2009 г № 14
Труды ФОРА

ОБ ЭЛЕМЕНТАХ КОЛЬЦА $K^*(G/H)$ И ИХ ХАРАКТЕРАХ ЧЕРНА ДЛЯ ОДНОЙ СЕРИИ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВ G/H#

В.А. Козлов

Армавирский государственный педагогический университет, г. Армавир

В статье построены системы элементы $\gamma(\Theta_i)$ кольца $K^*(SU(N)/SU(2))$, группа $SU(2)$ представлена тензорным произведением своих неприводимых представлений. Найдены характеры Черна элементов $\gamma(\Theta_i)$ и доказана их нетривиальность.

1. Как известно (см. [2]), в K–теории кольцо $K^*(X)$ определяется как сумма

$$K^*(X) = K^0(X) + K^1(X),$$

где X – конечномерный клеточный комплекс, $K^0(X)$ – кольцо стабильно эквивалентных комплексных векторных расслоений, $\widetilde{K}^0(X)$ – подкольцо кольца $K^0(X)$, состоящее из нульмерных элементов, $K^1(X) = \widetilde{K}^0(SX)$, а SX – надстройка над X. Кольцо $K^*(X) - Z_2$ – градуированное и обладает умножением: $K^0 \cdot K^0 \subset K^0$, $K^0 \cdot K^1 \subset K^1$, $K^1 \cdot K^1 \subset K^0$.

Случай $X = G/H$, где и H – компактные группы Ли, изучался в [5]. В [3] подробно рассмотрен случай однородных пространств $SU(N)/SU(2)$ при неприводимом вложении φ_k группы $SU(2)$ в $SU(N)$: в кольце $K^*(SU(N)/SU(2)) \otimes Q$ построены системы образующих элементов в явном виде (в зависимости от φ_k) и вычислены характеры Черна этих элементов (все результаты относятся к комплексной K–теории).

Здесь также рассматриваются пространства $SU(N)/SU(2)$, но при $\varphi = \varphi_p \otimes \varphi_l$, φ_p и φ_l – произвольные, неприводимые представления группы $SU(2)$, $N = (p+1)(l+1)$. Для этих пространств строится система элементов из группы $K^1(SU(N)/SU(2))$ и вычисляются их характеры Черна. Надеемся, что в дальнейшем будет доказано, что построенная система элементов порождает все кольцо $K^*(SU(N)/SU(2)) \otimes Q$.

2. О.В. Мантурову [5] принадлежит конструкция, позволяющая строить пучки из $K^1(G/H)$, G и H – компактные группы Ли.

Рассмотрим в кольце RG представлений группы G элемент Θ, такой, что его ограничение на подгруппу H равно нулевому элементу в кольце представлений RH подгруппы H. Отображение

$$f(\Theta): G/H \to U(n),$$

определенное формулой $f(\Theta)gH = \Phi(g)\Psi^{-1}(g)$, где Φ и Ψ – геометрические («невиртуальные») представления группы G, $\Theta = \Phi - \Psi$, взаимно однозначно (с точность до гомотопности) соответствует элементу $\gamma(\Theta) \in K^1(G/H)$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и администрации Краснодарского края. Проект №09-01-96512 р_юг_а.

Таким образом, вычисление элементов из $K^1(G/H)$, в известной мере, сводится к построению виртуальных представлений Θ, обращающихся в нуль при ограничении на подгруппу.

Пусть χ_1 и χ_2 – некоторые представления группы G размерностей N_1 и N_2 соответственно, и, пусть $P(\chi_1,\chi_2)$ – элемент кольца представлений RG, то есть виртуальное представление, такое, что ограничение $P(\chi_1,\chi_2)$ на подгруппу H равно нулю в кольце представлений RH. Тогда $P(\chi_1,\chi_2)$ – полином от переменных χ_1,χ_2, представимый в виде

$$P(\chi_1,\chi_2)=P_1(\chi_1,\chi_2)-P_2(\chi_1,\chi_2),$$

где $P_1(\chi_1,\chi_2)$, $P_2(\chi_1,\chi_2)$ – являются геометрическими («невиртуальными») представлениями группы G, при этом $\dim P_1(\chi_1,\chi_2)=\dim P_2(\chi_1,\chi_2)=N$. Положим

$$\widetilde{P}_1(\chi_1,\chi_2)=P_1(\chi_1,\chi_2)-N\,,\ \widetilde{P}_2(\chi_1,\chi_2)=P_2(\chi_1,\chi_2)-N\,.$$

Здесь N – N-мерное тривиальное представление группы G. И, далее

$$\widetilde{P}(\widetilde{\chi}_1,\widetilde{\chi}_2)=\widetilde{P}(\widetilde{\chi}_1+N_1,\widetilde{\chi}_2+N_2),$$

где $\widetilde{\chi}_1=\chi_1-N_1$, $\widetilde{\chi}_2=\chi_2-N_2$, N_1, N_2 – соответственно N_1 и N_2-мерные тривиальные представления группы G.

Лемма 1. $ch\gamma(P(\chi_1,\chi_2))=ch\gamma(\widetilde{P}(\widetilde{\chi}_1,\widetilde{\chi}_2))$ и для вычисления характера Черна $ch\gamma(\widetilde{P}(\widetilde{\chi}_1,\widetilde{\chi}_2))$ достаточно знать лишь линейную часть полинома $\widetilde{P}(\widetilde{\chi}_1,\widetilde{\chi}_2)$.

Доказательство. Первое утверждение следует из равенств (см. [5])

$$ch\gamma(P(\chi_1,\chi_2))=ch\gamma(P_1(\chi_1,\chi_2)-N)-ch\gamma(P_2(\chi_1,\chi_2)-N)$$ и

$$ch\gamma(P_i(\chi_1,\chi_2)-N)=ch\gamma(\widetilde{P}_i(\widetilde{\chi}_1,\widetilde{\chi}_2)),\ i=1,2\,.$$

Далее, $\widetilde{P}(\widetilde{\chi}_1,\widetilde{\chi}_2)$ задает элемент группы $K^1(G/H)$. Свойства характера Черна, коэффициентов Дынкина приводят к тому, что в $ch\gamma(\widetilde{P}(\widetilde{\chi}_1,\widetilde{\chi}_2))$ нетривиальной будет только линейная, неразложимая часть, а $ch\gamma(\widetilde{\chi}_1\otimes\widetilde{\chi}_2)=0$, так как

$$\widetilde{\chi}_1\otimes\widetilde{\chi}_2=(\chi_1-N_1)\otimes(\chi_2-N_2)=(\chi_1\otimes\chi_2+N_1\otimes N_2)-(\chi_1\otimes N_2+\chi_2\otimes N_1).$$

Лемма доказана.

3. Перейдем теперь к формулировке основного результата.

В кольце $RSU(N)$ представлений внешние степени $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_N$ группы Ли $SU(N)$ являются системой образующих элементов. Тогда всякое виртуальное представление $\Theta\in RSU(N)$ можно считать полиномом от переменных $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_N$. В кольце $RSU(2)$ системой образующих служат внешние степени λ_1 и λ_2, где λ_1 – представление размерности 2, а λ_2 – одномерное тривиальное представление. В дальнейшем будем обозначать λ_1 через t. Тогда наше представление φ группы $SU(2)$ есть полином $\varphi=\varphi(t)$.

Вместо представлений $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_N$ мы будем использовать операции Адамса $\psi_1,\psi_2,\ldots,\psi_N,\ldots$, так как ψ_i можно определить как полином от $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_N$. Обратное также верно. А свойства операций Адамса позволяют преодолеть многие трудности.

Обозначим $\psi_i(\varphi)$, $i=1,2,\ldots,N,\ldots$ ограничение виртуального представления ψ_i на подгруппу $SU(2)$. Тогда $\psi_i(\varphi(t))=P_i(t)$ – полином от переменной $t=\lambda_1$ в кольце $RSU(2)$, $P_1(t)=\varphi(t)$.

Образуем формальные разности

$$P_1(t)-\psi_1,\ P_2(t)-\psi_2,\dots,P_N(t)-\psi_N,\dots$$

и, последовательно выпишем результанты по переменной t:

$$\operatorname{Res}_t\left(P_1(t)-\psi_1, P_j(t)-\psi_j\right)=\Theta_{1j},\ 1\neq j. \qquad (1)$$

Очевидно, виртуальные представления Θ_{1j} обращаются в нуль при ограничении на подгруппу $SU(2)$ и $\gamma(\Theta_{1j})\in K^1(SU(N)/SU(2))$.

Пусть $\varphi=\varphi_p\otimes\varphi_l$ и $k_0=p+l$ – четное положительное число $(p\geq l)$. Обозначим

$$\Theta_i=\operatorname{Res}_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_{2^{r+i}}(\tilde t)}{\tilde t}\right),\ i=0,1,2,\dots,N-3,$$

где $N=(p+1)(l+1)$. Если $k_0=p+l$ – нечетное, то

$$\Theta_i'=\operatorname{Res}_{\tilde u}\left(\frac{\tilde P_1'(\tilde u)}{\tilde u},\frac{\tilde P_{2^{r+i}}'(\tilde u)}{\tilde u}\right),\ i=0,1,2,\dots,N-3.$$

Полином $\tilde P_1(\tilde t)$ получен из $P_1(t)-N$, подстановкой $t=\tilde t+2$, $\tilde t=t-2$, 2 – 2-мерное тривиальное представление группы $SU(2)$: $\tilde P_1(\tilde t)=P_1(\tilde t)-N$; $u=t^2$, $\tilde u=u-4$.

Теорема 1. При нечетном и четном $k_0=p+l$ системы элементов группы $K^1(SU(N)/SU(2))$

$$\gamma(\Theta_0),\ \gamma(\Theta_1),\dots,\gamma(\Theta_{N-3})\ \text{и}\ \gamma(\Theta_0'),\ \gamma(\Theta_1'),\dots,\gamma(\Theta_{N-3}')$$

соответственно имеют нетривиальные характеры Черна:

$$ch\gamma(\Theta_i)=\frac{C_3(f(\Theta_i))x_5}{2!}-\frac{C_4(f(\Theta_i))x_7}{3!}+\dots+\frac{(-1)^{N-1}C_N(f(\Theta_i))x_{2N-1}}{(N-1)!},$$

$$C_S(f(\Theta_i))=\left(2^{2(r+i)}-2^{s(r+i)}\right)\cdot(-1)^{k_0-1}\cdot\frac{1}{6}\left[\sum_{j=0}^{l}(k_j+1)^3-(k_j+1)\right]\cdot\operatorname{Res}_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1(\tilde t)}{\tilde t},\frac{\tilde P_{2^{r+i}}(\tilde t)}{\tilde t}\right),$$

при k_0 - нечетном и

$$C_S(f(\Theta_i'))=\left(2^{2(r+i)}-2^{s(r+i)}\right)\cdot(-1)^{k_0-1}\cdot\frac{1}{24}\left[\sum_{j=0}^{l}(k_j+1)^3-(k_j+1)\right]\cdot\operatorname{Res}_{\tilde u}\left(\frac{\tilde P_1'(\tilde u)}{\tilde u},\frac{\tilde P_{2^{r+i}}'(\tilde u)}{\tilde u}\right)$$

$$ch\gamma(\Theta_i')=\frac{C_3(f(\Theta_i'))x_5}{2!}-\frac{C_4(f(\Theta_i'))x_7}{3!}+\dots+\frac{(-1)^{N-1}C_N(f(\Theta_i'))x_{2N-1}}{(N-1)!}$$

при k_0 – четном, $i=0,1,2,\dots,N-3$, $x_5,x_7,\dots,x_{2N-1}$ – примитивные образующие кольца когомологий $H^*(SU(N)/SU(2))$.

Перед доказательством теоремы 1 сделаем необходимые уточнения, введем некоторые обозначения и докажем вспомогательную лемму 2.

Рассматриваемое представление $\varphi=\varphi_p\otimes\varphi_l$ группы Ли $SU(2)$, φ_p, φ_l $(p\geq l)$ – неприводимы, разложим в прямую сумму по формуле Клебша-Гордона:

$$\varphi=\varphi_p\otimes\varphi_l=\varphi_{p+l}+\varphi_{p+l-2}+\dots+\varphi_{p+l-2l}, \qquad (2)$$

при этом $\dim\varphi=(p+1)(l+1)=N$. Обозначим $k_0=p+l$, $k_1=p+l-2$,…, $k_l=p+l-2l$. Тогда $k_i=k_0-2i$, $i=0,1,\dots,l$ и $(k_0+1)+(k_1+1)+\dots+(k_l+1)=N$. Для дальнейшего необходимо иметь полином $\varphi(t)$ – разложение представления φ в кольце $RSU(2)$ по образующим элементам 1 и t. Для представлений φ_{k_i} такие разложения получены в [3]:

$$\varphi_{k_i}(t)=\frac{\lambda_1^{k_i+1}-\lambda_2^{k_i+1}}{\lambda_1-\lambda_2}, \tag{3}$$

при $\lambda_1=\frac{t+\sqrt{t^2-4}}{2}$, $\lambda_2=\frac{t-\sqrt{t^2-4}}{2}$. Следовательно,

$$\varphi(t)=\varphi_{k_0}(t)+\varphi_{k_1}(t)+\ldots+\varphi_{k_l}(t). \tag{4}$$

Лемма 2. Если k_0 – нечетное число, то полиномы $P_1(t)-N$ и $P_{2^{r+i}}(t)-N$ из системы (1), где r – достаточно большое целое положительное число, $i=0,1,2,\ldots$, не имеют общих корней кроме $t=2$.

Доказательство. В каждом полиноме $\varphi_{k_i}(t)$ выполним замену переменных с помощью функции Жуковского: $t=y+\frac{1}{y}$, получим

$$\varphi'_{k_i}(y)=\frac{y^{k_i+1}-\frac{1}{y^{k_i+1}}}{y-\frac{1}{y}},\ i=0,1,\ldots,l. \tag{5}$$

Напомним, $P_1(t)-\varphi(t)$, через $p_1(y)$ обозначим

$$p_1(y)=\varphi'_{k_0}(y)+\varphi'_{k_1}(y)+\ldots+\varphi'_{k_l}(y). \tag{6}$$

Полином $p_1(y)-N$ не имеет корней, модуль которых равен 1. Покажем это. Предположим противное: пусть $|y_0|=1$ и $p_1(y_0)-N=0$. Положим

$$y_0=\cos\alpha+i\sin\alpha,\ i^2=-1. \tag{7}$$

Подставим y_0 в (5)

$$\varphi'_{k_i}(y_0)=\frac{\sin(k_i+1)\alpha}{\sin\alpha}. \tag{8}$$

В предположении $p_1(y_0)-N=0$

$$\frac{\sin(k_0+1)\alpha}{\sin\alpha}+\frac{\sin(k_1+1)\alpha}{\sin\alpha}+\ldots+\frac{\sin(k_l+1)\alpha}{\sin\alpha}-N=0, \tag{9}$$
$$N=(k_0+1)+(k_1+1)+\ldots+(k_l+1).$$

Тогда

$$\begin{aligned}&(\sin(k_0+1)\alpha-(k_0+1)\sin\alpha)+(\sin(k_1+1)\alpha-(k_1+1)\sin\alpha)+\ldots\\&\ldots+(\sin(k_l+1)\alpha-(k_l+1)\sin\alpha)=0\end{aligned} \tag{10}$$

Поскольку k_0 - целое, положительное число, производная каждого слагаемого в (10) отрицательна при $0<\alpha<\frac{\pi}{2(k_0+1)}$, а знаки этих слагаемых одинаковы на соответствующих интервалах, приходим к выводу, что (9) возможно лишь при $\alpha=0$, то есть $y=1$, а $t=2$. И, предположение неверно.

Итак, $p_1(y)-N$ не имеет корней с модулем равным 1, а это значит, что $P_1(t)-N$ не имеет корней при $-2<t<2$.

Полином $P_2(t)=\psi_2(\varphi)$ можно получить из $P_1(t)$ используя свойства операций Адамса:

$$P_2(t)=\psi_2(P_1(t))=P_1(\psi_2(t)), \text{ а } \psi_2(t)=t^2-2,$$

то есть $P_2(t)$ из $P_1(t)$ получается заменой t на t^2-2. Очевидно такому преобразованию t соответствует преобразование y в $p_1(y)$: $y\to y^2$. Применяя такое преобразование r раз (r – достаточно велико), получим полином $p_{2^r}(y)-N$ нижняя граница модулей корней которого больше верхней границы модулей корней полинома $p_1(y)-N$, в случае корней с модулями >1 и, наоборот, в противном случае. Тогда полиномы $p_1(y)-N$ и $p_{2^r}(y)-N$ не имеют общих корней, кроме $y=1$.

Возвращаясь к переменной t: полиномы $P_1(t)-N$ и $P_{2^r}(t)-N$ не имеют общих корней, кроме $t=2$. Следовательно, $P_1(t)-N$ и $P_{2^{r+i}}(t)-N$ не имеют общих корней, кроме $t=2$ при r – достаточно большом; $i=1,2,\ldots$.

Лемма 2 доказана.

Доказательство теоремы 1.

Виртуальное представление Θ_{1j} из системы (1) является нульмерным, поэтому, в соответствии с леммой 1

$$ch\gamma(\Theta_{1j})=ch\gamma(\tilde{\Theta}_{1j})$$

и, для нахождения $ch\gamma(\tilde{\Theta}_{1j})$, достаточно знать только члены первой степени полинома $\tilde{\Theta}_{1j}=\tilde{\Theta}_{1j}(\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_j)$; $\tilde{\Theta}_{1j}(\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_j)$ получен из полинома $\Theta_{1j}(\psi_1,\psi_j)$ заменой ψ_1 на $\tilde{\psi}_1+N$, а ψ_j на $\tilde{\psi}_j+N$.

С другой стороны, положим

$$\tilde{P}_1(\tilde{t})+N=P_1(\tilde{t}+2),\ \tilde{P}_2(\tilde{t})+N=P_2(\tilde{t}+2),\ldots,\ \tilde{P}_N(\tilde{t})+N=P_N(\tilde{t}+2),\ldots \tag{11}$$

$\psi_1=\tilde{\psi}_1+N$, $\psi_2=\tilde{\psi}_2+N$,…, $\psi_N=\tilde{\psi}_N+N$,…, получим новую систему

$$\tilde{P}_1(\tilde{t})-\tilde{\psi}_1,\ \tilde{P}_2(\tilde{t})-\tilde{\psi}_2,\ldots,\ \tilde{P}_N(\tilde{t})-\tilde{\psi}_N,\ldots. \tag{12}$$

Заметим, что $\tilde{P}_i(\tilde{t})$ – однородная часть полинома $P_i(\tilde{t}+2)$. Тогда

$$\tilde{\Theta}_{1j}=\mathrm{Res}_{\tilde{t}}\left(\tilde{P}_1(\tilde{t})-\tilde{\psi}_1,\tilde{P}_j(\tilde{t})-\tilde{\psi}_j\right),\ j\neq 1, \tag{13}$$

и $\tilde{\Theta}_{1j}=\tilde{\Theta}_{1j}(\tilde{\psi}_1,\tilde{\psi}_j)$ – однородный полином от $\tilde{\psi}_1$ и $\tilde{\psi}_j$.

Вычисления результантов приводят к

$$\tilde{\Theta}_{1j}=\left[(-1)^{k_0-1}a_j\tilde{\psi}_1+(-1)^{k_0}a_1\tilde{\psi}_j\right]\cdot\mathrm{Res}_{\tilde{t}}\left(\frac{\tilde{P}_1(\tilde{t})}{\tilde{t}},\frac{\tilde{P}_j(\tilde{t})}{\tilde{t}}\right)+\ldots, \tag{14}$$

многоточие обозначает члены степени выше первой, a_1 и a_j – коэффициенты при первых степенях переменной $\tilde{t}$ в полиномах $\tilde{P}_1(\tilde{t})=\tilde{a}_1\tilde{t}+\ldots$, $\tilde{P}_j(\tilde{t})=\tilde{a}_j\tilde{t}+\ldots$, $N=\dim\varphi$.

Найдем коэффициенты a_1 и a_j, $j\neq 1$.

Пусть $\Lambda_1,\Lambda_2,\ldots,\Lambda_N$ – внешние степени группы $SU(N)$. Известна формула [2]:

$$\psi_i-\psi_{i-1}\Lambda_1+\psi_{i-2}\Lambda_2+\ldots+(-1)^i i\Lambda_i=0. \tag{15}$$

Рассмотрим (15) на подгруппе $SU(2)$, реализованной представление t, $\dim t=2$. При этом,

$\Lambda_1(t)=t$, $\Lambda_2(t)=1$, $\Lambda_j(t)=0$, $j=3,4,\ldots$, $\psi_s(t)$ – полином от переменной t

$$\psi_{i+1}(t)-t\psi_i(t)+\psi_{i-1}(t)=0,\ i>1. \qquad (16)$$

Уравнение (16) – разностное второго порядка, с начальными условиями $\psi_0(t)=2$, $\psi_1(t)=t$. Решая его, получаем

$$\psi_i(t)=\frac{1}{2^{i-1}}\left[t^i+C_i^2t^{i-2}\left(t^2-4\right)+C_i^4t^{i-4}\left(t^2-4\right)^2+\ldots\right],\ i>1, \qquad (17)$$

C_i^j – коэффициенты бинома Ньютона. Перейдем в (17) к нульмерным элементам заменив $t=\tilde t+2$, $\psi_i\left(\tilde t+2\right)=\tilde\psi_i\left(\tilde t\right)+2$:

$$\tilde\psi_i\left(\tilde t\right)+2=\frac{1}{2^{i-1}}\left[\left(\tilde t+2\right)^i+C_i^2\left(\tilde t+2\right)^{i-2}\left(\left(\tilde t+2\right)^2-4\right)+\ldots\right]. \qquad (18)$$

Выделим в (18) линейную часть

$$\tilde\psi_i\left(\tilde t\right)=i^2\tilde t+\ldots. \qquad (19)$$

Напомним, что $P_1(t)=\varphi(t)=\psi_1(t)$, $\tilde P_1\left(\tilde t\right)=\tilde\varphi\left(\tilde t\right)$, $P_i(t)=\psi_i(\varphi(t))=\varphi(\psi_i(t))=P_1(\psi_i(t))$. В полиноме $\varphi(\psi_i(t))=P_1(\psi_i(t))$ перейдем к нульмерным элементам, положив $\psi_i(t)=\tilde\psi_i(t)+2$:

$$\tilde\varphi\left(\tilde\psi_i(t)\right)+N=P_1\left(\tilde\psi_i(t)+2\right)=\tilde P_1\left(\tilde\psi_i(t)\right)+N,$$

$$\tilde\varphi\left(\tilde\psi_i(t)\right)=\tilde P_1\left(\tilde\psi_i(t)\right)=\tilde P_i\left(\tilde t\right).$$

Из разложения (4):

$$\varphi(t)=\varphi_{k_0}(t)+\varphi_{k_1}(t)+\ldots+\varphi_{k_l}(t), \qquad (20)$$

тогда

$$\tilde\varphi\left(\tilde t\right)+N=\left[\tilde\varphi_{k_0}\left(\tilde t\right)+\left(k_0+1\right)\right]+\left[\tilde\varphi_{k_1}\left(\tilde t\right)+\left(k_1+1\right)\right]+\ldots+\left[\tilde\varphi_{k_l}\left(\tilde t\right)+\left(k_l+1\right)\right]. \qquad (21)$$

В [3] для неприводимых представлений φ_{k_i} найдены разложения:

$$\tilde\varphi_{k_i}\left(\tilde t\right)=\frac{1}{6}\left(\left(k_i+1\right)^3-\left(k_i+1\right)\right)\tilde t+\ldots,\ i=0,1,\ldots l, \qquad (22)$$

тогда

$$\tilde P_1\left(\tilde t\right)=\tilde\varphi\left(\tilde t\right)=\frac{1}{6}\left[\sum_{s=0}^{l}\left(k_s+1\right)^3-\left(k_s+1\right)\right]\tilde t+\ldots. \qquad (23)$$

Учитывая (19), для $\tilde P_i\left(\tilde t\right)$ получаем $(i\neq 1)$

$$\tilde P_i\left(\tilde t\right)=\tilde\psi_i\left(\tilde\varphi\right)=\frac{1}{6}\left[\sum_{s=0}^{l}\left(k_s+1\right)^3-\left(k_s+1\right)\right]i^2\tilde t+\ldots. \qquad (24)$$

Таким образом, коэффициенты a_j, $j=1,2,\ldots$, из (14) имеют вид

$$a_j=\frac{1}{6}\left[\sum_{s=0}^{l}\left(k_s+1\right)^3-\left(k_s+1\right)\right]j^2,\ j=1,2,\ldots. \qquad (25)$$

Очевидно $a_j\neq 0$.

Для завершения доказательства теоремы осталось изучить условия, при которых $\operatorname{Re}s_{\tilde t}\left(\frac{\tilde P_1\left(\tilde t\right)}{\tilde t},\frac{\tilde P_j\left(\tilde t\right)}{\tilde t}\right)$ отличен от нуля.

Будем различать случаи нечетного и четного $k_0 = p + l$.

Пусть $k_0 = p + l$ – нечетное число. Тогда полиномы $\tilde{P}_1(\tilde{t})$ и $\tilde{P}_{2^{r+i}}(\tilde{t})$ по лемме 2 не имеют общих корней кроме $\tilde{t} = 0$ $(\tilde{t} = t - 2)$. Следовательно,

$$\operatorname{Res}_{\tilde{t}}\left(\frac{\tilde{P}_1(\tilde{t})}{\tilde{t}}, \frac{\tilde{P}_{2^{r+i}}(\tilde{t})}{\tilde{t}}\right) \neq 0, \quad j = 0,1,2,\ldots,$$

при достаточно большом r.

Пусть $k_0 = p + l$ – четное число. Полиномы $P_1(t) - N$ и $P_{2^{r+i}}(t) - N$, кроме корня $t = 2$ имеют еще один корень $t = -2$. Заметим, что в полиноме $\varphi(t)$ отсутствуют нечетные степени переменной t. Положив $u = t^2$, получаем систему полиномов $P_i'(u)$, $i = 1,2,\ldots,u$, далее

$$P_1'(u) - \psi_1,\; P_2'(u) - \psi_2, \ldots,\; P_N'(u) - \psi_N, \ldots,$$

$$\Theta_i' = \operatorname{Res}_u\left(P_1'(u) - \psi_1, P_{2^{r+i}}'(u) - \psi_{2^{r+i}}\right). \tag{26}$$

В силу рассуждений для нечетного $k_0 = p + l$ многочлены $P_1'(u) - N$ и $P_{2^{r+i}}'(u) - N$ не имеют общих корней, отличных от $u = 4$, при большом r, и

$$\operatorname{Res}_u\left(\frac{\tilde{P}_1'(\tilde{u})}{\tilde{u}}, \frac{\tilde{P}_{2^{r+i}}'(\tilde{u})}{\tilde{u}}\right) \neq 0. \tag{27}$$

Прямым подсчетом устанавливаем

$$\tilde{P}_1'(\tilde{u}) = \frac{1}{24}\left[\sum_{s=0}^{l}\left((k_s+1)^3 - (k_s+1)\right)\right]\tilde{u} + \ldots,$$

$$\tilde{P}_{2^{r+i}}'(\tilde{u}) = \tilde{\psi}_{2^{r+i}}(\tilde{u}) = \frac{1}{24}\left[\sum_{s=0}^{l}\left((k_s+1)^3 - (k_s+1)\right)\right]2^{2(r+i)}\tilde{u} + \ldots,$$

$$\tilde{\Theta}_i' = \left[(-1)^{k_0-1}a_{2^{r+i}}'\tilde{\psi}_1 + (-1)^{k_0}a_1'\tilde{\psi}_{2^{r+i}}\right]\cdot \operatorname{Res}_{\tilde{u}}\left(\frac{\tilde{P}_1'(\tilde{u})}{\tilde{u}}, \frac{\tilde{P}_{2^{r+i}}'(\tilde{u})}{\tilde{u}}\right) + \ldots, \tag{28}$$

$$a_1' = \frac{1}{24}\left[\sum_{s=0}^{l}\left((k_s+1)^3 - (k_s+1)\right)\right],\quad a_{2^{r+i}}' = \frac{1}{24}\left[\sum_{s=0}^{l}\left((k_s+1)^3 - (k_s+1)\right)\right]2^{2(r+i)} \tag{29}$$

Применим теорему О. В. Мантурова (см.[5], стр. 56) к группе $G = SU(N)$:

$$ch\gamma(\Theta_i) = -f^*(\Theta_i)X_3 + \frac{f^*(\Theta_i)X_5}{2!} + \ldots + \frac{(-1)^{N-1}f^*(\Theta_i)X_{2N-1}}{(N-1)!}, \tag{30}$$

где $X_3, X_5, \ldots, X_{2N-1}$ – примитивные образующие кольца когомологий группы $SU(N)$, $f^*(\Theta_i)$ – отображение когомологий $H^*(SU(N))$ в $H^*(SU(N)/SU(2))$, индуцированное $f(\Theta_i)$.

Вычисление значений $f^*(\Theta_i)X_{2s-1}$, $s = 2,3,\ldots,N$ эквивалентно вычислению коэффициентов Дынкина $C_s(f(\Theta_i))$, $s = 2,3,\ldots,N$ отображений $f^*(\Theta_i)$.

Принимая во внимание свойства коэффициентов Дынкина, получаем

$$C_s(f(\Theta_i)) = \left[(-1)^{k_0-1}a_{2^{r+i}}C_s(\psi_1) + (-1)^{k_0}a_1C_s(\psi_{2^{r+i}})\right]\cdot \operatorname{Res}_{\tilde{t}}\left(\frac{\tilde{P}_1(\tilde{t})}{\tilde{t}}, \frac{\tilde{P}_{2^{r+i}}(\tilde{t})}{\tilde{t}}\right) + \ldots,$$

$C_s(\psi_i) = i^s$ (см. [4]).

Тогда при нечетном $k_0 = p + l$:

$$C_s\left(f\left(\Theta_i\right)\right) = \left(2^{2(r+i)} - 2^{s(r+i)}\right) \cdot (-1)^{k_0 - 1} \frac{1}{6} \left[\sum_{j=0}^{l} \left(\left(k_j + 1\right)^3 - \left(k_j + 1\right) \right) \right] \cdot \mathrm{Res}_{\tilde{t}} \left(\frac{\tilde{P}_1(\tilde{t})}{\tilde{t}}, \frac{\tilde{P}_{2^{r+i}}(\tilde{t})}{\tilde{t}} \right). \quad (31)$$

При четном $k_0 = p + l$:

$$C_s\left(f\left(\Theta_i\right)\right) = \left(2^{2(r+i)} - 2^{s(r+i)}\right) \cdot (-1)^{k_0 - 1} \frac{1}{24} \left[\sum_{j=0}^{l} \left(\left(k_j + 1\right)^3 - \left(k_j + 1\right) \right) \right] \cdot \mathrm{Res}_{\tilde{u}} \left(\frac{\tilde{P}_1'(\tilde{u})}{\tilde{u}}, \frac{\tilde{P}'_{2^{r+i}}(\tilde{u})}{\tilde{u}} \right), \quad (32)$$

$i = 0, 1, \ldots, N - 3$.

Таким образом, получена система элементов $\gamma(\Theta_0), \gamma(\Theta_1), \ldots, \gamma(\Theta_{N-3})$, характеры Черна которых нетривиальны и равны

$$ch\gamma(\Theta_i) = \frac{C_3\left(f\left(\Theta_i\right)\right)x_5}{2!} - \frac{C_4\left(f\left(\Theta_i\right)\right)x_7}{3!} + \ldots + \frac{(-1)^{N-1} C_N\left(f\left(\Theta_i\right)\right)x_{2N-1}}{(N-1)!},$$

где $x_5, x_7, \ldots, x_{2N-1}$ – примитивные образующие кольца когомологий $H^*(SU(N)/SU(2))$, а $C_s\left(f\left(\Theta_i\right)\right)$ вычисляются по формулам (31), (32).

Теорема доказана.

Комментарий к теореме. 1. Вычисления, проведенные для представлений φ небольших размерностей, позволяют предположить, что $r = 1$.

2. С высокой степенью уверенности можно также предполагать, что элементы $\gamma(\Theta_0), \gamma(\Theta_1), \ldots, \gamma(\Theta_{N-3})$ являются образующими во всем кольце $K^*(SU(N)/SU(2)) \otimes Q$. Эта задача требует дальнейшего изучения.

Литература

1. *Дынкин Е.Б.* Топологические характеристики гомоморфизмов компактных групп Ли // Матем. сб. – М., 1954. Т.35. – №1 – С. 129–173.
2. *Каруби М.* К–теория. – М.: Мир. – 1981. – 360 с.
3. *Козлов В.А.* Образующие кольца $K^*(G/H)$ некоторых компактных однородных пространств G/H // Инварианты дифференц. группы. – М., 1988. – С. 100–117. Деп. в ВИНИТИ, 28.11.88, №8355-В88.
4. *Козлов В.А.* Коэффициенты Дынкина когомологических операций Адамса // Вестник Адыгейского гос. ун-та. Серия «Естеств.–матем. и техн. науки». – Майкоп: изд-во АГУ. – Вып.1(43). – 2009. – С. 15–18.
5. *Мантуров О.В.* Образующие в комплексном К–функторе компактных однородных пространств // Матем. сб. – М., 1973. – Т. 90. – №1. – С.48–85.

About elements of ring $K^*(G/H)$ and their Chern characters for one series homogeneous spaces G/H*

V.A. Kozlov

The systems of the elements $\gamma(\Theta_i)$ and their non-trivial Chern characters in the rings $K^*(SU(N)/SU(2)) \otimes Q$ for one series of homogeneous spaces $SU(N)/SU(2)$ of compact Lie groups $SU(N)$ and $SU(2)$ are constructed.

