2009 г. №14

Труды ФОРА

О ПОВЕДЕНИИ РЕШЕНИЙ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ПРЕОБРАЗОВАННЫМ АРГУМЕНТОМ В БАНАХОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

К.С. Мамий

Адыгейский государственный университет, г.Майкоп

В работе получены достаточные условия ограниченности, стремления к нулю, устойчивости и асимптотической устойчивости решений нелинейного дифференциального уравнения с преобразованным аргументом в банаховом пространстве.

Пусть X – банахово пространство, а $\mathbb{B}(X)$ – пространство линейных ограниченных операторов, действующих в X. Рассмотрим уравнение

$$u'(t) = A(t)u(t) + f(t; u(t); u(\alpha(t))),\ t \geqslant 0, \tag{1}$$

где функции $A : [0; +\infty[\to \mathbb{B}(X)$, $f : [0; +\infty[\times X \times X \to X$ – сильно непрерывны (для простоты). Кроме того, будем предполагать, что выполнены следующие условия: $\exists m > 0 \exists \gamma, \beta \in C[0; +\infty[\forall t \geqslant 0 \forall u, v \in X :$

$$\|f(t; u; v)\| \leqslant \gamma(t)\|u\|^m + \beta(t)\|v\|^m; \tag{2}$$

$$\alpha \in C^1[0; +\infty[; \exists h \geqslant 0 \exists \delta \in]0; 1] : \alpha'(t) \geqslant \delta \wedge t - h \leqslant \alpha(t) \forall \geqslant 0.$$

Оператор Коши $K(t; s)$ однородного уравнения

$$u'(t) = A(t)u(t) \tag{3}$$

удовлетворяет оценке:

$$\|K(t; s)\| \leqslant C \cdot \exp\Big[\int\limits_s^t R(\tau)d\tau\Big],\ \ 0 \leqslant s \leqslant t < +\infty,$$

где $R : [0; +\infty[\to \mathbb{B}$ – измерима и ограничена ($|R(t)| \leqslant k\ \forall t \geqslant 0$), $C = \text{const}\ > 0$, возможно зависящая от R. Введем теперь некоторые обозначения: ψ – функция, обратная к α,

$$C_0 = C\|u(t_0)\|,\ \ C_1 = C(1 + 1/\delta \exp(kh)),$$

$$r(t) = [\gamma(t) + \beta(\psi(t))] \exp\Big[(m-1)\int\limits_{t_0}^t R(\tau d\tau\Big], C_2 = \exp\Big(C_1 \int\limits_{\alpha(t_0)}^{t_0} r(s)ds\Big),$$

$C_3 = C_2 C_0$.

Теорема. Пусть выполнены все перечисленные выше условия и пусть еще f удовлетворяет каким-либо условиям существования решения уравнения (1) на $[0; \infty[$. Тогда для любого решения $u(t)$ уравнения (1) справедливы следующие оценки:

$$1.^\circ\ \ \|u(t)\| \leqslant C_3 \exp\Big(\int\limits_{t_0}^t [R(s) + C_1 r(s)]ds\Big),\ \ t \geqslant t_0 \geqslant h, \text{если } m = 1.$$

$$2.^\circ\ \ \|u(t)\| \leqslant \Big[C_0^{1-m} + (1-m)C_1 \int\limits_{\alpha(t_0)}^t r(s)ds\Big]^{\frac{1}{1-m}} \exp\Big(\int\limits_{t_0}^t R(s)ds\Big),\ \ t \geqslant t_0 \geqslant h, \text{если } 0 < m < 1.$$

$$3.^\circ \quad \|u(t)\| \leqslant C_0 \exp\Big(\int\limits_{t_0}^{t} R(s)ds\Big[1-(m-1)C_0^{m-1}C_1\int\limits_{\alpha(t_0)}^{t} r(s)ds\Big]^{\frac{1}{1-m}}\Big),$$

если $m>1$ и $(m-1)C_0^{m-1}C_1\int_{\alpha(t_0)}^{t} r(s)ds<1 \ \forall t\geqslant t_0$.

Следствие I. Пусть $m=1$. Тогда:

1) Если все решения уравнения (3) ограничены на $[0;+\infty[$ и $\int^{+\infty} r(s)ds<+\infty$, то и все решения уравнения (1) будут ограничены на $[0;+\infty[$, а нулевое решение уравнения (1) будет устойчивым по Ляпунову; если при этом функции γ и β ограничены, то устойчивость нулевого решения уравнения (1) будет равномерной относительно выбора t_0.

2) Если функция $\int_0^t[R(s)+C_1r(s)]ds$ ограничена сверху, то все решения уравнения (1) ограничены на $[0;+\infty[$. Если же

$$\lim_{t\to+\infty}\int\limits_0^t[R(s)+C_1r(s)]ds=-\infty,$$

то все решения уравнения (1) стремятся к нулю при $t\to+\infty$.

3) Если $R(t)=-k<0$ и

$$\overline{\lim_{t\to-\infty}}\frac{C_1}{t-t_0}\int\limits_{t_0}^{t} r(s)ds=l<k,$$

то все решения уравнения (1) стремятся к нулю при $t\to+\infty$, а нулевое решение экспоненциально асимтотически устойчиво в целом.

Следствие II. Пусть $0<m<1$ и $\int^{+\infty} r(s)ds<+\infty$. Тогда, если функция $\int\limits_0^t R(s)ds$ ограничена сверху (стремится к $-\infty$ при $t\to+\infty$), то все решения уравнения (1) ограничены (стремятся к нулю при $t\to+\infty$).

Следствие III. Пусть $m>1$ и $\int^{+\infty} r(s)ds<+\infty$. Тогда, если функция $\int_0^t R(s)ds$ ограничена сверху (стремится к $-\infty$ при $t\to+\infty$), то все решения уравнения (1) с достаточно малыми начальными значениями ограничены на $[0;+\infty[$ (стремятся к нулю при $t\to+\infty$).

Заметим, что при $m>1$ достаточно потребовать, чтобы условие (2) выполнялось лишь при достаточно малых $\|u\|$ и $\|v\|$ и $\forall t\geqslant 0$.

Установленная теорема и ее следствия могут найти применение для исследования поведения решения при $t\to+\infty$, решения систем интегро-дифференциальных, счетных систем обыкновенных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом и др.

About behaviour of solutions of one nonlinear differential equation with the transformed argument in a Banach space

K.S. Mamiy

The sufficient conditions of boundedness, rushing to zero, a stability and an asymptotic stability of solutions of the nonlinear differential equation with the transformed argument in a Banach space are received.

