ОДНОПРОДУКТОВАЯ МОДЕЛЬ РАЗВИТИЯ ЭКОНОМИКИ ДОТАЦИОННОГО РЕГИОНА ПРИ РАЗЛИЧНЫХ ПРОИЗВОДСТВЕННЫХ ФУНКЦИЯХ

А.З. Гиш

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

Приводится сопоставительный анализ однопродуктовых моделей развития дотационного региона. Адекватность модели оценивается в зависимости от вида производственной функции.

Будем считать, что все предприятия региона сведены в единую отрасль, который в стоимостном выражении в году t обозначим через Y_t. Пусть I_t – валовые капиталовложения в году t, включающие накопление (чистые капиталовложения) J_t и амортизационные отчисления A_t, где валовое накопление основного капитала представляет собой вложение резидентными единицами средств в объект основного капитала для создания нового дохода в будущем, путем использования их в производстве, т.о.

$$J_t = I_t - A_t \tag{1}$$

Пусть C_t – непроизводственное потребление в году t. Предположим, что экономические межрегиональные связи сбалансированы (чистый вывоз равен чистому ввозу). Т.к. рассматривается дотационный регион, то необходимо в математическую модель ввести дотации в бюджет республики – D_i (в i-м году):

$$I_t + C_t + D_t = Y_t. \tag{2}$$

Предположим, что рост основных фондов K_t обусловлен ростом чистых капиталовложений в силу их приоритетного значения относительно оборотных фондов:

$$K_{t+1} = K_t + J_t + D_t. \tag{3}$$

Объем выпуска конечного продукта обычно связывают с основными фондами и числом трудящихся с помощью производственной функции [3], и это соотношение имеет вид:

$$Y_t = f(K_t, L_t),$$

где $f(K_t, L_t)$ - производственная функция [3, 4].

В общем случае, количество трудящихся в данной отрасли представляется в виде функции зависящей от времени. Обычно предполагается, что доля занятого населения составляют некоторую долю населения страны, и, следовательно, можно говорить о пропорциональном изменении числа занятого населения [3].

Следовательно,

$$L_{t+1} = L_t + \eta_i L_t. \tag{4}$$

Причем, если $\eta_i > 0$, то можно говорить о пропорциональном росте количества трудящихся в соответствующем промежутке времени, если $\eta_i = 0$, то количество трудящихся постоянно и, если $\eta_i < 0$ – целесообразно говорить о снижении числа трудящихся [1,2].

Получаем следующую динамическую модель:

$$
\begin{cases}
Y_t = f(K_t, L_t), \\
K_{t+1} = K_t + J_t + D_t, \\
L_{t+1} = L_t + \eta_i L_t.
\end{cases} \tag{5}
$$

Формулы (5) представим в виде дифференциальных уравнений с заданными начальными условиями.

$$
\begin{cases}
Y_t = f(K_t, L_t), \\
\dfrac{dK}{dt} = J(t) + D(t), \dfrac{dL}{dt} = \eta(t)L(t), \\
K(0) = K_0, L(0) = L_0.
\end{cases} \tag{6}
$$

В рамах данной статьи будут рассмотрены следующие виды производственных функций [4]:

$Y(t) = AK(t) + BL(t)$ – линейная функция,

$Y(t) = AK^{\alpha}(t)L^{\beta}(t), \alpha > 0, \beta > 0$ – мультипликативная функция,

$Y(t) = \min\left(\dfrac{K(t)}{a}; \dfrac{L(t)}{b}\right)$ – функция Леонтьева затраты-выпуск,

$Y(t) = A\left(\alpha K^{-\rho}(t) + (1-\alpha)L^{-\rho}(t)\right)^{-\frac{\gamma}{\rho}}$ – функция с постоянной эластичностью замены (CES-функция).

На основе статистических данных, представленных в табл. 1 и табл. 2, методом наименьших квадратов строятся трендовые линии в виде полинома пятой степени для чистых капиталовложений и дотаций, при сложении которых получаем полином, с коэффициентами, представленными в табл. 3. Были исследованы линейная, логарифмическая, экспоненциальная, полиномиальная (разных степеней) и другие функции и показано, что представление данных с помощью полиномиальной функции является наиболее адекватным.

Таблица 1

Значение чистых капиталовложений и числа занятого населения Республики Адыгея за 2000 – 2005 гг.

	2000г.	2001г.	2002г.	2003г.	2004г.	2005г.
Чистые капиталовложения[1], млн. руб.	1264	1510	1916	2559	2268	2613
Число занятого населения[2], тыс. чел.	202	197	200	189	190	202

Таблица 2

Значение дотаций Республики Адыгея

	2000	2001	2002	2003	2004
Дотации, млн. руб.	84,9	7,1	0	21,4	141,3

В результате получаем следующую систему:

$$
\begin{cases}
Y(t) = f(K(t), L(t)), \\
\dfrac{dK}{dt} = \sum\limits_{i=0}^{5} q_i t^i, \dfrac{dL}{dt} = \eta \cdot L, \\
K(0) = \bar{k}, L(0) = \bar{l}.
\end{cases} \tag{7}
$$

Для проведения вычислительных экспериментов удобно перейти к безразмерному виду:

[1] Регионы России. Социально-экономические показатели. 2006: Стат. сб./Росстат. – М., 2007 – с. 918 табл.22.1.

[2] Там же. – с. 102 табл. 3.2.

$$\begin{cases} K_{норм}(t) = \dfrac{K(t)}{K_0} \\ L_{норм}(t) = \dfrac{L(t)}{L_o} \\ t_{норм} = \dfrac{t-2000}{t_0} \end{cases}, \text{где } K_o = 55000, L_0 = 250, t = 1. \qquad (8)$$

Таблица 3

Коэффициенты динамической системы для Республики Адыгея с учетом дотации

	q_5	q_4	q_3	q_2	q_1	q_0	η	$\bar{k}$	$\bar{l}$
Ненормированные коэффициенты	28,73	-478,2	2920,8	-8039	10123	-3206	1,00078	49258	202
Нормированные коэффициенты	0,0005	-0,009	0,053	-0,146	0,184	-0,058	1,00078	0,8956	0,81

После решения дифференциальных уравнений получаем следующие простые формулы:

$$\begin{cases} Y(t) = f(K(t), L(t)), \\ K(t) = \sum_{i=0}^{6} \dfrac{1}{i} q_i t^i, \\ L(t) = \bar{l} \cdot e^{\eta \cdot t}. \end{cases} \qquad (9)$$

В качестве производственной функции рассмотрим линейную функцию, с оптимальными значениями параметров равными $A = 10, B = 0{,}001$, вычисленными методом наименьших квадратов путем сравнения с реальными данными (в дальнейшем используется данный метод подбора параметров производственной функции). Тогда производственная функция будет иметь следующий вид:

$$Y_t = 10 \cdot \sum_{i=0}^{6} \frac{1}{i} q_i t^i + 0{,}001 \cdot \bar{l} \cdot e^{\eta \cdot t}.$$

На рис. 1 представлены значения конечного потребления, найденные с помощью линейной производственной функции в сравнении с реальными значениями конечного потребления[3] (средняя абсолютная ошибка равна 25%):

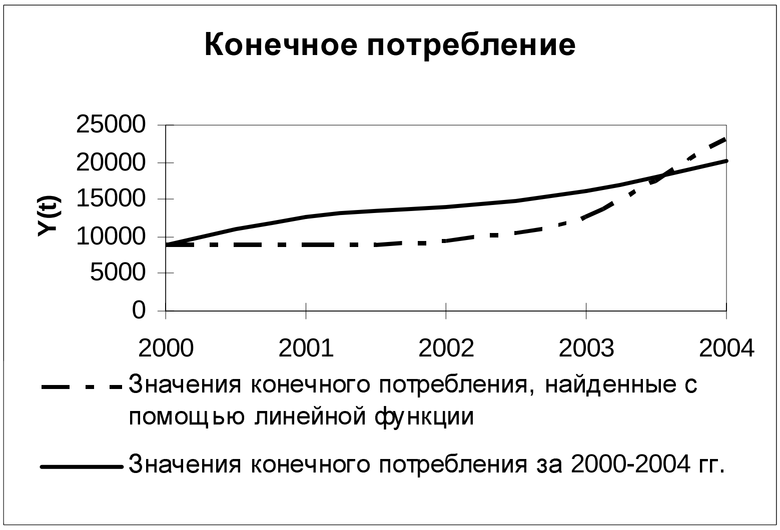

Рис. 1. Конечное потребление дотационного региона (модель линейной функции)

[3] Регионы России. Социально-экономические показатели. 2006: Стат. сб./Росстат. – М., 2007 – с.

При проведении аналогичных вычислений с применением линейной производственной функции без учета дотаций средняя абсолютная ошибка составила 15%.

При прогнозировании конечного потребления на 2005 год с помощью линейной производственной функции ошибка прогнозирования составляет 140%, а без учета дотаций – 105%. Следовательно, данный вид производственной функции не подходит для построения динамической модели.

Рассмотрим частный случай степенной производственной функции: функцию Кобба-Дугласа $f(K,L) = AK^{\alpha}L^{1-\alpha}$ с оптимальными значениями параметров равными $A=1, \alpha=1$. На рис. 2 представлены значения конечного потребления, найденные с помощью производственной функции Кобба-Дугласа и реальные значение за этот же период:

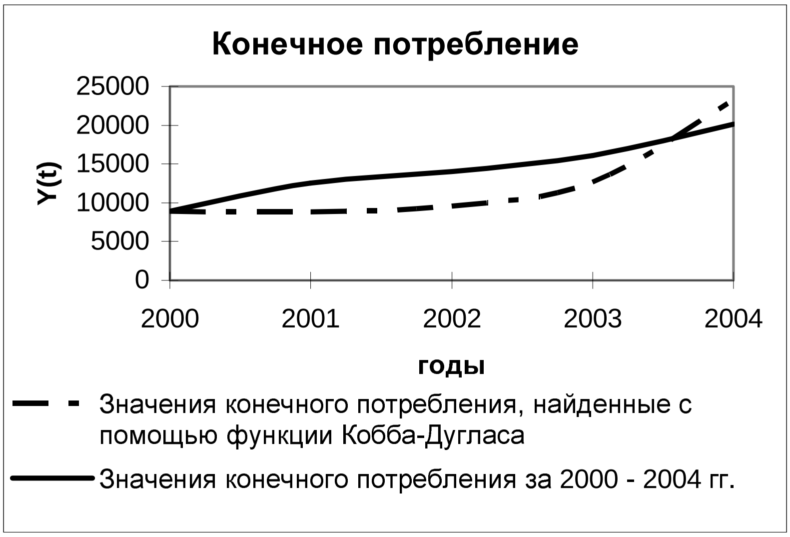

Рис. 2. Конечное потребление дотационного региона (модель функции Кобба-Дугласа)

В данном случае средняя абсолютная ошибка равна 28,9 %, без учета дотаций – 5,2%. А ошибка прогнозирования соответственно с учетом и без учета дотаций составляет 140% и 17,7%. Следовательно, при использовании функции Кобба-Дугласа наиболее достоверный результат получается без учета дотаций.

Теперь рассмотрим производственную функцию Леонтьева – $Y(t) = \min\left(\frac{K(t)}{a}; \frac{L(t)}{b}\right)$.

Оптимальные значения параметров функции Леонтьева равны: $a = 1{,}7, b = 2$, тогда конечное потребление представляется следующей функцией:

$$Y(t) = \min\left(\frac{\sum_{i}^{6} \frac{1}{i} q_i t^i}{1{,}7}; \frac{\bar{l}}{2} e^{\eta \cdot t}\right).$$

Средняя абсолютная ошибка аппроксимации равна 24,8%, а без учета дотаций – 8,5%.

Однако ошибка прогнозирования еще выше, чем в представленных случаях и составляет 213%. Также как и в случае с применением функции Кобба-Дугласа, наиболее точные результаты прогнозирования достигаются без учета дотаций и составляют 22%.

Рис. 3. Конечное потребление дотационного региона (модель функции Леонтьева)

Рассмотрим производственную функцию с постоянной эластичностью замены, с оптимальными значениями параметров равными $A = 1, \alpha = 0{,}62, \rho = 0{,}42, \gamma = 0{,}31$, тогда производственная функция будет иметь следующий вид:

$$Y(t) = \left(0{,}62 \left(\sum_{i=0}^{6} \frac{1}{i} q_i t^i \right)^{-0,42} + 0{,}71 \left(\bar{l} \cdot e^{\eta \cdot t} \right)^{-0,42} \right)^{-0,74}.$$

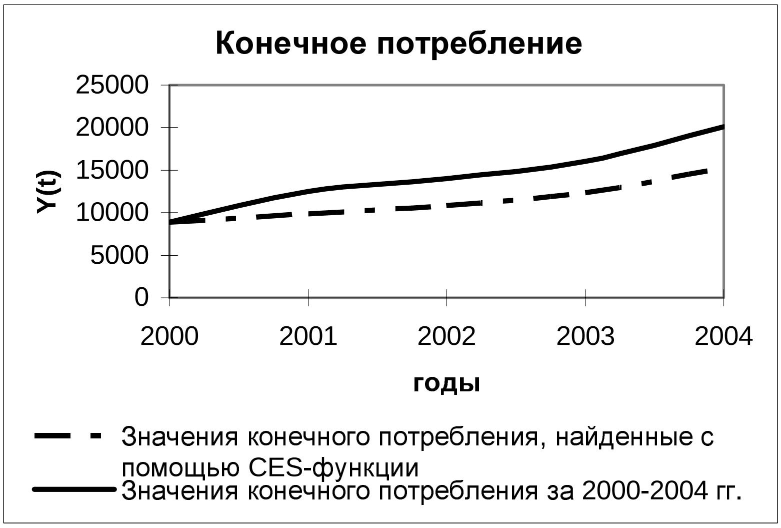

Рис. 4. Конечное потребление дотационного региона
(модель функции с постоянной эластичностью замены)

Для производственной функции с постоянной эластичностью замены с учетом дотаций средняя абсолютная ошибка при проверке данных на 2000 – 2004 гг. равна 18%, а без учета дотаций – 23%. При прогнозировании конечного потребления на 2005 г. с использованием данной функции приводит с учетом и без учета дотаций соответственно 8,5% и 41%.

Таким образом, в данной работе при моделировании дотационного региона была применена однопродуктовая динамическая модель с учетом дотаций, был проведен сопоставительный анализ с аналогичной моделью для бездотационного региона. Проведенный анализ показывает, что при построении однопродуктовой модели экономики дотационного региона наиболее предподчтительно использовать производственную функцию с постоянной эластичностью замены.

Литература

1. *Гиш, А.З.* Использование однопродуктовых моделей для анализа и прогнозирования развития экономики региона [Текст]/А.З. Гиш, М.А.Х. Уртенов//Труды Кубанского государственного аграрного университета. 2009. Р. 1. – №20.
2. *Гиш, А.З.* Построение агрегированной модели и исследование адекватности производственной функции (на примере Республики Адыгея) [Текст] / А.З. Гиш; Труды VI Всероссийской конференции молодых ученых и студентов «Современное состояние и приоритеты развития фундаментальных наук в регионах». – Издательство Просвещение-Юг, 2009. – с. 214 – 216.
3. *Горстко, А.Б.* Введение в моделирование эколого-экономических систем [Текст] / А.Б. Горстко, Г.А. Угольницкий – Ростов н/Д: Издательство Ростовского университета, 1990.
4. *Гурман, Е.В.* Моделирование социо-эколого-экономической системы региона [Текст]/Под ред. В.И. Гурмана, Е.В. Рюминой. – М.: Наука, 2001.
5. *Калемаев, В.А.* Математическая экономика: учебник для вузов [Текст]/В.А. Калемаев; 2-е изд., перераб. и доп. – М.: ЮНИТИ-ДАНА, 2002.
6. Регионы России. Социально-экономические показатели. 2006: Стат. сб. /Росстат. – М., 2007.

A single-product model of the regional subsidy economy development within different production functions

A.Z. Gish

There is a comparative analysis of single-product models of the regional subsidy economy development. The adequacy of the model has been apprising according to the type of the production function.

