О МУЛЬТИПЛИКАТИВНОЙ ВАРИАЦИИ ПОДЫНТЕГРАЛЬНОЙ МАТРИЧНОЙ ФОРМЫ КРИВОЛИНЕЙНОГО МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

Е.Н. Кумшаев, Л.Ж. Паланджянц

Армавирский государственный педагогический университет, г. Армавир

Изучается вопрос о мультипликативной вариации подынтегральной матричной формы криволинейного мультипликативного интеграла.

1. Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл вдоль кривой γ в области $D \subset R^2$ с параметризацией $x = x(t), y = y(t)$ [1]:

$$\overset{\cup}{\int_\gamma} E + P(x,y)dx + Q(x,y)dy, \tag{1}$$

где $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ − непрерывно дифференцируемы функции, определенные в области $D \subset R^2$ со значениями в алгебре квадратных матричных функций $Mat(n,R)$.

$K(P,Q) = Q_x - P_y + PQ - QP$ − кривизна интеграла (1).

Определение. Дифференциальную форму $\omega = Pdx + Qdy$ будем называть полной мультипликативной дифференциальной формой или точной, если $\omega = D\Phi$, где $D\Phi = \Phi^{-1}\Phi_x dx + \Phi^{-1}\Phi_y dy$, $\Phi(x,y)$ − неособая матричная функция.

Известно [2], что, дифференциальная форма $\omega = Pdx + Qdy$ является полной мультипликативной дифференциальной формой тогда и только тогда, когда кривизна интеграла (1) была равна нулю.

Наряду с интегралом (1) рассмотрим интеграл:

$$\overset{\cup}{\int_\gamma} E + M(x,y)P(x,y)dx + M(x,y)Q(x,y)dy, \tag{2}$$

где $M(x,y)$ − непрерывно дифференцируемая функция, определенная в области $D \subset R^2$ со значениями в алгебре квадратных матричных функций $Mat(n,R)$.

Найдем условия, при каких подынтегральная матричная дифференциальная форма интеграла (2) является полной мультипликативной дифференциальной формой. Эта задача при условиях неособости матричных функций $P(x,y)$ и $Q(x,y)$ и при $K(MP,MQ) = 0$ рассматривалась в работе [3]. Наш метод позволяет в явном виде предъявить матрицу M.

Условие $K(MP,MQ) = 0$ равносильно условиям

$$MP = C^{-1}C_x,\ MQ = C^{-1}C_y, \tag{3}$$

где $C(x,y)$ − неособая матричная функция порядка $n \times n$.

Из равенства (3) в силу неособости матричной функции $P(x,y)$ следует, что

$$M = C^{-1}C_x P^{-1},\ M = C^{-1}C_y Q^{-1}, \tag{4}$$

Из уравнений (4) следует, что

$$C_x P^{-1} Q = C_y\,, \tag{5}$$

Введем обозначение: $P^{-1}Q = A$. Тогда уравнение (5) перепишется в виде:

$$C_y = C_x A\,. \tag{6}$$

Запишем уравнение (6) в виде:

$$\frac{\partial c_{ij}}{\partial y} = \sum_{s=1}^{n} \frac{\partial c_{is}}{\partial x} \cdot a_{sj}\,, \quad i, j = 1,2,...,n, \tag{7}$$

где $C(x, y) = (c_{ij}), \quad A = (a_{ij})$.

Транспонируем систему (7) и запишем ее с помощью вектор-столбцов и транспонированной матрицы A^T:

$$c_{sy} = A^T c_{sx}\,,\ s = 1,2....,n\,, \tag{8}$$

где $c_s = \begin{pmatrix} c_{s1} \\ c_{s2} \\ \vdots \\ c_{sn} \end{pmatrix}, s = 1,2....,n\,.$

Очевидно, что столбы матрицы $C(x, y)$ удовлетворяют одним и тем же уравнениям. Это обстоятельство позволяет считать элементы первого столбца матрицы C независимыми функциями, а элементы остальных столбцов − произвольными функциями от соответствующих элементов первого столбца. Такое предположение удобно еще и тем, что частные производные элементов столбца по одной и той же переменной будут связаны некоторыми соотношениями, в то время как частные производные элементов столбца по разным переменным связаны системой (7). Такая зависимость позволит записать систему (8) в таком виде, в котором присутствуют лишь частные производные от одной и той же переменной.

Предположим, что все строки матрицы $C(x, y)$ являются функциями от первой строки $c_{sj} = \varphi_{sj}(c_{1j})$, где $\varphi_{sj}(c_{1j})$, $s = 2,...,n$, $j = 1,2,...,n$ − линейно независимые функции.

Итак, выполнены условия:

$$\begin{pmatrix} c_{s1} \\ c_{s2} \\ \vdots \\ c_{sn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi_{s1}(c_{11}) \\ \varphi_{s2}(c_{12}) \\ \vdots \\ \varphi_{sn}(c_{1n}) \end{pmatrix} \tag{9}$$

где функции φ_{sj}, $s = 2,...,n,\ j = 1,2,...,n$ − линейно независимы.

Введем обозначение:

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \varphi_{s1}(c_{11})}{\partial c_{11}} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\partial \varphi_{s2}(c_{12})}{\partial c_{12}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{\partial \varphi_{sn}(c_{1n})}{\partial c_{1n}} \end{pmatrix},\ s = 2,...,n\,.$$

Тогда, дифференцируя равенство (9) по x и по y, получаем:

$$c_{sx} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} \cdot c_{1x},\ s = 2,...,n, \tag{10}$$

$$c_{sy} = \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} \cdot c_{1y},\ s = 2,...,n. \tag{11}$$

Подставим равенства (10) и (11) и в равенство (8).

$$\frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} c_{1y} = A^T \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} c_{1x},\ s = 2,...,n. \tag{12}$$

Учитывая, что $c_{1y} = A^T c_{1x}$, из равенства (12), получаем

$$\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} A^T - A^T \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} \right) \cdot c_{1x} = 0,\quad s = 2,...,n, \tag{13}$$

$$\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} - A^T \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} (A^T)^{-1} \right) \cdot c_{1y} = 0,\ s = 2,...,n. \tag{14}$$

Таким образом, для вычисления первой строки матричной функции $C(x, y)$ получили систему дифференциальные уравнения в частных производных первого порядка (13) и (14), а для вычисления остальных строк имеется функциональная зависимость строк от первой строки (9).

Решение системы уравнений (13) и (14).

1. Пусть $\det\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} A^T - A^T \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} \right) \neq 0$. Из очевидного равенства

$\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} - A^T \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} (A^T)^{-1} \right) = \left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} A^T - A^T \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} \right) \cdot (A^T)^{-1}$ следует, что

$\det\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} - A^T \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} (A^T)^{-1} \right) \neq 0$ в виду неособости матрицы A.

Тогда уравнения (13) и (14) имеют тривиальные решения $c_{1x} = 0$ и $c_{1y} = 0$, откуда следует, что $c_1 = const$. Следовательно, $MP = 0$ и $MQ = 0$. Строки матрицы $M = (m_{ij})$ удовлетворяют одним и тем же линейным однородным уравнениям:

$(m_{i1}, m_{i2},..., m_{in}) \cdot P^T = 0,\ i = 1,2,...,n,\ (m_{i1}, m_{i2},..., m_{in}) \cdot Q^T = 0,\ i = 1,2,...,n,$

В силу неособости матриц $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ имеем $M = 0$.

2. Пусть $\det\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} A^T - A^T \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} \right) = 0$. Очевидно, что

$\det\left(\frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} - A^T \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} (A^T)^{-1} \right) = 0$.

Введем обозначение: $B_s = \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1} A^T - A^T \frac{\partial \Phi_s}{\partial c_1}$. Тогда имеем $B_s = (b_{ij})_s$, где

$(b_{ij})_s = (a_{ji} (\frac{\partial \varphi_{si}(c_{1j})}{\partial c_i} - \frac{\partial \varphi_{sj}(c_{1j})}{\partial c_j}))$.

Предположим, что $rangB_s = r_s < n$. Выделим минор M_s порядка r. Для простоты будем считать, что этот минор образован первыми r строками и первыми r столбцами матрицы B_s. Остальные строки матрицы B будут линейными комбинациями первых r строк. Запишем систему (13) в виде:

$$\sum_{j=1}^{r} a_{ji}\left(\frac{\partial\varphi_{si}(c_{1j})}{\partial c_i}-\frac{\partial\varphi_{sj}(c_{1j})}{\partial c_j}\right)\cdot\frac{\partial c_{1j}}{\partial x}=-\sum_{j=r+1}^{n} a_{ji}\left(\frac{\partial\varphi_{si}(c_{1j})}{\partial c_i}-\frac{\partial\varphi_{sj}(c_{1j})}{\partial c_j}\right)\cdot\frac{\partial c_{1j}}{\partial x}. \quad (15)$$

Введем матричное обозначение:

$$M_s=\left(a_{ji}\left(\frac{\partial\varphi_{si}(c_{1i})}{\partial c_i}-\frac{\partial\varphi_{sj}(c_{1j})}{\partial c_j}\right)\right),\ i,j=1,2...,r.$$

$$b_s=\left(-\sum_{j=r+1}^{n} a_{ji}\left(\frac{\partial\varphi_{si}(c_{1j})}{\partial c_i}-\frac{\partial\varphi_{sj}(c_{1j})}{\partial c_j}\right)\right),\ i=1,2...,r.$$

Тогда система (15) запишется в матричном виде:

$$M_s(c_1)\cdot\frac{\partial c_1}{\partial x}=b_s(c_1) \quad (16)$$

Аналогичные преобразования проведем с системой (14).

Введем обозначение: $D_s=\dfrac{\partial\Phi_s}{\partial c_1}-A^T\dfrac{\partial\Phi_s}{\partial c_1}(A^T)^{-1}$. Тогда имеем $D_s=(d_{ij})_s$,

$(A^T)^{-1}=\dfrac{(A_{ij})}{\det A}$, где $(d_{ij})_s=\left(a_{ji}\left(\dfrac{\partial\varphi_{si}(c_{1j})}{\partial c_i}-\dfrac{\partial\varphi_{sj}(c_{1j})}{\partial c_j}\right)\cdot\dfrac{A_{ij}}{\det A}\right)$.

Поскольку ранг произведения двух матриц не превосходит ранга каждой матрицы-сомножителя:

$rang(B\cdot(A^T)^{-1})\le\min(rangB, rang(A^T)^{-1})$, и матрица A не выраждена, то ранг произведения матриц совпадает с рангом матрицы B:

$rang(B\cdot(A^T)^{-1})=rangB=r$.

Выделим минор N_{sr} порядка r и запишем систему (14) в виде:

$$\begin{gathered}\sum_{m=1}^{r} a_{jm}\left(\frac{\partial\varphi_{sm}(c_{1m})}{\partial c_m}-\frac{\partial\varphi_{sj}(c_{1j})}{\partial c_j}\right)\cdot\frac{A_{mj}}{\det A}=\\ =-\sum_{m=1}^{r} a_{jm}\left(\frac{\partial\varphi_{sm}(c_{1m})}{\partial c_m}-\frac{\partial\varphi_{sj}(c_{1j})}{\partial c_j}\right)\cdot\frac{A_{mj}}{\det A}\end{gathered} \quad (17)$$

Введем обозначение:

$$N_s=\left(a_{ji}\left(\frac{\partial\varphi_{si}(c_{1i})}{\partial c_i}-\frac{\partial\varphi_{sj}(c_{1j})}{\partial c_j}\right)\right),\ i,j=1,2...,r.$$

$$l_s=\left(-\sum_{j=r+1}^{n} a_{ji}\left(\frac{\partial\varphi_{si}(c_{1i})}{\partial c_i}-\frac{\partial\varphi_{sj}(c_{1j})}{\partial c_j}\right)\frac{A_{mj}}{\det A}\right),\ i=1,2...,r.$$

Тогда система (13) запишется в матричном виде:

$$N_s(c_1)\cdot\frac{\partial c_1}{\partial y}=l_s(c_1) \quad (18)$$

Решим совместно системы (16) и (18). Имеем

$$\frac{\partial c_1}{\partial x}=M_s^{-1}(c_1)\cdot b_s(c_1),\quad \frac{\partial c_1}{\partial y}=N_s^{-1}(c_1)\cdot l_s(c_1). \quad (19)$$

Получаем систему $2r$ уравнений с $2n$ неизвестными

$c_{1x}=(c_{11},c_{12},...,c_{1n})_x$, $c_{1y}=(c_{11},c_{12},...,c_{1n})_y$.

С учетом условия совместности системы (17):

$$\frac{\partial}{\partial y}(M_s^{-1}(c_1)\cdot b_s(c_1)) = \frac{\partial}{\partial x}(N_s^{-1}(c_1)\cdot l_s(c_1)), \tag{20}$$

система (17) разрешима относительно $c_1 = (c_{11}, c_{12}, ..., c_{1n})$.

Следовательно, первая строка матричной функции $C(x, y)$ вычисляется в явном виде. Остальные строки матричной функции $C(x, y)$ вычисляются согласно формуле (9). Таким образом, матричная функция $C(x, y)$ вычисляется в явном виде, а, следовательно, и матричная функция $M(x, y)$ вычисляется в явном виде.

Пример 1. Пусть $n = 3$. Тогда из уравнений (15) и (16) следует, что

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{21}\left(\frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{s2}}{\partial c_{12}}\right) & a_{31}\left(\frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{s3}}{\partial c_{13}}\right) \\ a_{12}\left(\frac{\partial\varphi_{s2}}{\partial c_{12}} - \frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial c_{11}}\right) & 0 & a_{32}\left(\frac{\partial\varphi_{s2}}{\partial c_{12}} - \frac{\partial\varphi_{s3}}{\partial c_{13}}\right) \\ a_{13}\left(\frac{\partial\varphi_{s3}}{\partial c_{13}} - \frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial c_{11}}\right) & a_{23}\left(\frac{\partial\varphi_{s3}}{\partial c_{13}} - \frac{\partial\varphi_{s2}}{\partial c_{12}}\right) & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{pmatrix}_x = 0,$$

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{21}\left(\frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{s2}}{\partial c_{12}}\right) & a_{31}\left(\frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{s3}}{\partial c_{13}}\right) \\ a_{12}\left(\frac{\partial\varphi_{s2}}{\partial c_{12}} - \frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial c_{11}}\right) & 0 & a_{32}\left(\frac{\partial\varphi_{s2}}{\partial c_{12}} - \frac{\partial\varphi_{s3}}{\partial c_{13}}\right) \\ a_{13}\left(\frac{\partial\varphi_{s3}}{\partial c_{13}} - \frac{\partial\varphi_{s1}}{\partial c_{11}}\right) & a_{23}\left(\frac{\partial\varphi_{s3}}{\partial c_{13}} - \frac{\partial\varphi_{s2}}{\partial c_{12}}\right) & 0 \end{pmatrix} \cdot (A^T)^{-1} \cdot \begin{pmatrix} c_{11} \\ c_{12} \\ c_{13} \end{pmatrix}_y = 0$$

$s = 2,3$.

Предположим, что $rang(\Phi_s A^T - A^T \Phi_s) = 1$, $s = 2,3$. Тогда $rang(\Phi_s A^T - A^T \Phi_s)\cdot(A^T)^{-1} = 1$, $s = 2,3$. Выбрав в качестве ненулевой строки первую строку матриц обеих уравнений, для вычисления c_{1x} и c_{1y} получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} 0\cdot c_{11x} + a_{21}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial c_{12}}\right)\cdot c_{12x} + a_{31}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial c_{13}}\right)\cdot c_{13x} = 0, \\ (a_{21}A_{21}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial c_{12}}\right) + a_{31}A_{33}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial c_{13}}\right))\cdot c_{11y} + \\ + (a_{21}A_{21}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial c_{12}}\right) + a_{31}A_{33}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial c_{13}}\right))\cdot c_{12y} + \\ + (a_{21}A_{21}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial c_{12}}\right) + a_{31}A_{33}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial c_{13}}\right))\cdot c_{13y} = 0. \end{cases} \tag{21}$$

Найдем некоторое частное решение системы (21). Полагая, что $c_{11x}, c_{12x}, c_{11y}, c_{12y}$ являются произвольными функциями, для вычисления c_{13} после соответствующих обозначений получаем систему дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка:

$$c_{13x} = -\frac{a_{21}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial c_{12}}\right)\cdot c_{12x}}{a_{31}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial c_{13}}\right)}, \quad c_{13y} = \frac{-f_1c_{11y} - f_2c_{12y}}{f_3} \tag{22}$$

с условием интегрируемости

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{a_{21}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial c_{12}}\right)\cdot c_{12x}}{a_{31}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial c_{13}}\right)}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{-f_1c_{11y} - f_2c_{12y}}{f_3}\right).$$

Из системы (22) следует (см., например, [4], с.59), что

$$c_{13} = -\int\frac{a_{21}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial c_{12}}\right)\cdot c_{12x}}{a_{31}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial c_{13}}\right)}dx + \frac{f_1c_{11y} + f_2c_{12y}}{f_3}dy\,.$$

Таким образом, первый столбец матричной функции $C(x, y)$ запишется в виде:

$$c_1 = colon(c_{11}, c_{12}, -\int\frac{a_{21}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{22}}{\partial c_{12}}\right)\cdot c_{12x}}{a_{31}\left(\frac{\partial\varphi_{21}}{\partial c_{11}} - \frac{\partial\varphi_{23}}{\partial c_{13}}\right)}dx + \frac{f_1c_{11y} + f_2c_{12y}}{f_3}dy)\,.$$

Остальные столбцы матричной функции $C(x, y)$ вычисляются согласно предположению (9).

Следовательно, согласно равенствам (4), искомая матричная функция $M(x, y)$ вычисляется в явном виде.

2. Аналогично исследуется случай, когда матричные функции $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ являются особыми.

Пусть $K(MP, MQ) = 0$, $rangP(x, y) = r(P) < n$, $rangQ(x, y) = r(Q) < n$.

Тогда матричная функция $M(x, y)$ определяется из дифференциальных уравнений:

$$C_x = CMP \quad \text{или} \quad C_y = CMQ$$

Условие $K(MP, MQ) = 0$ равносильно условиям $MP = C^{-1}C_x$, $MQ = C^{-1}C_y$, где $C(x, y)$ − неособая матричная функция порядка $n\times n$.

Из равенств (5) следует, что $\det C\cdot\det M\cdot\det P = \det C_x$, $\det C\cdot\det M\cdot\det Q = \det C_y$, откуда следует, что особость матричных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ влечет за собой особость матричных функций C_x и C_y. Таким образом на матричную функцию $C(x, y)$ накладываются следующие условия:

$$\det C(x, y) \neq 0, \quad \det C_x = 0, \quad \det C_y = 0 \tag{23}$$

Условия (20) являются довольно жесткими, однако, очевидно, что постоянная матрица C удовлетворяет этим условием, что делает сформулированную задачу нетривиальной.

Матричную функцию $M(x, y)$ можно найти из матричного уравнения (5). В виду особости матричных функций $P(x, y)$ и $Q(x, y)$, а также особости матричных функций $C^{-1}C_x$, $C^{-1}C_y$, являющихся правыми частями уравнений (3), необходимое условие для разрешения уравнений (5) соблюдено.

Пример 2. Пусть $n = 2$, $rangP(x, y) = 1$, $rangQ(x, y) = 1$.

Тогда уравнения (3) запишутся в виде:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p_{11} & 0 \\ p_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_x \tag{24}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ q_{21} & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix}_y \tag{25}$$

Из матричных уравнений (24) и (25) следует:

$$\begin{cases} m_{11}c_{11}p_{11} + m_{12}c_{11}p_{21} + m_{11}c_{12}p_{11} + m_{12}c_{12}p_{21} = c_{11x}, \quad c_{12x} = 0, \\ m_{11}c_{21}p_{12} + m_{12}c_{21}p_{12} + m_{21}c_{22}p_{11} + m_{22}c_{22}p_{21} = c_{21x}, \quad c_{22x} = 0, \\ m_{11}c_{11}q_{11} + m_{12}c_{11}q_{21} + m_{11}c_{12}q_{11} + m_{12}c_{12}q_{21} = c_{11y}, \quad c_{12y} = 0, \\ m_{11}c_{21}q_{12} + m_{12}c_{21}q_{12} + m_{21}c_{22}q_{11} + m_{22}c_{22}q_{21} = c_{21y}, \quad c_{22y} = 0 \end{cases} \tag{26}$$

Решим систему (26) относительно m_{ij}, $i, j = 1{,}2$. Для этого умножим первые два уравнения системы (26) на q_{11} и q_{21}, а последние два уравнения на $-p_{11}$ и $-p_{21}$. Сложим первое уравнение с третьим, а второе – с четвертым. Тогда система (26) запишется в виде:

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{11} \\ m_{21} \end{pmatrix} = \frac{1}{p_{11}q_{21} - q_{11}p_{21}} \begin{pmatrix} c_{11x}q_{21} - c_{11y}p_{21} \\ c_{21x}q_{21} - c_{21y}p_{21} \end{pmatrix}, \tag{27}$$

$$\begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} m_{12} \\ m_{22} \end{pmatrix} = \frac{1}{p_{21}q_{11} - q_{21}p_{11}} \begin{pmatrix} c_{11x}q_{11} - c_{11y}p_{11} \\ c_{21x}q_{11} - c_{21y}p_{11} \end{pmatrix}. \tag{28}$$

Из матричных уравнений (27) и (28) можно однозначно найти m_{ij}, $i, j = 1{,}2$.

При этом матричная функция $C(x, y)$ такова, что первый столбец произвольный, а второй – постоянный, что обеспечивает выполнение условия (23).

Литература

1. *Мантуров О.В.* Мультипликативный интеграл // Проблемы геометрии. – 1990. - Т. 22. - С. 167-215.
2. *Паланджянц Л.Ж.* Геометрия мультипликативного интеграла. − Майкоп: МП «Качество», 1997. − 94 с.
3. *Мартынюк А.Н.* Об одной задаче теории мультипликативного интеграла / Приложения дифференциальной геометрии. Межвузовский сборник научных трудов. − Воронеж: ВГПИ, 1989. − 80 с.
4. *Камке Э.* Справочник по дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка. – М.: Наука, 1960. – 260 с.

About the multiplicative variation of the subintegral matrix form of curvilinear multiplicative integral

E.N. Kumshaev, L.Z.Palandzhjants

In the paper the methods of evaluation of curvature multiplicative integral of matrix functions of multiplicative variation of the exact matrix differential form are considered.

