2 0 0 9 г **№ 14**

Т р у д ы   Ф О Р А

О КОЛЕБЛЕМОСТИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ НЕРАВЕНСТВ И УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

К.С. Мамий

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Устанавливаются некоторые достаточные условия колеблемости правильных решений дифференциального неравенства $u''(t)\, sign\, u(t) \le -a(t)\,|\,\varphi(u(t))\,|$, где функция $a:[0;+\infty[\to]-\infty;+\infty[$ локально суммируема на $[0;+\infty[$, $\varphi \in C]-\infty;\infty[$, $sign\,\varphi(x) = sign\, x$. Полученные результаты применяются к исследованию колеблемости решений уравнения $u'' = f(t,u,u')$.

Введение

Мы будем рассматривать дифференциальное неравенство вида $u'' signu \le a(t)\,|\,\varphi(u)\,|$, где функция $a:[0,+\infty[\to R$ локально суммируема, а $\varphi: R \to R$ непрерывна и $sign\,\varphi(x) = sign\, x.$

Работа состоит из двух частей. В первой части приводятся достаточные условия колеблемости всех правильных решений неравенства (1). Теорема 1.1 является обобщением известной теоремы И.В. Камнева о колеблемости всех правильных решений уравнения $u'' + a(t)\varphi(u) = 0$.

Далее приводится лемма о несуществовании решения, заданного на некотором промежутке $[t_0,+\infty[$, у дифференциального неравенства типа Риккати. С помощью этой леммы доказывается теорема 1.2, являющаяся обобщением результатов В.А. Кондратьева, И.Т. Кигурадзе. В отличие от предыдущих теорем, теорема 1.3 предполагает неотрицательность функции $a(t)$. Теорема 1.3 дает достаточное условие колеблемости всех ограниченных правильных решений неравенства (1) и обобщает один результат Изюмовой Д.В. – Кигурадзе И.Т.

Во второй части работы, установленные в первом пункте, теоремы применяются для исследования колеблемости решений уравнения вида $u'' + f(t,u,u') = 0$.

Основные результаты

Часть 1. Рассмотрим дифференциальное неравенство

$$u''(t) signu(t) \le -a(t)\,|\,\varphi(u(t))\,|, \tag{1.1}$$

где $a \in L[0;+\infty-[$ (см. [1]). $\varphi \in C(R),\;\; R =]-\infty;\infty[,\;\; sign\,\varphi(x) = sign\, x.$

Функцию $u:[0;+\infty[\to R$ назовем правильным решением неравенства (1.1), если она абсолютно непрерывна вместе со своей производной на любом конечном отрезке промежутка $[0;+\infty[$, почти при всех $t \ge 0$ удовлетворяет неравенству (1.1) и $\sup\{|\,u(t)\,|: s \le t < +\infty\} > 0$ при любом $s \ge 0.$

Правильное решение «*u*» неравенства (1.1) назовем колеблющимся, если оно имеет сколь угодно большие нули, и неколеблющимся, если найдется такое число $t_0 \ge 0,$ что при всех $t \ge t_0$

$$|\,u(t)\,| > 0. \tag{1.2}$$

Теорема 1.1. *Пусть* $\varphi \in C^1(R\setminus\{0\}),\;\; \varphi'(x) \ge 0$ *при* $x \ne 0$ *и при любом* $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty}\frac{dx}{\varphi(x)}<+\infty \text{ и } \int_{-\varepsilon}^{-\infty}\frac{dx}{\varphi(x)}<+\infty. \tag{1.3}$$

Пусть, далее, существует неубывающая функция $r:[0;+\infty[\to]0;+\infty[$, *абсолютно непрерывная на каждом конечном отрезке промежутка* $[0;+\infty[$, *производная которой не возрастает и*

$$\int^{+\infty} r(t)a(t)dt=+\infty. \tag{1.4}$$

Тогда любое правильное решение неравенства (1.1) колеблется.

Доказательство. Допустим противное. Пусть неравенство (1.1) имеет решение $u(t)$, удовлетворяющее условию (1.2). тогда очевидно, функция

$$S(t)=-\frac{r(t)u'(t)}{\varphi(u(t))} \tag{1.5}$$

определена при всех $t\ge t_0$, почти везде дифференцируема и, ввиду (1.1), удовлетворяет неравенству

$$S'(t)\ge\frac{\varphi'(u(t))}{r(t)}S^2(t)+\frac{r'(t)}{r(t)}S(t)+r(t)a(t) \tag{1.6}$$

почти для всех $t\ge t_0$, откуда

$$S(t)\ge S(t_0)+\int_{t_0}^{t}r(\tau)a(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi'(u(\tau))}{r(\tau)}S^2(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\frac{r'(\tau)}{r(\tau)}S(\tau)d\tau \tag{1.7}$$

при $t\ge t_0$. Из условий (1.3) следует, что функция

$$\Phi(u)=\begin{cases}\displaystyle\int_{-\infty}^{u}\frac{dx}{\varphi(x)}, & \textit{если} \quad u<0,\\ \displaystyle\int_{+\infty}^{u}\frac{dx}{\varphi(x)}, & \textit{если} \quad u>0\end{cases}$$

определена и отрицательна для всех $u\ne 0$. Поэтому, с учетом (1.5) и свойств *r*, применив вторую теорему о среднем, получим, что

$$\int_{t_0}^{t}\frac{r'(\tau)}{r(\tau)}S(\tau)d\tau\ge r'(t_0)\Phi(u(t_0)),\ \ t\ge t_0,$$

а, тогда из (1.7) имеем

$$S(t)\ge C_0+\int_{t_0}^{t}r(\tau)a(\tau)d\tau+\int_{t_0}^{t}\frac{\varphi'(u(\tau))}{r(\tau)}S^2(\tau)d\tau,\ \ t\ge t_0, \tag{1.8}$$

где $C_0=S(t_0)+r'(t_0)\Phi(u(t_0))$.

Далее, в силу (1.4), найдется такое число $t_1\ge t_0$, что

$$C_0+\int_{t_0}^{t}r(\tau)a(\tau)d\tau\ge 1 \text{ при } t\ge t_1.$$

С учетом этого, из (1.8) получим, что

$$S(t)\ge 1+\int_{t_1}^{t}\frac{\varphi'(u(\tau))}{r(\tau)}S^2(\tau)d\tau\equiv R(t),\ \ t\ge t_1, \tag{1.9}$$

или

$$\frac{S(t)}{R(t)} \geq 1 \text{ при } t \geq t_1.$$

Умножив обе части последнего неравенства на неотрицательную функцию $\dfrac{\varphi'(u(t))}{r(t)} S(t)$ при $t \geq t_1$ (в силу (1.7) и условий теоремы) и, учитывая (1.5), получим

$$\frac{R'(t)}{R(t)} \geq -\frac{\varphi'(u(t))u'(t)}{\varphi(u(t))}, \ t \geq t_1.$$

Интегрируя это неравенство от t_1 до $t \geq t_1$ имеем:

$$\ln R(t) \geq \ln \frac{c_1}{|\varphi(u(t))|}, \ t \geq t_1,$$

где $c_1 = |\varphi(u(t_1))| > 0$, откуда, ввиду (1.9) и (1.5), следует, что

$$-\frac{r(t)u'(t)}{\varphi(u(t))} \geq \frac{c_1}{|\varphi(u(t))|}, \ t \geq t_1.$$

Из последнего неравенства нетрудно получить неравенство

$$|u(t)|' \leq -\frac{c_1}{r(t)}, \ t \geq t_1,$$

откуда

$$|u(t)| \leq |u(t_1)| - c_1 \int_{t_1}^{t} \frac{d\tau}{r(\tau)} \to -\infty$$

при $t \to +\infty$, так как по условию $r(t) > 0$, $r'(t) \geq 0$ и $r'(t)$ $(t \geq 0)$ не возрастает. Полученное противоречие и доказывает теорему.

Замечание 1.1. Другие условия колеблемости решений неравенства (1.1) содержатся в работе [2].

Следствие 1.1. Пусть функция $a(t)$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1.1. Пусть, далее, $h \in C[0;+\infty[\cap C^1]0;+\infty[$, $h(S) > 0$ при $S > 0$, $h(0) = 0$, $h'(S) \geq 0$ при $S > 0$ и для любого $\varepsilon > 0$

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{dS}{h(S)} < +\infty.$$

Тогда все правильные решения неравенства

$$u''(t) sign u(t) \leq -a(t)h(|u(t)|) \tag{1.10}$$

являются колеблющимися.

В дальнейшем нам понадобится следующая

Лемма 1.1. *Пусть* $\alpha, \beta, \gamma \in L[a;+\infty-[$, $\beta(t) \geq 0$ *при* $t \geq a$ *и*

$$\int^{+\infty} \beta(t)dt = +\infty, \tag{1.11}$$

$$\lim_{t \to +\infty} l(t) = +\infty, \tag{1.12}$$

где

$$l(t) = \gamma(t) + \int_a^t \alpha(\tau)d\tau.$$

Тогда ни при каком $t_0 \geq a$ *не существует функции* $S : [t_0;+\infty[\to R$, *абсолютно непрерывной на каждом отрезке промежутка* $[t_0,+\infty[$ *и удовлетворяющей неравенству*

$$S'(t) \geq \alpha(t) + \beta(t) \,|\, S(t) + \gamma(t) \,|^{1+\varepsilon}, \;\; \varepsilon = const > 0, \tag{1.13}$$

почти при всех $t \geq t_0$.

Доказательство. Допустим, что существует число $t_0 \geq a$ и функция $S : [t_0;+\infty[\to R$, удовлетворяющая неравенству (1.13) почти при всех $t \geq t_0$. Тогда из (1.13) получим, что

$$S(t) \geq S(t_0) + \int_{t_0}^{t} \alpha(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} \beta(\tau) \,|\, S(\tau) + \gamma(\tau) \,|^{1+\varepsilon} \, d\tau, \;\; t \geq t_0,$$

или

$$S(t) + \gamma(t) \geq S(t_0) + l(t) + \int_{t_0}^{t} \beta(\tau) \,|\, S(\tau) + \gamma(\tau) \,|^{1+\varepsilon} \, d\tau, \;\; t \geq t_0. \tag{1.14}$$

В силу (1.12), найдется $t_1 \geq t_0$, что при всех $t \geq t_1$

$$S(t_0) + l(t) \geq 1.$$

Поэтому из (1.14) следует, ввиду неотрицательности $\beta(t)$, что при всех $t \geq t_1$

$$S(t) + \gamma(t) \geq 1 + \int_{t_1}^{t} \beta(\tau)[S(\tau) + \gamma(\tau)]^{1+\varepsilon} d\tau \equiv \mathrm{M}(t),$$

откуда имеем, что $\mathrm{M}'(t) \geq \beta(t)\mathrm{M}^{1+\varepsilon}(t)$ почти при всех $t \geq t_1$. Но тогда

$$\int_{t_1}^{t} \beta(\tau)d\tau \leq \frac{1}{\varepsilon} \;\text{при}\; t \geq t_1,$$

что противоречит условию (1.11). Лемма доказана.

Теорема 1.2. *Пусть* $\varphi \in C^1(R \setminus \{0\})$ *и*

$$\varphi'(x) \geq \sigma > 0 \;\text{при}\; x \neq 0 \;\; (\sigma = const). \tag{1.15}$$

Тогда для колеблемости всех правильных решений неравенства (1.1) достаточно, чтобы существовала функция $r : [0;+\infty[\to]0;+\infty[$, *абсолютно непрерывная на каждом отрезке промежутка* $[0;+\infty[$ *такая, что*

$$\int^{+\infty} \frac{dt}{r(t)} = +\infty, \tag{1.16}$$

$$\lim_{t \to +\infty} L(t) = +\infty, \tag{1.17}$$

где

$$L(t) = \int_{\varepsilon}^{t} r(\tau)\left[a(\tau) - \frac{r'^2(\tau)}{4\sigma r^2(\tau)}\right] d\tau + \frac{r'(t)}{2\sigma},$$

ε *- некоторое неотрицательное число.*

Доказательство. Предположим, вопреки утверждению теоремы, что неравенство (1.1) имеет правильное решение $u(t)$, удовлетворяющее условию (1.2). Тогда функция $S(t)$, определяемая равенством (1.5), удовлетворяет неравенству (1.6) почти при всех $t \geq t_0 \geq 0$, откуда, в силу условия (1.15), легко выводится неравенство

$$S'(t) \geq \frac{\sigma}{r(t)}\left[S(t) + \frac{r'(t)}{2\sigma}\right]^2 + r(t)a(t) - \frac{r'^2(t)}{4\sigma r(t)}, \; t \geq t_0,$$

что, по лемме 1.1, невозможно в силу условий (1.16) и (1.17).

Следствие 1.2. Пусть функция $a(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1, а функция h – условиям следствия 1.1. Тогда все правильные решения неравенства (1.10) являются колеблющимися.

Теорема 1.3. *Пусть почти при всех* $t \ge 0 : a(t) \ge 0.$ *Тогда для колеблемости всех правильных и ограниченных решений неравенства (1.1) достаточно, чтобы выполнялось условие*

$$\int^{+\infty} t a(t) dt = +\infty. \tag{1.18}$$

Докажем предварительно следующую лемму.

Лемма 1.2. *Если* $a(t) \ge 0$ *почти при всех* $t \ge 0$ *и*

$$mes\{t : a(t) \ne 0 \text{ и } t \ge S\} > 0 \text{ для всех } S \ge 0, \tag{1.19}$$

то любое неколеблющееся решение $u(t)$ *неравенства (1.1) удовлетворяет условиям*

$$u(t)u'(t) > 0 \text{ при всех } t \ge t_0, \; u(t)u''(t) \le 0 \text{ почти при всех } t \ge t_0, \tag{1.20}$$

где t_0 *– достаточно большое число.*

Доказательство. Допустим, что $u(t)$ – неколеблющееся решение неравенства (1.1). Тогда найдется $t_0 \ge 0,$ что при всех $t \ge t_0$ будет выполняться условие (1.2). Пусть $u(t) > 0$ при $t \ge t_0$ (случай, когда $u(t) < 0,$ рассматривается аналогично). Тогда из (1.1) следует, что $u''(t) \le 0$ почти при всех $t \ge t_0$. Покажем, что $u'(t) > 0$ при всех $t \ge t_0$. Предположим противное. Тогда найдется число $t_1 \ge t_0$ такое, что $u'(t_1) \le 0.$ Если $u'(t_1) < 0,$ то получим, что $u(t) \le u'(t_1)(t - t_1) + u(t_1) \to -\infty$ при $t \to +\infty,$ что противоречит условию. Если же $u'(t_1) = 0,$ то будет $u'(t) \le 0$ при всех $t \ge t_1.$ Но так как u' не может принимать отрицательные значения при $t \ge t_1,$ то получаем, что $u'(t) = 0$ при всех $t \ge t_1,$ откуда следует, что $u(t) = C > 0$ при $t \ge t_1.$ Тогда из (1.1) следует, что $a(t) \le 0$ почти при всех $t \ge t_1,$ а следовательно, $a(t) = 0$ почти при всех $t \ge t_1,$ что противоречит условию (1.19). Лемма доказана.

Доказательство теоремы 1.3. Предположим, что неравенство (1.1) имеет правильное и ограниченное решение $u(t)$, удовлетворяющее (1.2). Тогда, в силу условия (1.18) и леммы 1.2 найдется такое $t_1 \ge t_0,$ что при $t \ge t_1$ будут соблюдаться неравенства (1.20). Далее, так как $sign\,\varphi(x) = sign\,x$ и решение $u(t)$ ограничено, то $\inf\{|\varphi(u(t))| : t \ge t_1\} = \sigma > 0.$ Поэтому из неравенства (1.1), ввиду (1.20), легко следует, что при $t \ge t_1$

$$\left|\int_{t_1}^{t} \tau u''(\tau) d\tau\right| \ge \int_{t_1}^{t} \tau a(\tau) |\varphi(u(\tau))| d\tau \ge \sigma \int_{t_1}^{t} \tau a(\tau) d\tau. \tag{1.21}$$

Ввиду (1.20), ясно, что при $t \ge t_1$

$$\left|\int_{t_1}^{t} \tau u''(\tau) d\tau\right| = |tu'(t) - t_1 u(t_1) - u(t) + u(t_1)| = t_1|u'(t_1)| + |u(t)| - \left(t|u'(t)| + |u(t_1)|\right) \le t_1|u'(t_1)| + |u(+\infty)|.$$

Тогда из (1.21) следует, что при всех $t \ge t_1$

$$\int_{t_1}^{t} \tau a(\tau) d\tau \le \frac{t_1|u'(t_1)| + |u(+\infty)|}{\sigma},$$

что противоречит условию (1.18). Теорема доказана.

Замечание 1.2. В случае, когда (1.1) есть уравнение, а функция $a : [0,+\infty[\to]0,+\infty[$ непрерывна, теорема 1.3 установлена в работе [3].

Часть 2. Установленные выше результаты применим теперь к вопросу колеблемости решений уравнения

$$u'' = f(t, u, u'), \tag{1.22}$$

где $f:[0;\infty[\times R^2 \to R$ удовлетворяет локальным условиям Каратеодори. Вопрос о колеблемости решений уравнения (1.22) и его частных видов изучался многими авторами (см., например, работы [1]-[10]).

Теорема 2.1. *Пусть для всех* $(t,x,y)\in[0;+\infty[\times R^2$ *соблюдается условие*

$$f(t,x,y)sign\, x \le -a(t)|\varphi(x)|, \qquad (1.23)$$

где функции a и φ *удовлетворяют либо условиям теоремы* 1.1, *либо условиям теоремы* 1.2. *Тогда все правильные решения уравнения* (1.17) *являются колеблющимися.*

Следствие 2.1. Пусть для всех $(t,x,y)\in[0;+\infty[\times R^2$ выполняется неравенство:

$$f(t,x,y)sign\, x \le -a(t)h(|x|), \qquad (1.24)$$

где функции a и h удовлетворяют условиям следствия 1.1. Тогда все правильные решения уравнения (1.22) являются колеблющимися.

Замечание 2.1. Если в первой части теоремы 2.1 положить $r(t)=t$, $f(t,x,y)=-a(t)\varphi(x)$, то получится теорема 2 из работы И.В. Каменева [4]. Если в следствии 2.1 положить $h(s)=s^{\lambda}$, $r(t)=t^{\alpha}$, где $\lambda>1$, $0\le\alpha\le1$, то получим один результат И.Т. Кигурадзе (см., [1], стр. 321). Если же $f(t,x,y)=-a(t)\,|\,x\,|^{\lambda}\, signx$, $\lambda>1$, то получим теорему 1 из [5].

Следствие 2.2. Пусть соблюдается условие (1.24), где функции a и h удовлетворяют условиям следствия 1.2. Тогда все правильные решения уравнения (1.22) являются колеблющимися.

Замечание 2.2. Если в следствии 2.2 положить $h(s)=s$, $r(t)=t^{\alpha}$, где $\alpha<1$, то получим результат И.Т. Кигурадзе [1]. Если же $f(t,x,y)=-a(t)x$, то условие (1.17) известно (см., например, [6], следствие 3). Заметим также, что в линейном случае условие (1.17) является и необходимым. Это непосредственно следует из работы М.И. Ельшина [11].

Теорема 2.2. *Пусть соблюдается условие* (1.23), *где* $a(t)\ge0$ *почти для всех* $t\ge0$. *Тогда для колеблемости всех правильных и ограниченных решений уравнения* (1.22) *достаточно выполнения условия* (1.18).

Литература

1. *Кигурадзе И.Т.* Некоторые сингулярные краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений. – Тбилиси: Изд-во ТбГУ, 1975. – 352 с.
2. Изюмова Д.В. К вопросу колеблемости решений нелинейных дифференциальных неравенств и уравнений второго порядка. Исследования некоторых уравнений математической физики. – Тбилиси: ИПМ ТбГУ, 1976. – С. 61-70.
3. *Изюмова Д.В., Кигурадзе И.Т.* Некоторые замечания о решениях уравнения $u''+a(t)f(u)=0$. // Дифференциальные уравнения. – 1968. - Том 4. - № 4. – С. 589-605.
4. *Каменев И.В.* О колеблемости решений нелинейного уравнения второго порядка // Труды МИЭМ. – 1969. – Вып. 5, - С. 125-136.
5. *Кигурадзе И.Т.* Заметка о колеблемости решений уравнения $u''+a(t)|u|^n signu=0$. // Časopis pro pěstování matematiky. – 1967. – Vol. 92. - № 3. – С. 343-350.
6. *Мамий К.С.* О колеблемости решений линейного однородного операторного дифференциального уравнения второго порядка. Сб. «Математика, некоторые ее приложения и методика преподавания», Ростов-на-Дону, 1973. – С. 18-24.
7. *Каменев И.В.* Об одном критерии колеблемости решений обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка // Мат. Заметки. – 1970. - Том 8. – Вып. 6. –С. 773-776.
8. *Каменев И.В.* О некоторых специфически нелинейных осцилляционных теоремах // Мат. Заметки. – 1971. - Том 10. - Вып. 2. – С. 129-134.
9. *Каменев И.В.* Об одной специфически нелинейной осцилляционной теореме // Дифференциальные уравнения. – 1973. - Том 9. - № 3. – С. 574-576.

10. *Петропавловская Р.В.* О колеблемости решений дифференциального уравнения $u'' = f(t, u, u')$ // ДАН СССР. – 1956. – Том 108. - № 3. – С. 389-391.
11. *Ельшин М.И.* Об одном решении классической проблемы колебаний // ДАН СССР. – 1962. - Том 147. - № 5. – С. 1013-1016.

About a variability of solutions of nonlinear differential inequalities and second-kind equations

K.S. Mamiy

Some sufficient conditions of a variability of correct solutions of differential inequality $u''(t) sign\, u(t) \leq -a(t) | \varphi(u(t)) |$ are established, where the function $a : [0;+\infty[\to]-\infty;+\infty[$ is locally summarised on $[0;+\infty[$ $\varphi \in C]-\infty;\infty[$, $sign\, \varphi(x) = sign\, x.$ The received outcomes are applied to the research of a variability of solutions of equation $u'' = f(t, u, u')$.

