ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ, ИМЕЮЩИЕ ОСЬ СИММЕТРИИ

А.Д. Ушхо, М.В. Фоменко

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В статье доказано, что автономная дифференциальная система с полиномами n-ой степени в правых частях имеет не более *n*+1 – осей симметрии. Если в правых частях системы имеются многочлены четной степени, то эта система не имеет четного числа осей симметрии. В частности квадратичная система может иметь только одну или три оси симметрии.

Пусть начало координат (0;0) системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q(x,y), \end{cases} \tag{1}$$

с аналитическими правыми частями является особой точкой второй группы, т.е. точкой, для которой возникает проблема центра – фокуса [1]. Тогда (0,0) – центр, если через эту точку проходит хотя бы одна ось симметрии поля направлений системы (1).

Вот почему, на наш взгляд, авторами работы [2] проведено исчерпывающее исследование на симметрию поля направлений кубического дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{x + c_{20}x^2 + c_{11}xy + c_{02}y^2 + c_{30}x^3 + c_{21}x^2y + c_{12}xy^2 + c_{03}y^3}{y + b_{20}x^2 + b_{11}xy + b_{02}y^2 + b_{30}x^3 + b_{21}x^2y + b_{12}xy^2 + b_{03}y^3}. \tag{2}$$

В настоящей работе изучается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = P_n(x,y), \\ \dfrac{dy}{dt} = Q_n(x,y); \end{cases} \tag{3}$$

где $P_n(x,y)$ и $Q_n(x,y)$ - взаимно простые многочлены степени *n* с действительными коэффициентами, $n \in \mathrm{N}, n \geq 2$. При этом доказывается, что число осей симметрии векторного поля, определяемого системой (3), не превышает $n+1$. Кроме этого, доказывается, что при $n = 2m, m \in \mathrm{N}$ система (3) не имеет четного числа осей симметрии, в частности и квадратичная система не может иметь две оси симметрии в точности.

Замечание 1. Прямую $l: y = kx$ будем называть осью симметрии поля направлений системы (3), если в результате преобразования

$$\overline{x} = x + kx, \overline{y} = -kx + y \tag{4}$$

система (3) переходит в систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{dt} = \overline{P}_n(\overline{x},\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{dt} = \overline{Q}_n(\overline{x},\overline{y}); \end{cases} \tag{5}$$

для которой выполняется условие: $\overline{P}_n(\overline{x},-\overline{y}) = -\overline{y}\overline{P}_n(\overline{x},-\overline{y}), \overline{Q}_n(\overline{x},-\overline{y}) = \overline{Q}_n(\overline{x},-\overline{y})$.

Теорема 1. Если прямая $y = kx$ - ось симметрии поля направлений системы (3), то эта прямая является изоклиной системы (3), причем: $\dfrac{Q_n(x,kx)}{P_n(x,kx)} \equiv -\dfrac{1}{k}, k \neq 0.$

Доказательство: В результате преобразования (4) система (3) перейдет в систему (5), где

$$\begin{cases} \overline{P_n}(\bar{x},\bar{y}) = P_n(x,y) + kQ_n(x,y), \\ \overline{Q_n}(\bar{x},\bar{y}) = Q_n(x,y) - kP_n(x,y); \end{cases} \tag{6}$$

Так как по условию теоремы прямая $y = kx$ - ось симметрии системы (3), то прямая $\bar{y} = 0$ - ось симметрии системы (5). Это означает, что $\overline{P_n}(\bar{x},0) \equiv 0$, т.е. с учетом равенства (6) получим равенство $P_n(x,kx) + kQ_n(x,kx) \equiv 0$, откуда следует требуемое равенство. Теорема доказана.

Из теоремы 1 следует, что любую ось симметрии системы (3), проходящую через начало координат, траектории этой системы пересекают под прямым углом.

Следствие 1. Любая простая точка покоя системы (3), расположенная на оси симметрии поля ее направлений, является либо центром, либо седлом.

Пусть далее система (3) имеет две оси симметрии: $y = k_1 x, y = k_2 x, k_1 \cdot k_2 \neq 0.$

Согласно теореме 1 выполняются равенства:

$$P_n(x,k_1x) + k_1Q_n(x,k_1x) \equiv 0 \tag{7}$$

$$P_n(x,k_2x) + k_2Q_n(x,k_2x) \equiv 0 \tag{8}$$

Из (7) и (8) следуют равенства:

$$P_n(x,y) + k_1Q_n(x,y) \equiv (y - k_1x)R_{n-1}(x,y) \tag{9}$$

$$P_n(x,y) + k_2Q_n(x,y) \equiv (y - k_2x)S_{n-1}(x,y) \tag{10}$$

где

$$R_{n-1}(x,y) = \sum_{i+j=0}^{n-1} r_{ij}x^iy^j,\ S_{n-1}(x,y) = \sum_{i+j=0}^{n-1} s_{ij}x^iy^j, \tag{11}$$

Разрешив систему (9), (10) относительно $P_n(x,y)$ и $Q_n(x,y)$, получаем следующие соотношения:

$$P_n(x,y) = \frac{1}{k_2 - k_1}\left[k_2(y - k_1x)R_{n-1}(x,y) - k_1(y - k_2x)S_{n-1}(x,y)\right],$$

$$Q_n(x,y) = \frac{1}{k_2 - k_1}\left[(y - k_2x)S_{n-1}(x,y) - (y - k_1x)R_{n-1}(x,y)\right].$$

Вводя новый масштаб времени, $d\tau = \dfrac{dt}{k_2 - k_1}$, придадим системе (3) вид:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\tau} = k_2(y - k_1x)R_{n-1}(x,y) - k_1(y - k_2x)S_{n-1}(x,y), \\ \dfrac{dy}{d\tau} = -(y - k_1x)R_{n-1}(x,y) + (y - k_2x)S_{n-1}(x,y); \end{cases} \tag{12}$$

Предположим, что система (3) имеет ровно две оси симметрии. Тогда, очевидно, они взаимно перпендикулярны, то есть $k_1 \cdot k_2 + 1 = 0.$

Осуществляя изменение масштаба времени по формуле $d\mu = -\dfrac{d\tau}{k}$, перепишем систему (12) в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{d\mu} = (y-kx)R_{n-1}(x,y) + k(x+kx)S_{n-1}(x,y), \\ \dfrac{dy}{d\mu} = k(y-kx)R_{n-1}(x,y) - (x+ky)S_{n-1}(x,y); \end{cases} \tag{13}$$

Если к системе (13) применить преобразование (4) и замену, $d\eta = (k^2+1)d\mu,$ то она преобразуется в систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\eta} = \overline{y}\overline{R}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{d\eta} = -\overline{x}\overline{S}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}); \end{cases} \tag{14}$$

где

$$\overline{R}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}) = R_{n-1}\left(\frac{\overline{x}}{k^2+1} - \frac{k\overline{y}}{k^2+1}; \frac{k\overline{x}}{k^2+1} + \frac{\overline{y}}{k^2+1}\right),$$

$$\overline{S}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}) = S_{n-1}\left(\frac{\overline{x}}{k^2+1} - \frac{k\overline{y}}{k^2+1}; \frac{k\overline{x}}{k^2+1} + \frac{\overline{y}}{k^2+1}\right).$$

Теорема 2. Если система (3) имеет две и только две оси симметрии, то ее подходящим преобразованием поворота можно привести к системе (14), где

$$\begin{aligned} &\overline{R}_{n-1}(\overline{x},-\overline{y}) = \overline{R}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}), \overline{R}_{n-1}(-\overline{x},\overline{y}) = \overline{R}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}), \\ &\overline{S}_{n-1}(\overline{x},-\overline{y}) = \overline{S}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}), \overline{S}_{n-1}(-\overline{x},\overline{y}) = \overline{S}_{n-1}(\overline{x},\overline{y}) \end{aligned} \tag{15}$$

Из теоремы 2 следует, что при исследовании поведения траекторий системы (3), имеющей в точности две оси симметрии, достаточно рассмотреть систему (14), разумеется, при выполнении (15).

Теорема 3. Система дифференциальных уравнений (3) при $n = 2m, m \in \mathrm{N}$, и наличии в правых частях уравнений этой системы хотя бы одного одночлена размерности $2m$ не может иметь ровно две оси симметрии.

Доказательство. Пусть, вопреки утверждению теоремы, система (3) имеет ровно две оси симметрии. Не умаляя общности, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dfrac{d\overline{x}}{d\eta} = \overline{y}\overline{R}_{2m-1}(\overline{x},\overline{y}), \\ \dfrac{d\overline{y}}{d\eta} = -\overline{x}\overline{S}_{2m-1}(\overline{x},\overline{y}); \end{cases} \tag{16}$$

где

$$\overline{R}_{2m-1}(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{i+j=0}^{2m-1} r_{ij}\overline{x}^i\overline{y}^j,\ \overline{S}_{2m-1}(\overline{x},\overline{y}) = \sum_{i+j=0}^{2m-1} s_{ij}\overline{x}^i\overline{y}^j, \tag{17}$$

В силу симметрии поля направлений системы (16) относительно прямых $\overline{x} = 0$ и $\overline{y} = 0$ должны быть выполнены условия:

$$\begin{aligned} &\overline{R}_{2m-1}(\overline{x},-\overline{y}) = \overline{R}_{2m-1}(\overline{x},-\overline{y}), \overline{S}_{2m-1}(\overline{x},-\overline{y}) = \overline{S}_{2m-1}(\overline{x},\overline{y}), \\ &\overline{R}_{2m-1}(-\overline{x},\overline{y}) = \overline{R}_{2m-1}(\overline{x},\overline{y}), \overline{S}_{2m-1}(-\overline{x},\overline{y}) = \overline{S}_{2m-1}(\overline{x},\overline{y}) \end{aligned} \tag{18}$$

Каждое слагаемое степени $2m-1$ в правых частях равенств (17) содержит либо $\overline{x}$ в нечетной степени, либо $\overline{y}$ в нечетной степени. Поэтому согласно условиям (18) все одночлены размерности $2m-1$ в правых частях равенств (17) отсутствуют. Пришли к противоречию с тем, что по условию теоремы правые части уравнений системы (16) содержат хотя бы один одночлен размерности $2m$. Теорема доказана.

Следствие 2. если правые части уравнений автономной квадратичной системы содержат хотя бы один квадратичный член, то эта система не имеет ровно двух осей симметрии.

Теорема 4. Число осей симметрии векторного поля системы (3) не превосходит $n+1$, если правые части уравнений этой системы содержат хотя бы один одночлен размерности n.

Доказательство. Полагая, что прямая $-x\sin\alpha + y\cos\alpha = 0$ - ось симметрии векторного поля, определяемого системой (3), применим к этой системе ортогональное преобразование [3]

$$\bar{x} = x\cos\alpha + y\sin\alpha, \bar{y} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \tag{19}$$

В результате получим систему:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \cos\alpha P_n(x,y) + \sin\alpha Q_n(x,y), \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = -\sin\alpha P_n(x,y) + \cos\alpha Q_n(x,y); \end{cases} \tag{20}$$

Заменяя в многочленах P_n и Q_n, а также x и y согласно формулам (19), перепишем систему (20) в виде:

$$\begin{cases} \dfrac{d\bar{x}}{dt} = \overline{P}_n(\bar{x},\bar{y}), \\ \dfrac{d\bar{y}}{dt} = \overline{Q}_n(\bar{x},\bar{y}). \end{cases} \tag{21}$$

Так как прямая $\bar{y} = 0$ - ось симметрии системы (21), то имеют место условия:

$$\overline{P}_n(\bar{x},-\bar{y}) = -\overline{P}_n(\bar{x},\bar{y}), \overline{Q}_n(\bar{x},-\bar{y}) = \overline{Q}_n(\bar{x},-\bar{y}) \tag{22}$$

Условия (22) означают, что $\overline{Q}_n(\bar{x},\bar{y})$ содержит $\bar{y}$ только в четной степени, а каждый одночлен многочлена $\overline{P}_n(\bar{x},\bar{y})$ - в нечетной степени. Поэтому мы получаем систему однородных относительно $\sin\alpha$ и $\cos\alpha$ уравнений, степень которых не превышает $n+1$ (см. систему (20)). Теорема доказана.

В связи с теоремой 4 нужно заметить следующее. Авторами работы [2], в которой проведено исчерпывающее исследование на симметрию кубического дифференциального уравнения (2), имеющего в начале координат особую точку второй группы, допущена неточность. Так, в пункте IV г) упомянутой работы приводятся условия, при выполнении которых по утверждению авторов [2] через начало координат проходит бесконечное множество осей симметрии. Но при тщательной проверке условий IV г) можно увидеть, что числитель и знаменатель дроби в правой части уравнения (2) имеет общий множитель $b_{03}x^2 + b_{03}y^2 + 1$. Иначе говоря, кубическое дифференциальное уравнение вырождается в уравнение $\dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$. Вместе с тем авторы заметки [2] предполагают, что числитель и знаменатель дроби в правой части (2) не имеют общих множителей.

Следствие 3. Если векторное поле системы (3) имеет более $n+1$ осей симметрии, то их число бесконечно, а система (3) вырождается в систему

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y, \\ \dfrac{dy}{dt} = x. \end{cases}$$

Теорема 5. Система дифференциальных уравнений (3) при $n = 2m, m \in \mathrm{N}$ не может иметь, четного числа осей симметрии.

В самом деле, пусть число осей симметрии поля направлений системы (3) равно $2l$, где $1 \le l \le \left[\frac{n+1}{2}\right]$. Не уменьшая общности, считаем, что осью симметрии является прямая $y = 0$ (этого можно добиться с помощью преобразования $\bar{x} = x + ky, \bar{y} = -kx + y$).

Очевидно, любую из $2l$ осей симметрии можно получить поворотом прямой $y = 0$ против хода часовой стрелки на угол, кратный углу $\varphi = \frac{90^0}{l}$. Следовательно, среди осей симметрии находится и прямая $x = 0$. Это означает, что система (3) имеет вид (16). В остальном рассуждения совпадают с теми, которые проведены при доказательстве теоремы 3.

Замечание 2. Как отмечено выше, дифференциальное уравнение, изученное в заметке [2], имеет в начале координат особую точку второй группы.
Мы в настоящей работе не требуем, чтобы начало координат (0;0) системы (3) было только состоянием равновесия второй группы.

Замечание 3. Результаты, полученные в данной работе, можно использовать для получения классов кубических систем, обладающих двумя осями симметрии.

Литература

1. *Амелькин В.В.* Нелинейные колебания в системах второго порядка / В.В. Амелькин, Н.А. Лукашевич, А.П. Садовский. – Минск: Изд-во БГУ, 1982. – 208 с.
2. *Сибирский К.С.* Условия симметрии поля направлений некоторого дифференциального уравнения / К.С. Сибирский, И.И. Плешкан // Ученые записки Кишиневского гос. ун-та. - 1957. - Т. 29. - С. 11-14.
3. *Ильин В.А.* Аналитическая геометрия / В.А. Ильин, Э.Г. Позняк. - М.: Наука, 1981. – 232 с.

Polynomial differential systems with the axis symmetry

A.D. Ushkho, M.V. Fomenko

It is proved that an autonomous differential system with a polynomial *n*-th degree in the right part is not more than *n* +1 - axis of symmetry. This system does not have an even number of axes of symmetry if the right side of the system have even degree polynomials. In particular, the quadratic system can have only one or three axes of symmetry.

