ОЦЕНКА ЧИСЛА РАЗЛИЧНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ ДЕЙСТВИТЕЛЬНЫХ ИНВАРИАНТНЫХ ПРЯМЫХ КУБИЧЕСКОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ СИСТЕМЫ НА ПЛОСКОСТИ

В.Б. Тлячев, А.Д. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Дается оценка сверху числа различных направлений действительных инвариантных прямых кубической дифференциальной системы на плоскости. Приводится пример такой системы.

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}a_{ij}x^i y^j \equiv P_3(x,y),\quad \frac{dy}{dt}=\sum_{i+j=0}^{3}b_{ij}x^i y^j \equiv Q_3(x,y) \tag{1}$$

в предположении, что она удовлетворяет условиям

$$a_{ij}, b_{ij} \in R, (P_3, Q_3)=1,\ \sum_{i+j=3}\left|a_{ij}\right|>0, \sum_{i+j=3}\left|b_{ij}\right|>0\,. \tag{2}$$

Условимся в рамках данной статьи не оговаривать каждый раз выполнение условий (2).

Известно, что дифференциальное уравнение

$$P_3(x,y)dy-Q_3(x,y)dx=0 \tag{3}$$

имеет не более восьми интегральных прямых [1;2]. При исследовании поведения интегральных кривых уравнения (3) автором $[1]$ априори считается, что число различных направлений интегральных прямых $y=kx+b$ не превосходит четырёх (включая и вертикальные). Вместе с тем в работе $[3]$ построена система вида $[1]$, имеющая инвариантные прямые шести различных направлений. Поэтому возникает естественный вопрос: каково максимальное число различных направлений действительных инвариантных прямых кубической системы (1)?

Теорема 1. *Система дифференциальных уравнений* (1) *не имеет особой точки, через которую проходят более четырёх действительных инвариантных прямых.*

Доказательство. Систему (1), имеющую не менее двух инвариантных прямых с различными угловыми коэффициентами, посредством параллельного переноса начала координат в точку пересечения таких прямых и подходящего линейного преобразования $[4]$ можно привести к системе

$$\frac{dx}{dt}=xP_2(x,y), \frac{dy}{dt}=yQ_2(x,y) \tag{4}$$

Полагая, что система (4) имеет две инвариантные прямые: $y=k_1x,\ y=k_2x,$ где $k_1,k_2 \in R\setminus\{0\}, k_1 \neq k_2,$ мы тем самым допускаем выполнение равенств

$$Q_2(x,y)\equiv P_2(x,y)+(y-k_1x)R_1(x,y) \tag{5}$$

$$Q_2(x,y)\equiv P_2(x,y)+(y-k_2x)S_1(x,y) \tag{6}$$

где R_1 и S_1 – линейные функции.

Из (5) и (6) следует, что

$$R_1(x,y)=\alpha(y-k_2x),\ S_1(x,y)=\alpha(y-k_1x),$$

то есть система (4) имеет вид

$$\frac{dx}{dt}=xP_2(x,y),\ \frac{dy}{dt}=y\left[P_2(x,y)+\alpha(y-k_1x)(y-k_2x)\right] \qquad (7)$$

где $\alpha\in R\setminus\{0\}$.

Если предположить, что система (7) имеет инвариантную прямую $y=k_3x,\ k_3\in R\setminus\{0\},\ (k_3-k_1)(k_3-k_2)\neq 0$, то имеет место тождество

$$P_2(x,y)+\alpha(y-k_1x)(y-k_2x)\equiv P_2(x,y)+\alpha(y-k_3x)T_1(x,y) \qquad (8)$$

где $T_1(x,y)$ – линейная функция. Но тождество (8) может быть выполнено только при условии когда $(k_3-k_1)(k_3-k_2)=0$. Приходим к противоречию, что и доказывает теорему.

Теорема 2. *Пусть система* (1) *имеет четыре действительные инвариантные прямые, инцидентные одной и той же особой точке* A. *Тогда любая инвариантная прямая системы* (1), *не проходящая через эту точку, параллельна одной из четырёх инвариантных прямых инцидентных точке* A.

Доказательство. Не уменьшая общности, рассмотрим систему (7), через особую точку $(0,0)$ которой проходят четыре инвариантные прямые. Если $x=c\neq 0$ - инвариантная прямая, то есть $P_2(c,y)\equiv 0$, то эта прямая параллельна прямой $x=0$. Если $y=k_3x+b_3$ - инвариантная прямая системы (7), причём $b_3\in R\setminus\{0\},k_3\in R$, то имеет место равенство

$$(k_3x+b_3)\left[(k_3-k_1)x+b_3\right]\cdot\left[(k_3-k_2)x+b_3\right]\equiv -b_3P_2(x,k_3x+b_3). \qquad (9)$$

Из (9) следует, что $k_3(k_3-k_1)(k_3-k_2)=0$. Теорема доказана.

Теорема 3. *Система* (1) *имеет действительные инвариантные прямые не более шести различных направлений.*

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы система (1) имеет инвариантные прямые более шести различных направлений В силу теоремы 2 не существует особой точки, через которую проходят более трёх инвариантных прямых. Вместе с тем каждая инвариантная прямая пересекается не менее чем с шестью инвариантными прямыми. Отсюда делаем вывод, что каждая инвариантная прямая проходит через три особые точки, и каждой особой точке инцидентны три инвариантные прямые. Не уменьшая общности, рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=xP_2(x,y),\ \frac{dy}{dt}=y\left[P_2(x,y)+(y-kx)(Ax+By+C)\right]. \qquad (10)$$

Очевидно, через точку покоя $(0,0)$ проходят три инвариантные прямые системы (10): $x=0,y=0,y=kx,k\in R\setminus\{0\}$. На прямой $x=0$, кроме особой точки $(0,0)$ расположены ещё две особые точки. Обозначим их A и B. Кроме оси ординат, через точку $A(B)$ проходят две инвариантные прямые

$l_A^1: y-k_1x-b_1=0;\ l_A^2: y-k_2x-b_1=0\ (l_B^1: y-k_3x-b_3=0;\ l_B^2: y-k_4x-b_3=0)$, где $k_i\in R\setminus\{0\}, i=\overline{1,4}$, все k_i – попарно различны.

Таким образом, имеют место тождества

$$(k_1x+b_1)\{P_2(x,k_1x+b_1)+\left[(k_1-k)x+b_1\right]\left[(A+Bk_1)x+Bb_1+C\right]\}\equiv k_1xP_2(x,k_1x+b_1), \qquad (11)$$

$$(k_2x+b_1)\{P_2(x,k_2x+b_1)+\left[(k_2-k)x+b_1\right]\left[(A+Bk_2)x+Bb_1+C\right]\}\equiv k_2xP_2(x,k_2x+b_1), \qquad (12)$$

$$(k_3x+b_3)\{P_2(x,k_3x+b_3)+\left[(k_3-k)x+b_3\right]\left[(A+Bk_3)x+Bb_3+C\right]\}\equiv k_3xP_2(x,k_3x+b_3), \qquad (13)$$

$$(k_4x+b_3)\{P_2(x,k_4x+b_3)+\left[(k_4-k)x+b_3\right]\left[(A+Bk_4)x+Bb_3+C\right]\}\equiv k_4xP_2(x,k_4x+b_3). \qquad (14)$$

Из (11)-(14) следуют равенства

$$b_1P_2(x,k_1x+b_1)+(k_1x+b_1)\left[(k_1-k)x+b_1\right]C\equiv 0\,, \qquad (15)$$

$$b_1P_2(x,k_2x+b_1)+(k_2x+b_1)\left[(k_2-k)x+b_1\right]C\equiv 0\,, \qquad (16)$$

$$b_3P_2(x,k_3x+b_3)+(k_3x+b_3)\left[(k_3-k)x+b_3\right]C\equiv 0\,, \qquad (17)$$

$$b_3P_2(x,k_4x+b_3)+(k_4x+b_3)\left[(k_4-k)x+b\right]C\equiv 0\,. \qquad (18)$$

Из (15)-(18) следуют равенства

$$b_1P_2(x,y)+y(y-kx)C\equiv (y-k_1x-b_1)R_1(x,y)\,, \qquad (19)$$

$$b_1P_2(x,y)+y(y-kx)C\equiv (y-k_2x-b_1)S_1(x,y)\,, \qquad (20)$$

$$b_3P_2(x,y)+y(y-kx)C\equiv (y-k_3x-b_3)T_1(x,y)\,, \qquad (21)$$

$$b_3P_2(x,y)+y(y-kx)C\equiv (y-k_4x-b_3)U_1(x,y)\,, \qquad (22)$$

где R_1,S_1,T_1,U_1 – линейные функции.

Из (19) и (20) получаем тождество

$$b_1P_2(x,y)\equiv -Cy(y-kx)+\alpha(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_1)\,. \qquad (23)$$

Аналогично из (21) и (22) получаем

$$b_3P_2(x,y)\equiv -Cy(y-kx)+\beta(y-k_3x-b_3)(y-k_4x-b_3)\,. \qquad (24)$$

Здесь $\alpha,\beta\in R\setminus\{0\}$.

Из (23) и (24) получаем тождественное равенство

$$C(b_1-b_3)y(y-kx)\equiv b_1\beta(y-k_3x-b_3)(y-k_4x-b_3)-b_3\alpha(y-k_1x-b_1)(y-k_2x-b_1)\,. \qquad (25)$$

Из (25) следует система уравнений:

$$\begin{aligned}&b_1b_3(\alpha-\beta)=0,\\&b_1b_3\beta(k_3+k_4)-b_1b_3\alpha(k_1+k_2)=0,\\&b_1\beta k_3k_4-b_3\alpha k_1k_2=0,\\&b_1b_3(\beta b_3-\alpha b_1)=0.\end{aligned} \qquad (26)$$

Из первого и четвёртого уравнений системы (26) следует равенство $b_1=b_3$ Это равенство противоречит тому что особые точки A и B – различны, и что через каждую из них проходят не более трёх инвариантных прямых. Теорема доказана.

Пример. Система дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt}=x\left[-3y(y-x)+(y+x-2)(y-2x-2)\right],$$

$$\frac{dy}{dt}=y\left[-3y(y-x)+(y+x-2)(y-2x-2)+6(y-x)\right].$$

имеет шесть инвариантных прямых:

$$x=0,\ y=0,\ y=x,\ y=-x+2,\ y=2x+2,\ y=\frac{1}{2}x-1.$$

Теорема 4. *Если система* (1) *имеет инвариантные прямые шести различных направлений, то в каждом из этих направлений существует ровно одна инвариантная прямая.*

В самом деле, если бы существовала инвариантная прямая, параллельная одной из шести инвариантных прямых, то система (1) имела бы на этой прямой не менее четырёх особых точек. Это недопустимо для кубической системы. Таким образом, теорема доказана.

Очевидно, в условиях теоремы 4 система имеет ровно шесть инвариантных прямых.

Теорема 5. *В условиях теоремы 4 система* (1) *не имеет бесконечно удалённых особых точек.*

Действительно, экватор сферы Пуанкаре [5] не состоит из траекторий системы. Если бы это было не так, то на экваторе сферы Пуанкаре система имела бы не менее шести особых точек. Но кубическая система имеет не более четырёх особых точек на бесконечности.

Литература

1. *Любимова Р.А.* Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми / Р.А.Любимова // Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. сборник: Горький, 1977. - С. 19-22.
2. *Любимова Р.А.* Об одном дифференциальном уравнении с интегральными прямыми / Р.А.Любимова // Дифференциальные и интегральные уравнения. Межвуз. сборник: Горький, 1984. - С. 66-69.
3. *Putuntica V.M.* The cubic differential system with real invariant straight lines along six directions // Материалы международной конференции, посвящённой 100-летию Н.Н.Боголюбова и 70-летию Н.И. Нагнибиды. Черновцы: Изд-во Черновицкого гос.ун-та, 2009. - С. 245-247.
4. *Ушхо Д.С.* О прямых изоклинах кубической дифференциальной системы //Труды ФОРА. - 2003. - №8. - С. 7-21.
5. *Андронов А.А.* Качественная теория динамических систем второго порядка /А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. - М.: Наука, 1966. – 568 с.

Estimation of number of various directions of the valid invariant straight lines of cubic differential system on a plane

V.B. Tlyachev, A.D. Ushkho

The upper bound of number of various directions of the valid invariant straight lines of cubic differential system on a plane is given. The example of such system is reduced.

