СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННЫЕ ОПЕРАТОРНЫЕ УРАВНЕНИЯ ФРЕДГОЛЬМА

Д.К. Мамий, А.В. Лаврентьев, М.Х. Уртенов

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

В работе вводится понятие сингулярно возмущенных операторных уравнений, представляющих собой стандартную формализацию понятия сингулярно возмущенных задач для дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Доказана теорема о представлении сингулярно возмущенных уравнений в виде возмущенных операторных уравнений Фредгольма.

Теория и методы решения сингулярно возмущенных задач составляет важное, интенсивно развивающееся направление в современной математике.

К настоящему времени разработана достаточно полная общая теория сингулярно возмущенных уравнений, созданы приближенные асимптотические и численные методы решения таких задач, с помощью которых успешно решены и решаются многие актуальные прикладные задачи. В основе общей теории и методов решения сингулярно возмущенных уравнений, как правило, лежит условие стабильности спектра некоторого оператора (отсутствие точек поворота), известное как условие устойчивости для сингулярно возмущенных уравнений [4].

Исследования линейных сингулярно возмущенных систем дифференциальных уравнений с точками поворота достаточно представлены в работе [6].

В указанных работах по существу предполагается произвольная малость параметра. Поскольку на практике имеют дело не с процессом, в котором параметр бесконечно мал, а с конкретным и фиксированным значением параметра, то актуальны методы приближенного решения сингулярно возмущенных уравнений с произвольной точностью при малых, но фиксированных значениях параметра.

Разработке и исследованию специальных итерационных методов, сходящихся равномерно относительно малого параметра, при соблюдении условия устойчивости посвящены работы Ю.П. Боглаева и В.Т. Стельмаха [2,3].

Многие важные прикладные задачи, например математические модели мембранной электрохимии при учете нарушения условия электронейтральности, приводят к нелинейным сингулярно возмущенным задачам с нарушениями условия устойчивости в отдельных точках [1].

Следовательно, разработка приближенных методов решения сингулярно возмущенных уравнений с произвольной точностью при малых, но фиксированных значениях параметра в случае нарушения условия устойчивости в отдельных точках весьма актуальна.

В работе вводится понятие сингулярно возмущенных операторных уравнений, представляющих собой стандартную формализацию понятия сингулярно возмущенных задач для дифференциальных и интегродифференциальных уравнений. Доказана теорема о представлении сингулярно возмущенных уравнений в виде возмущенных операторных уравнений Фредгольма.

Пусть B – некоторое банахово пространство над R с нормой $\|\cdot\|_B$, а $L(B, B)$ – пространство линейных непрерывных операторов $B\to B$ с нормой

$$\|T\|_L = \max_{\|x\|\le 1}\|T(x)\|,\ x\in B,\ T\in L(B, B).$$

Пусть X, Y – некоторые подмножества B и оператор F: $X\to Y$.

Определение 1. Если для любого $f\in Y$ существует $x\in X$, что

$$F(x) = f, \tag{1}$$

то пара (X, Y) называется допустимой относительно уравнения (1).

Пусть U – некоторое топологическое пространство с топологией u , точка $\mu_0 \in$ U. В дальнейшем, не оговаривая специально, будем предполагать, что существует множество $U_0 \subset U$, обладающее следующим свойством: $\mu_0 \notin U_0$, но $\mu_0 \in \overline{U}_0$, где $\overline{U}_0$ – замыкание множества U_0 в топологии u.

Пусть $\{F_\mu\}$, $\mu \in \overline{U}_0$ – семейство операторов: $X \to Y$.

Рассмотрим уравнения

$$F_\mu(x) = f, \quad \mu \in U_0; \tag{2}$$

$$F_{\mu_0}(x) = f. \tag{3}$$

Определение 2. Если существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что пара (X, Y) при любых $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ допустима одновременно относительно уравнений (2) и (3), то уравнение (2) называется регулярно возмущенным по отношению к уравнению (3) на паре (X, Y).

Определение 1.3. Если существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что пара (X, Y) допустима при любых $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ относительно уравнения (2), но не допустима относительно уравнения (3), то уравнение (2) называется сингулярно возмущенным по отношению к уравнению (3) на паре (X, Y). При этом будем называть оператор $F_\mu - F_{\mu_0}$ – оператором сингулярного возмущения на паре (X, Y), уравнение (3) – вырожденным по отношению к уравнению (2), а уравнение (2) – возмущенным по отношению к (3). Такие известные типы сингулярно возмущенных уравнений и задач, как задачи Коши и краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений и интегродифференциальных с малым параметром $\mu \in U_0 = (0, \overline{\mu}] \subset R$ при старших производных, интегральные уравнения, изменяющие свой тип при обращении малых параметров в нуль и т.д., являются, очевидно, сингулярно возмущенными задачами в смысле приведенного выше определения.

Для линейных регулярно возмущенных уравнений естественны следующие два предположения:

1. Оператор T= F_{μ_0} :B→B – Фредгольмов оператор, т.е. такой линейный непрерывный оператор, что для уравнения

$$T(x) = S \tag{4}$$

справедлива альтернатива Фредгольма [5]. При этом уравнение (4) будем называть операторным уравнением Фредгольма.

2. Существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что для любых $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ оператор $Z_\mu = F_\mu - F_{\mu_0}$ – линейный непрерывный оператор: $B \to B$ и

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \|Z_\mu\|_L = 0. \tag{5}$$

При этих условиях регулярно возмущенное уравнение может быть представлено в виде возмущенного операторного уравнения Фредгольма

$$T(x) + Z_\mu(x) = f. \tag{6}$$

Условия 1 и 2, конечно, для сингулярно возмущенного уравнения неестественны, однако далее мы покажем, что при некоторых условиях (естественных для сингулярно возмущенного уравнения) и сингулярно возмущенное уравнение может быть сведено к уравнению вида (6), где T:B→B – Фредгольмов оператор, а оператор Z_μ – некоторый непрерывный линейный оператор: B→B при любом $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$, и выполнено (5).

В связи с этим будем говорить, что сингулярно возмущенное уравнение допускает регулярное представление, если оно может быть сведено к уравнению вида (6). В дальнейшем, не оговаривая специально, будем предполагать, что X – линейное подпространство B, а Y = B.

Теорема 1

Пусть существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0, что для любого $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ существует линейные операторы L_μ : X→B, $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$, F:B→B и выполнены условия:

1. $F_\mu = L_\mu + F$.
2. $F(X) \subset X$.
3. При каждом фиксированном $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ существует непрерывный обратный к L_μ оператор L_μ^{-1}.
4. Существует вполне непрерывный оператор Q:B→B, такой, что $Q(X) \subset X$ и

$$\lim_{\mu\to\mu_0}\left\|L_\mu^{-1}F - Q\right\|_L = 0. \qquad (7)$$

Тогда сингулярно возмущенное уравнение (2) допускает регулярное представление.

Доказательство. Для доказательства теоремы запишем уравнение (2) в виде

$$L_\mu(x) = -F(x) + f.$$

После соответствующих преобразований приходим к уравнению вида (6), где

$$T = I + Q, \quad Z_\mu = Q - L_\mu^{-1}F, \quad S = L_\mu^{-1} f.$$

Так как Q – вполне непрерывный оператор B→B, то

$$T = I + Q: B \to B$$

Фредгольмов оператор [5]. Из (7) и определения оператора Z_μ получаем (5).

Замечание 1. В условиях теоремы 1 естественно называть оператор L_μ регуляризующим оператором сингулярного возмущения, так как выделение оператора L_μ и его обращение приводят сингулярно возмущенное уравнение (2) к регулярному представлению (6), а оператор $L_м^{-1}$ – регуляризатором сингулярного возмущения.

Заметим, что оператор сингулярного возмущения и регуляризующий оператор сингулярного возмущения, вообще говоря, не совпадают.

Связь между этими операторами дает приводимая далее теорема.

Теорема 2

Пусть:

1. $F_{\mu_0}(X) \subset X$.
2. Существует такая окрестность U_{μ_0} точки μ_0 и такой линейный оператор F_1: B→B, $F_1(X) \subset X$, что при каждом фиксированном $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ оператор $[(F_\mu - F_{\mu_0}) + F_1]$ имеет непрерывный обратный.
3. Существует линейный вполне непрерывный оператор Q: B→B, $Q(X) \subset X$, что

$$\lim_{\mu\to\mu_0}\left\|[(F_\mu - F_{\mu_0}) + F_1]^{-1}(F_1 - F_{\mu_0}) - Q\right\|_L = 0. \qquad (8)$$

Тогда оператор

$$L_\mu = (F_\mu - F_{\mu_0}) + F$$

является регуляризующим оператором сингулярного возмущения.

Доказательство. Положим $F = F_{\mu_0} - F_1$ и проверим выполнимость условий теоремы 1 для операторов L_μ и F.

Выполнимость условия 1 следует из равенства

$$L_\mu + F = (F_\mu - F_{\mu_0}) + F_1 + (F_{\mu_0} - F_1) = F_\mu.$$

Условие 2 выполняется в силу того, что операторы F_1, F_{M_0} – линейные операторы B→B, X→X и X – линейное подпространство B.
Наконец, из (8) следует (7).
Для некоторых сингулярно возмущенных уравнений, например, для сингулярно возмущенных интегродифференциальных систем типа Фредгольма, требование выполнения равенства (7) или (8) слишком жестко. В таких случаях оказывается полезной следующая теорема.

Теорема 3

Пусть:

1. Выполнены все условия теоремы 1, за исключением равенства (7).
2. Существует линейный оператор G_μ : B→B, G_μ (X) ⊂ X при каждом фиксированном $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$.
3. При любом $\mu \in U_{\mu_0} \cap U_0$ существует оператор

$$R_\mu = (I - G_\mu)^{-1} - I \tag{9}$$

и $\|R_\mu\|_L \le K_1, \quad \mu \in U_{\mu_0} \cap U_0,$

где K_1 не зависит от μ.

4. $\lim\limits_{\mu \to \mu_0} \|QR_\mu\|_L = 0$.
5. $\lim\limits_{\mu \to \mu_0} \|L_\mu^{-1}F - Q + G_\mu\|_L = 0$.

Тогда сингулярно возмущенное уравнение (2) допускает регулярное представление в переменных ξ: $x = \xi + R_\mu \xi$.

Доказательство. Положим

$$\tilde{Z}_\mu = L_\mu^{-1}F - Q + G_\mu;$$

$$S = L_\mu^{-1} f .$$

Тогда уравнение (2) элементарными преобразованиями сводится к уравнению

$$x + Qx = G_\mu x + \tilde{Z}_\mu x + S .$$

Замена $x = \xi + R_\mu \xi$ приводит к уравнению

$$(I + Q)\xi + (R_\mu - G_\mu R_\mu)\xi + (QR_\mu - \tilde{Z}_\mu - \tilde{Z}_\mu R_\mu)\xi = S .$$

Обозначая $T = I + Q$, $Z_\mu = QR_\mu - \tilde{Z}_\mu - \tilde{Z}_\mu R_\mu$ и пользуясь условиями 3 – 5, получаем, что

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \|Z_\mu\| = 0 .$$

Для доказательства теоремы достаточно учесть равенство $R_\mu = G_\mu + G_\mu R_\mu$, которое следует из (9).

Замечание 2. Теорема 3 допускает обобщение, при котором вместо условия 5 выполнено равенство

$$\lim_{\mu \to \mu_0} \left\| L_\mu^{-1}F - Q + \sum_{i=1}^{m} G_\mu^{(i)} \right\|_L = 0 ,$$

где операторы $G_\mu^{(i)}$ удовлетворяют некоторым требованиям, аналогичным требованиям, накладываемым на G_μ. Не формулируя (из-за громоздкости) точную теорему, укажем, что в этом случае производится замена переменных

$$x=\xi+\sum_{i=1}^{m}R_{\mu}^{(i)}\xi,$$

где операторы $R_{\mu}^{(i)}$ могут быть выбраны, например, в виде

$$R_{\mu}^{(i)}=(I-G_{\mu}^{(i)})^{-1}-I.$$

В следующей работе, используя доказанные выше теоремы, нами будут предложены различные схемы последовательных приближений для операторного уравнения Фредгольма. Будут также рассмотрены случаи, когда возмущение операторного уравнения Фредгольма представлено итерационными или асимптотическими приближениями.

Работа выполнена при финансовой поддержке

Литература

1. *Бабешко В.А., Заболоцкий В.И., Корженко Н.М., Сеидов Р.Р., Уртенов М.Х.* Теория стационарного переноса бинарного электролита в одномерном случае. Численный анализ // Доклады РАН. - 1997. - Т. 355. - № 4. - С. 488-490.
2. *Боглаев Ю.П.* // ЖВМ и МФ. - 1970. - Т.10. - №4. - С. 958-968
3. *Боглаев Ю.П., Стельмах В.Г.* Итерационный метод в краевой задаче для уравнений с малым параметром при производной. / Препринт. Черноголовка, 1976. - 36 с.
4. *Васильева А.Б., Бутузов В.Ф.* Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. - М.: Высшая школа, 1990. – 208 с.
5. *Канторович Л.В., Акилов Г.Н.* Функциональный анализ. - М.: Наука, 1977. - 742 с.
6. *Федорюк М.В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1983. - 346 с.

Fredholm's singular perturbed functional equations

D.K. Mamiy, A.V. Lavrentev, M.H. Urtenov

In work the concept of singular perturbed functional equations is introduced. This one is representing standard formalization of concept is singular perturbed problems for the differential and integro-differential equations. The theorem of representation of singular the perturbed equations in the form of the perturbed functional equations of Fredholm is proved.

