 0$

c) $e^2[k^2 + (ak - bc)] < 2(a + k)(bc - ak)$.

Тогда тривиальное решение $x(t) \equiv 0,\ \ y(t) \equiv 0$ *системы* (2.1) *устойчиво по вероятности.*

Кроме того, для любого $\lambda \in (0, m]$ *и начального условия* $(x_0, y_0) \in Q_m$, *где* $Q_m = \{(x, y) : V(x, y) < m\}$, *справедливо неравенство*

$$P\left\{\sup_{t \geq 0} V(x(t, \omega), y(t, \omega)) \geq \lambda\right\} \leq \frac{V(x_0, y_0)}{\lambda},$$

причем $(x(t, \omega), y(t, \omega)) \to \{x = 0\} \cap Q_m$ *при* $t \to +\infty$ *с вероятностью не меньшей, чем* $1 - V(x_0, y_0)/\lambda.$

B) Случай $f \neq 0, e = g = h = 0.$

Здесь мы построим стохастическую функцию Ляпунова V в виде квадратичной формы, удовлетворяющей условию $LV = \Delta \cdot y^2$, где Δ определяется так: $\Delta = 2c^2 f^2 + 4(a + k)(ak - bc).$ После элементарных вычислений получим

$$V = 2(cx - ay)^2 + 2(ak - bc)y^2. \tag{4.2}$$

Используя функцию (4.2), на основании леммы из п. 3 и общего утверждения из [5] получаем следующую теорему.

Теорема 2. *Пусть в системе* (2.1) $f \neq 0, e = g = h = 0.$ *Пусть, далее, выполнены условия*:

a) $a + k < 0$

b) $ak - bc > 0$

c) $c^2 f^2 < 2(a + k)(bc - ak).$

Тогда тривиальное решение $x(t) \equiv 0,\ \ y(t) \equiv 0$ *системы* (2.1) *устойчиво по вероятности.*

Кроме того, имеет место утверждение, аналогичное второй части теоремы 1.

4.2. Случай, когда два каких-либо коэффициентов «случайной» части системы отличны от нуля, а остальные равны нулю.

Из шести возможных случаев достаточно рассмотреть четыре случая

A) $e \neq 0, f \neq 0; g = h = 0,$

B) $e \neq 0, g \neq 0; f = h = 0,$

C) $e \neq 0, h \neq 0; f = g = 0,$

D) $f \neq 0, g \neq 0; e = h = 0.$

Оставшиеся два случая сводятся к рассматриваемым.

A) *Случай* $e \neq 0, f \neq 0; g = h = 0.$

Как и выше построим стохастическую функцию Ляпунова в виде квадратичной формы, удовлетворяющей условию $LV = \Delta \cdot y^2$, где

$$\Delta = 4(a + k)(ak - bc) + 2c^2 f^2 + 2e^2[k^2 + (ak - bc)] - 4ckef.$$

Для простоты положим $e = f$. После элементарных выкладок получим

$$V = 2c^2x^2 - 2c(2a + e^2)xy + [2a^2 + 2(ak - bc) + e^2(a + k - 2c)y^2]. \tag{4.3}$$

Используя функцию (4.3), на основании леммы из п. 3 и утверждения из [5] получим следующее предложение.

Теорема 3. *Пусть в системе* (2.1) $e = f, e \neq 0; g = h = 0.$ *Пусть, далее, выполнены следующие условия:*

a) $a + k < 0,$

b) $ak - bc > 0,$

c) $e^4 + (a - k + 2c)e^2 < 4(ak - bc),$

d) $e^2[(ak - bc) + (c - k)^2] < 2(a + k)(bc - ak).$

Тогда тривиальное решение системы (2.1) *устойчиво по вероятности.*

Далее, имеет место утверждение, аналогичное второй части теоремы 1.

Отметим, что условия *a*) и *b*) – это условия Рауса-Гурвица для детерминированной части системы (2.1), условие c) обеспечивает положительную определенность формы (4.3), а условие d) эквивалентно неравенству $\Delta < 0.$

B) *Случай* $e \neq 0, g \neq 0;\ f = h = 0.$

Воспользуемся ранее построенной стохастической функцией (4.1). На основании леммы из п. 3 и утверждения из [5] получаем следующий результат.

Для простоты сформулируем его в предположении $g=e$.

Теорема 4. *Пусть в системе* (2.1) $e=g;\ e\neq 0;\ f=h=0$. *Пусть, далее, выполнены неравенства*:

a) $a+k<0,$

b) $ak-bc>0,$

c) $e^2[k^2 + (ak - bc) + 2b(b\text{-}2k)]^2 < 2[c^2 + k^2 + (ak - bc)].$

Тогда тривиальное решение системы (2.1) *устойчиво по вероятности.*

Кроме того, имеет место утверждение, аналогичное второй части теоремы 1.

C) *Случай* $e \neq 0,\ h \neq 0;\ f = g = 0.$

Для простоты положим $e = h$. Тогда, как и выше, построим стохастическую функцию

$$V = 2c^2x^2 - 2c(2a + e^2)xy + [2(a^2 + ak - bc) + e^4 + e^2(k + 3a)] \cdot y^2\,, \tag{4.4}$$

удовлетворяющую равенству $LV = \Delta y^2$,

где $\Delta = 4(a + k)(ak - bc) + 2e^2[(a + k)^2 + 2(ak - bc)] + 3e^4(a + k) + e^6$.

Используя функцию (4.4), получаем следующее утверждение.

Теорема 5. *Пусть в системе* (2.1) $e=h;\ e\neq 0;\ f=g=0$. *Пусть выполнены неравенства:*

a) $a+k < 0,$

b) $ak - bc > 0,$

c) $4(ak - bc) > -e^4 - 2e^2(a + k),$

c) $e^6 + 3e^4(a + k) + 2e^2[(a + k) + 2(ak - bc)] < 4(a + k)(bc - ak)].$

Тогда тривиальное решение системы (2.1) *устойчиво по вероятности.*

Кроме того, имеет место утверждение, аналогичное второй части теоремы 1.

D) *Случай* $f \neq 0,\ g \neq 0;\ e = h = 0.$

Для простоты положим $f = g$. Как и выше, строим стохастическую функцию Ляпунова

$$V = [2(ak - bc) + 2k^2 + 2kf^2]x^2 - 2(2bk - cf^2)xy + [2b^2 - (a + k)f^2 - f^4]y^2\,, \tag{4.5}$$

удовлетворяющую равенству $LV = \Delta x^2$, где

$$\Delta = 4(a + k)(ak - bc) + 2(b^2 + c^2 + 2ak)f^2 - (a + k)f^4 - f^6.$$

Используя функцию (4.5), как и выше получаем следующее утверждение.

Теорема 6. *Пусть в системе* (2.1) $f = g;\ f \neq 0;\ e = h = 0$. Пусть, далее, выполнены неравенства:

a) $a + k < 0,$

b) $ak - bc > 0,$

c) $4(a + k)(bc - ak) > 2(b^2 + c^2 + 2ak)f^2 - (a + k)f^4 - f^6,$

d) $2(ak - bc)+2k2\ \text{-}2kf^6 + f^4[c^2 + 2k^2 + 2(ak - bc) + 2k(a+k)] + f^2[2(a+k)(ak - bc) + 2k^2 \times$

$\times (a+k) - 4bk(b+c)]$.

Тогда нулевое решения системы (2.1) *устойчиво по вероятности.*

Далее, имеет место утверждение, аналогичное второй части теоремы 1.

5. Примеры

Рассмотрим уравнение колебаний в среде $\ddot{x} + \mu\,\dot{x} + \omega^2 x = 0$, один из коэффициентов которого подвержен воздействию случайного процесса – «белого» шума $\sigma\dot{\xi}(t)$ интенсивности σ. (Здесь μ >0 – коэффициент трения, ω – собственная частота колебаний)

1. Уравнение

$$\ddot{x} + \mu\,\dot{x} + (\omega^2 + \sigma\dot{\xi}(t))x = 0. \tag{5.1}$$

Будем понимать (5.1) как систему стохастических уравнений:

$$\begin{cases} dx(t) = y(t)dt, \\ dy(t) = (-\omega^2 x(t) - \mu y(t))dt - \sigma x(t)d\xi(t) \end{cases} \tag{5.2}$$

Заменой переменных $x \to y$, $y \to x$ система (5.2) сводится к случаю b) пункта 4.1. Здесь $a = -\mu$, $b = -\omega^2$, $c = 1$, $k = 0$, $f = -\sigma$. Применяя теорему 2, получим

Предложение 1. *Если выполнено неравенство* $\sigma < 2\mu\omega^2$ *, то система* (5.2) *устойчива по вероятности.*

Кроме того, имеет место утверждение, аналогичное второй части теоремы 1, *где* $V = 2(x+\mu y)^2 + 2\omega^2 y^2$.

2. Уравнение

$$\ddot{x} + (\mu + \sigma\dot{\xi}(t))\,\dot{x} + \omega^2 x = 0 \tag{5.3}$$

Перепишем (5.3) в форме системы стохастических уравнений:

$$\begin{cases} dx(t) = y(t)dt, \\ dy(t) = (-\omega^2 x(t) - \mu y(t))dt - \sigma y(t)d\xi(t). \end{cases} \tag{5.4}$$

Заменой переменных $x \to y$, $y \to x$ система (5.4) сводится к случаю a) пункта 4.1. Здесь $a = -\mu$, $b = -\omega^2$, $c = 1$, $k = 0$, $e = -\sigma$. Применяя теорему 1, получаем:

Предложение 2. *Если выполнено неравенство* $\sigma^2 < 2\mu$ *, то система* (5.4) *устойчива по вероятности.*

Кроме того, имеет место утверждение аналогичное второй части теоремы 1, *где* $V = 2\omega^2(x^2 + \omega^2 y^2)$.

Литература

1. *Кушнер Дж.* Стохастическая устойчивость и управление. - М.: Мир, 1969. - 199 с.
2. *Хасьминский Р.З.* Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. - М.: Наука, 1969. - 367 с.
3. *Барабашин Е.А*. Функции Ляпунова. – М.: Наука, 1970. – 240 с.
4. *Кац И.Я., Красовский Н.Н.* Об устойчивости систем со случайными параметрами // Прикл. матем. и мех. - 1960. – Т. 27. – Вып. 5. - С. 809-823.
5. *Kushner H.J.* On the construction of stochastic Liapunov functions. // IEEE Trans. Aut. Control. – 1965. V. 10. - № 4. – P. 477–478.
6. *Шумафов М.М.* О построении функций Ляпунова для некоторых нелинейных стохастических дифференциальных уравнений второго порядка и вопросы устойчивости // Дифференциальные уравнения. – 1981. – Т. 17. - № 6. – С. 1143-1145.

About a stability on probability of the linear stationary stochastic systems of the second order

M.M. Shumafov

In the paper stability of two-dimensional linear stationary systems, the parameters of which are perturbed by "white" noise is investigated. As an example the equation of elastic oscillations in a medium disturbed by random process is considered.

