2 0 0 8 г **№ 13**
Т р у д ы Ф О Р А

УСТОЙЧИВОСТЬ И ОГРАНИЧЕННАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ СИСТЕМ

А.Х. Сташ, М.М. Шумафов*

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

В статье получены эффективные достаточные условия ограниченности и устойчивости решений линейных дифференциальных систем.

1. Введение

В настоящей статье изучаются некоторые свойства решений линейных дифференциальных систем.

Вопросы устойчивости и ограниченности решений систем дифференциальных уравнений рассматривались многими авторами, сводка результатов которых имеется, например, в [1-3] . В настоящей статье доказываются некоторые теоремы, дающие достаточные, а в некоторых случаях и необходимые условия ограниченности и ограниченной устойчивости решений систем линейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами. Эти теоремы дают полные решения задач, поставленных в [4].

Напомним некоторые определения и факты из теории устойчивости и приводимости линейных дифференциальных систем.

Рассмотрим линейную однородную дифференциальную систему

$$\frac{dx}{dt} = A(t)x, \quad x \in R^n, \tag{1}$$

где $A(t)$ непрерывная матрица-функция на промежутке $[t_0, +\infty)$.

Для системы (1) задача Коши имеет единственное решение, определенное на всей бесконечной полупрямой [5].

Наряду с системой (1) будем рассматривать сопряженную ей систему

$$\frac{dy}{dt} = -A(t)^T y. \tag{2}$$

Очевидно, что систему (1) в свою очередь можно рассматривать как сопряженную для системы (2), т.е. системы (1) и (2) взаимно сопряженные.

Определение 1[4]. *Тривиальное решение* $x(t) \equiv 0$ *системы (1) называется устойчивым по Ляпунову при* $t \to +\infty$, *если для любых* $\varepsilon > 0$ *и* $t_0 \in [a, +\infty)$ *существует* $\delta = \delta(\varepsilon, t_0) > 0$ *такое, что из неравенства* $\|x(t_0)\| < \delta$ *следует неравенство* $\|x(t)\| < \varepsilon$ *при* $t \in [t_0, \infty)$.

Отметим, что устойчивость тривиального решения системы (1) равносильна устойчивости всех решений этой системы [4]. В последнем случае мы будем говорить об устойчивости всей системы.

Определение 2[4]. *Если число* $\delta > 0$ *можно выбрать не зависящим от начального момента* $t_0 \in [a, +\infty)$, *т.е.* $\delta = \delta(\varepsilon)$, *то устойчивость называется равномерной в области* $[a, +\infty)$

Определение 3[4]. *Матрица* $L(t) \in C^1[t_0, \infty)$, *вообще говоря, комплексная, называется матрицей Ляпунова, если выполнены следующие условия:*

1) $L(t)$ и $\dot{L}(t)$ *ограничены на промежутке* $[t_0, \infty)$, *т.е.*

---
* shumaf@mail.ru

$$\sup_t \left\| L(t) \right\| < \infty, \quad \sup_t \left\| \dot{L}(t) \right\| < \infty \quad \text{при } t \in [t_0, \infty);$$

2) $\left|\det L(t)\right| \geq m > 0$,

где m *- некоторая положительная постоянная.*

Определение 4[4]. *Линейное преобразование*

$$y = L(t)x$$

с $(n \times n)$ *- матрицей Ляпунова* $L(t)$, *где* x *и* y *-* n*-мерные векторы, называется преобразованием Ляпунова.*

Определение 5[4]. *Однородная линейная дифференциальная система (1) называется приводимой (по Ляпунову), если с помощью некоторого преобразования Ляпунова она может быть преобразована в линейную систему*

$$\frac{dy}{dt} = By \tag{3}$$

с постоянной матрицей B.

Если в системе (3) матрица B не только постоянная, но и нулевая, то говорят, что система (1) приводима к системе с *нулевой* матрицей.

Определение 6[4]. *Действительная линейная система (1) называется ограниченно устойчивой, если она устойчива одновременно с сопряженной системой (2).*

В дальнейшем нам понадобятся следующие хорошо известные факты из теории систем линейных дифференциальных уравнений.

Лемма 1[4]. *Для фундаментальных матриц решений* $X = X(t)$ *и* $Y = Y(t)$ *взаимно сопряженных систем (1) и (2) имеет место соотношение*

$$Y^T X = C,$$

где C *- постоянная матрица.*

Лемма 2[4]. Пусть в системе (1) $A(t)$ *- ограниченная непрерывная действительная матрица. Тогда если*

1) все решения $x(t)$ *линейной системы (1) ограничены в промежутке* $[t_0, \infty)$;

2) интеграл от следа матрицы системы (1) ограничен снизу, т.е.

$$\int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau \geq a > -\infty,$$

где a *- постоянная, то система (1) с помощью преобразования Ляпунова может быть преобразована в систему с нулевой матрицей.*

Лемма 3[4]. *Линейная однородная дифференциальная система (1) устойчива тогда и только тогда, когда каждое решение этой системы ограничено на полуоси* $[a, +\infty)$.

Лемма 4[2] (*Лемма Гронуолла - Беллмана*). *Пусть непрерывная на промежутке* $[t_0, +\infty)$ *функция* $u(t) \geq 0$ *удовлетворяет при* $t \geq t_0$ *интегральному неравенству*

$$u(t) \leq c + \int_{t_0}^{t} f(\tau)u(\tau)d\tau$$

где с - положительная константа, а $f(t) \geq 0$ *непрерывная на* $[t_0, +\infty)$ *функция.*

Тогда при $t \geq t_0$ *имеет место оценка*

$$u(t) \leq c \exp \int_{t_0}^{t} f(\tau)d\tau.$$

2. Ограниченность и устойчивость. Установим сначала оценку нормы произвольного решения системы (1).

Теорема 1. *Для любого решения системы (1) справедлива следующая двусторонняя оценка*

$$\|x(t_0)\|\exp\left[-\int_{t_0}^{t}\|A(t_1)\|dt_1\right] \le \|x(t)\| \le \|x(t_0)\|\exp\left[\int_{t_0}^{t}\|A(t_1)\|dt_1\right] \quad \text{при } t \ge t_0. \quad (4)$$

Доказательство. Для тривиального решения $x(t) \equiv 0$ оценка (4) очевидна.

Пусть $x(t)$ - произвольное нетривиальное решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in [a,+\infty)$. Введем в рассмотрение функцию $r(t) := \|x(t)\|$. Тогда $r(t)^2 = (x(t), x(t))$. Дифференцируя обе части последнего равенства и используя неравенство Коши для оценки скалярного произведения, получаем

$$\left|\frac{dr(t)}{dt}\right| \le \left|\frac{dx(t)}{dt}\right|. \quad (5)$$

Так как $x(t)$ - решение, то из (5) в силу системы (1) имеем

$$\left|\frac{dr(t)}{dt}\right| \le \|A(t)\| \cdot r(t). \quad (6)$$

Поскольку $x(t)$ - нетривиальное решение системы (1), то по теореме существования и единственности $r(t) > 0$ для всех $t \in [t_0,+\infty)$. Поэтому из неравенства (6) имеем

$$-\|A(t)\|dt \le \frac{dr(t)}{r(t)} \le \|A(t)\|dt, \quad t \in [t_0,+\infty).$$

Интегрируя обе части последнего дифференциального неравенства от t_0 до t, получаем оценку (4). Теорема 1 доказана.

Теорема 2. *Пусть*

$$\int_a^{\infty}\|A(t) + A^T(t)\|dt < \infty. \quad (7)$$

Тогда все решения действительной системы (1) ограничены на полуоси $[a,\infty)$.

Доказательство. Пусть $x(t)$ - произвольное нетривиальное решение системы (1), удовлетворяющее начальному условию $x(t_0) = x_0$, $t_0 \in [a,+\infty)$.

Введем в рассмотрение функцию $r(t) := \|x(t)\|$. Тогда очевидно, что

$$r(t)^2 = (x(t), x(t)) = x^T(t)x(t). \quad (8)$$

В силу системы (1), учитывая, что

$$\frac{dx^T(t)}{dt} = \left(\frac{dx(t)}{dt}\right)^T = x^T(t)A^T(t),$$

из (8) получаем

$$\frac{d}{dt}(r^2(t)) = x^T\frac{dx}{dt} + \frac{dx^T}{dt}x = x^TA(t)x + x^TA^T(t)x = x^TB(t)x,$$

где $B(t) = A(t) + A^T(t)$. Отсюда будем иметь

$$2r(t)\dot r(t) \le \|B(t)\| \cdot \|x(t)\|^2 \quad (9)$$

Поскольку $x(t)$ - нетривиальное решение системы (1), то по теореме существования и единственности $r(t) > 0$ для всех $t \in [t_0,+\infty)$. Поэтому из неравенства (9) имеем

$$\frac{dr(t)}{r(t)} \le \frac{1}{2}\|B(t)\|dt, \quad t \in [t_0,+\infty).$$

Интегрируя последнее дифференциальное неравенство от t_0 до t и заменяя $r(t)$ на $\|x(t)\|$ получаем оценку

$$\|x(t)\| \le \|x(t_0)\| \exp\left[\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\|B(\tau)\| d\tau\right].$$

Из последнего неравенства с учетом условия (7) следует ограниченность всех решений системы (1) на полуоси $[t_0, \infty)$.

Таким образом, все решения системы (1) ограничены. Теорема 2 доказана.

Теорема 3. *Пусть в системе (1) матрица* $A(t)$ *представима в виде*

$$A(t) = A_0 + A_1(t),$$

где A_0 *- постоянная матрица, а* $A_1(t)$ *- матрица - функция удовлетворяющая условию*

$$\int_{a}^{\infty}\|A_1(t)\| dt < \infty, \tag{10}$$

Предположим, что система

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x \tag{11}$$

устойчива.

Тогда система (1) равномерно устойчива в области $[a, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $X(t)$ - фундаментальная матрица решений системы (11) и $X(0) = E$. Перепишем систему (1) следующим образом

$$\frac{dx}{dt} = A_0 x + A_1(t)x \tag{12}$$

Будем рассматривать в уравнении (12) слагаемое $A_1(t)x$ как свободный член. Тогда применяя метод вариации произвольных постоянных Лагранжа, убеждаемся, что каждое решение системы (12) удовлетворяет следующему интегральному уравнению[4]:

$$x(t) = X(t)x(t_0) + \int_{t_0}^{t} X(t-\tau)A_1(\tau)x(\tau)d\tau, \quad t_0 \in [a, +\infty),\ t \ge t_0 \tag{13}$$

В силу леммы 3 матрица $X(t)$ ограничена, т.е. $\|X(t)\| \le M$ для всех $t \in [a, +\infty)$.
Из (13) имеем оценку

$$\|x(t)\| \le M\|x(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} M\|A_1(\tau)\|\cdot\|x(\tau)\| d\tau.$$

Применяя к последнему неравенству лемму Гронуолла-Беллмана, получаем

$$\|x(t)\| \le M\|x(t_0)\| \exp\left[\int_{t_0}^{t} M\|A_1(\tau)\|\cdot\|x(\tau)\| d\tau\right] \tag{14}$$

В силу условия (10) функция $\varphi(t) = \int_{a}^{t}\|A_1(\tau)\| d\tau$ ограничена на промежутке $[a, +\infty)$: $|\varphi(t)| \le N$ $\forall t \in [a, +\infty)$. Поэтому из (14) имеем

$$\|x(t)\| \le M\exp(MN)x(t_0) \quad \forall t \in [a, +\infty). \tag{15}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ - произвольное число. В качестве δ возьмём число

$$\delta := \frac{\varepsilon}{M\exp(MN)}. \tag{16}$$

Тогда из (15) получаем

$$\|x(t)\| \le \varepsilon \qquad t \in [t_0, +\infty).$$

Так как числа M и N в (16) не зависят от t_0, то и δ - тоже. Таким образом, δ зависит только от ε, и, поэтому система (1) равномерно устойчива в области $[a, +\infty)$. Теорема 3 доказана.

Теорема 4. *Пусть система (1) устойчива. Предположим, что выполнены следующие условия:*

$$1)\ \varliminf_{t\to\infty} \int_a^t TrA(\tau)d\tau > -\infty, \tag{17}$$

$$2)\ \int_a^{+\infty} \| f(\tau)\| d\tau < +\infty. \tag{18}$$

Тогда все решения неоднородной системы

$$\frac{dy}{dt} = A(t)y + f(t) \tag{19}$$

ограничены на промежутке $[a, +\infty)$.

Доказательство. Пусть $X(t)$ - нормированная фундаментальная матрица решений однородной системы (1).

Как известно, произвольное решение $y(t)$ системы (19) можно записать следующим образом [4].

$$y(t) = X(t)y(t_0) + \int_{t_0}^{t} K(t,\tau)\, f(\tau)d\tau, \tag{20}$$

где $K(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$ - матрица Коши.

Оценим норму решения $y(t)$. Из (20) имеем:

$$\|y(t)\| \le \|X(t)\| \cdot \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{t} \|K(t,\tau)\| \cdot \| f(\tau)\| d\tau \tag{21}$$

Так как система (1) устойчива, то матрица $X(t)$ ограничена:

$$\|X(t)\| \le M \quad t \in [t_0, +\infty)\ (t_0 \ge a). \tag{22}$$

Покажем, что обратная матрица $X^{-1}(t)$ тоже ограничена на $[t_0, +\infty)$. По формуле Остроградского – Лиувилля [4,5,6] имеем

$$\det X(t) = \exp\left[\int_{t_0}^{t} TrA(\tau)d\tau\right] \tag{23}$$

(Здесь $\det X(t_0) = 1$, так как $X(t_0) = E$).

В силу (17) существует число $m \in R$ такое, что

$$\int_a^t TrA(\tau)d\tau > m \quad \forall t \ge a. \tag{24}$$

С учётом неравенства (24) из (23) получаем

$$\det X(t) \ge \exp m > 0. \tag{25}$$

Элементы обратной матрицы $X^{-1}(t)$ представляют собой дробно-рациональные функций $\frac{\alpha_{ij}(t)}{\det X(t)}$, где $\alpha_{ij}(t)$ - алгебраические дополнения к элементам матрицы $X(t)$.

Функции $\alpha_{ij}(t)$ ограничены в силу ограниченности $X(t)$. Отсюда в силу неравенства (25) заключаем, что матрица $X^{-1}(t)$ ограничена на $[t_0,+\infty)$:

$$\left\|X^{-1}(t)\right\| \le N \ \forall t \in [t_0,+\infty). \tag{26}$$

Из (22) и (26) следует, что и матрица $K(t,\tau)$ тоже ограничена:

$$\left\|K(t,\tau)\right\| \le MN \quad t \in [t_0,+\infty) \tag{27}$$

Из (21) с учётом (22) и (27) получаем

$$\left\|y(t)\right\| \le M\left\|y(t_0)\right\| + MN\int_{t_0}^{t}\left\|f(\tau)\right\|d\tau. \tag{28}$$

Из условия (18) теоремы следует, что функция $\int_{t_0}^{t}\left\|f(\tau)\right\|d\tau$ ограничена:

$$\left|\int_{t_0}^{t}\left\|f(\tau)\right\|d\tau\right| < L \qquad \forall t \in [t_0,+\infty). \tag{29}$$

Из (28) и (29) имеем

$$\left\|y(t)\right\| \le M(\left\|y(t_0)\right\| + NL) \qquad \forall t \ge t_0.$$

Так как решение $y(t)$ ограничено на отрезке $[a,t_0]$, то оно ограничено и на всём промежутке $[a,+\infty)$. В силу произвольности решения $y(t)$ теорема 4 доказана.

Теорема 5. *Пусть все решения система (1) ограничены на* $[a,+\infty)$, *причём*

$$\varliminf_{t\to\infty}\int_{a}^{t} TrA(\tau)d\tau > -\infty. \tag{30}$$

Тогда, если для некоторой непрерывной матрицы - функций $B(t)$ *выполнено условие*

$$\int_{a}^{+\infty}\left\|B(\tau)\right\|d\tau < \infty, \tag{31}$$

то все решения системы

$$\frac{dy}{dt} = [A(t) + B(t)]y \tag{32}$$

также ограничены на промежутке $[a,+\infty)$.

Доказательство. Пусть $X(t)$ - нормированная фундаментальная матрица решений уравнения (1). Тогда рассматривая в (32) слагаемое $B(t)y$ как свободный член и применяя метод вариаций произвольных постоянных Лагранжа, получим, что каждое решение $y(t)$ системы (32) удовлетворяет следующему интегральному уравнению

$$y(t) = X(t)y(t_0) + \int_{t_0}^{\infty} K(t,\tau)B(\tau)y(\tau)d\tau, \quad (t_0 \ge a) \tag{33}$$

где $K(t,\tau) = X(t)X^{-1}(\tau)$ - матрица Коши.

Оценим $\left\|y(t)\right\|$. Из (33) имеем

$$\|y(t)\| \le \|X(t)\| \cdot \|y(t_0)\| + \int_{t_0}^{\infty} \|K(t,\tau)\| \cdot \|B(\tau)\| \cdot \|y(\tau)\| d\tau \tag{34}$$

По условию матрица-функция $X(t)$ ограничена:

$$\|X(t)\| \le M \quad \forall t \in [t_0, +\infty), \tag{35}$$

При доказательстве теоремы 4 было показано, что при выполнении условия (30) из (35) следует ограниченность обратной матрицы $X^{-1}(t)$:

$$\|X^{-1}(t)\| \le N \quad \forall t \in [t_0, +\infty)$$

Поэтому

$$\|K(t,\tau)\| \le MN \quad \forall t \in [t_0, +\infty). \tag{36}$$

Используя (35) и (36) из (34), имеем

$$\|y(t)\| \le M\|y(t_0)\| + N\int_{t_0}^{t} \|B(\tau)\| \cdot \|y(\tau)\| d\tau$$

Применяя к последнему интегральному неравенству лемму Гронуолла-Беллмана, будем иметь

$$\|y(t)\| \le M\|y(t_0)\| \exp\left[N\int_{t_0}^{t} \|B(\tau)\| d\tau \right] \quad (t \ge t_0). \tag{37}$$

В силу условия (38) теоремы 5 функция $\int_{t_0}^{t} \|B(\tau)\| d\tau$ ограничена:

$$\left| \int_{t_0}^{t} \|B(\tau)\| d\tau \right| \le L \quad (t \ge t_0).$$

С учётом последнего неравенства из (37) получаем

$$\|y(t)\| \le M\|y(t_0)\| \exp(NL) \quad \forall t \in [t_0, +\infty).$$

Таким образом, все решения системы (32) ограничены. Теорема 5 доказана.

3. Ограниченная устойчивость. Сначала установим справедливость следующей вспомогательной леммы.

Лемма 5. *Пусть действительная линейная система (1) ограниченно устойчива.*

Тогда интеграл от следа матрицы системы (1) ограничен снизу, т.е.

$$\int_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau \ge a > -\infty, \tag{38}$$

где a *- некоторая постоянная.*

Доказательство. Из определения ограниченной устойчивости системы следует, что системы (1) и (2) устойчивы. А в силу леммы 3, каждое из решений $x(t)$ и $y(t)$ этих систем ограничено на $[t_0, \infty)$. Значит, фундаментальные матрицы $X = X(t)$ и $Y = Y(t)$ взаимно сопряженных систем (1) и (2) также будут ограничены на этом промежутке. Но эти матрицы в силу леммы 1 связаны между собой соотношением

$$Y^T X = C,$$

где C - постоянная матрица. Отсюда находим X^{-1}:

$$X^{-1} = C^{-1} Y^T.$$

Из последнего равенства следует ограниченность матрицы X^{-1} в силу ограниченности матрицы Y и постоянства C.

Таким образом, матрицы $X(t)$ и $X^{-1}(t)$ ограничены на $[t_0, \infty)$. Это влечёт ограниченность их определителей.

Из равенства

$$X(t)X^{-1}(t) = E$$

непосредственно следует

$$\det X(t) \det X^{-1}(t) = 1.$$

Отсюда и из ограниченности матрицы $X^{-1}(t)$ следует, что

$$|\det X(t)| \geq m > 0. \tag{39}$$

Действительно, если допустить что $\det X(t)$ стремится к нулю вдоль некоторой последовательности (t_k), то

$$\det X^{-1}(t_k) = \frac{1}{\det X(t_k)} \to \infty .$$

Последнее противоречит ограниченности $\det X^{-1}(t)$.

Из неравенства (39), применяя формулу Остроградского-Лиувилля, получаем

$$\int_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau \geq a > -\infty ,$$

где a - некоторая постоянная. Лемма 5 доказана.

Докажем теперь теорему, дающую необходимые и достаточные условия ограниченной устойчивости системы (1).

Теорема 6(критерий ограниченной устойчивости). *Пусть в системе* (1) *матрица* $A(t)$ - *ограничена на полуоси* $[t_0, \infty)$. *Тогда для ограниченной устойчивости действительной линейной системы* (1) *необходимо и достаточно, чтобы она была приводима к системе с нулевой матрицей.*

Доказательство. Докажем сначала *необходимость* условия теоремы. Из ограниченной устойчивости системы (1) следует устойчивость этой системы. Тогда в силу леммы 3, каждое решение $x(t)$ однородной системы (1) ограничено на полуоси $[t_0, \infty)$. Но с другой стороны, из ограниченной устойчивости системы (1) в силу леммы 5 следует

$$\int_{t_0}^{t} SpA(\tau) d\tau \geq a > -\infty .$$

Итак, все условия леммы 2 выполнены. Значит система (1) может быть преобразована с помощью преобразования Ляпунова в систему с нулевой матрицей.

Докажем теперь *достаточность*. Пусть линейная система (1) с помощью преобразования Ляпунова

$$x = L(t)y \tag{40}$$

преобразуется в систему

$$\frac{dy}{dt} = 0 \tag{41}$$

с нулевой матрицей.

Возьмем n линейно независимых векторов $c_1, ..., c_n$ в R^n (в качестве $c_1, ..., c_n$ можно взять, например, координатные орты в R^n). Тогда функции

$$y(t) \equiv c_1, ..., y(t) \equiv c_n$$

образуют фундаментальную систему решений системы (41).

Составим матрицу, столбцами которой являются координаты вектор-функций $x^i(t) = L(t)c_i \ (i = 1, ..., n)$, являющиеся решениями системы (1):

$$X(t) = (L(t)c_1 ... L(t)c_n) = L(t)(c_1 ... c_n) = L(t)C\,. \tag{42}$$

Здесь C - матрица, столбцы которой суть координаты векторов c_i $(i = 1,..., n)$.
Из (42) имеем

$$\det X(t) = \det L(t) \det C \neq 0.$$

Значит, $X(t)$ - фундаментальная матрица для системы (1). Матрица $X(t)$ ограничена в силу ограниченности матрицы Ляпунова $L(t)$.

Из (42) имеем

$$\left|\det X(t)\right| = \left|\det L(t)\right|\left|\det C\right| \geq m > 0\,.$$

Отсюда следует ограниченность обратной матрицы $X^{-1}(t)$. Последнее гарантирует ограниченность фундаментальной матрицы решений сопряженной системы (2), поскольку эта матрица в силу леммы 1 имеет вид:

$$Y(t) = \left(X^{-1}(t)\right)^T C^T\,.$$

Из ограниченности фундаментальных матриц $X(t)$ и $Y(t)$ взаимно сопряженных систем (1) и (2) следует ограниченность каждого решения этих систем. В силу леммы 3 эти системы устойчивы. Следовательно, система (1) ограниченно устойчива. Теорема 6 доказана.

Следующая теорема даёт достаточные условия ограниченной устойчивости возмущенной системы.

Теорема 7. *Пусть система (1) ограниченно устойчива и матрица $B(t)$ абсолютно интегрируема, т.е.*

$$\int_{t_0}^{\infty} \left\|B(t)\right\| dt < \infty\,. \tag{43}$$

Тогда система

$$\frac{dz}{dt} = \left[A(t) + B(t)\right]z \tag{44}$$

также ограниченно устойчива.

Доказательство. Покажем, сначала, что система (44) может быть преобразована в систему с нулевой матрицей. Для этого покажем, что каждое решение системы (44) ограниченно на полупрямой $\left[t_0, \infty\right)$ и интеграл от следа матрицы этой системы ограничен снизу, т.е.

$$\int_{t_0}^{t} Sp\left(A(\tau) + B(\tau)\right) d\tau \geq a > -\infty\,, \tag{45}$$

где a - некоторая постоянная.

Пусть $X(t)$ - нормированная фундаментальная матрица решений системы (1). Тогда, рассуждая аналогично как и при доказательстве теоремы 5, получим, что каждое решение $z(t)$ системы (44) удовлетворяет следующему условию

$$\left\|z(t)\right\| \leq \left\|X(t)\right\| \cdot \left\|z(t_0)\right\| + \int_{t_0}^{t} \left\|K(t,\tau)\right\| \cdot \left\|B(\tau)\right\| \cdot \left\|z(\tau)\right\| d\tau \tag{46}$$

где $K(t,\tau) = X(t) X^{-1}(\tau)$ - матрица Коши.

В ходе доказательства леммы 5 было показано, что если система (1) ограниченно устойчива, то матрицы $X(t)$ и $X^{-1}(t)$ ограничены на $\left[t_0, \infty\right)$, т.е.

$$\left\|X(t)\right\| \leq M \text{ и } \left\|X^{-1}(t)\right\| \leq N \quad \forall t \in \left[t_0, +\infty\right). \tag{47}$$

Поэтому матрица Коши также ограничена

$$\left\|K(t,\tau)\right\| \leq MN \quad \forall t \in \left[t_0, +\infty\right). \tag{48}$$

Используя (47) и (48) из (46) имеем

$$\|z(t)\| \le M\|z(t_0)\| + N\int_{t_0}^{t}\|B(\tau)\|\cdot\|z(\tau)\|d\tau .$$

Применяя к последнему интегральному неравенству лемму Гроноулла – Беллмана и условие (43), будем иметь

$$\|z(t)\| \le M\|z(t_0)\|\exp\left[N\int_{t_0}^{t}\|B(\tau)\|d\tau\right] \le M\|z(t_0)\|\exp\left[N\int_{t_0}^{\infty}\|B(\tau)\|d\tau\right] < \infty \quad (t \ge t_0).$$

Таким образом, получили, что все решения $z(t)$ системы (44) ограничены на промежутке $[t_0, \infty)$.

Из условия теоремы (ограниченной устойчивости системы (1)) в силу леммы 5 имеем:

$$\int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau \ge m > -\infty . \qquad (49)$$

Кроме того, если $B(t) = [b_{lk}(t)]$, то, очевидно, имеем

$$\left|\int_{t_0}^{t} SpB(\tau)d\tau\right| \le \int_{t_0}^{t}|SpB(\tau)|d\tau \le \int_{t_0}^{t}\sum_j |b_{jj}(\tau)|d\tau \le n\int_{t_0}^{t}\|B(\tau)\|d\tau \le nk .$$

Отсюда

$$\int_{t_0}^{t} SpB(\tau)d\tau \ge -\left|\int_{t_0}^{t} B(\tau)d\tau\right| \ge -nk . \qquad (50)$$

Используя (49) и (50), получим

$$\int_{t_0}^{t} Sp[A(\tau)+B(\tau)]d\tau = \int_{t_0}^{t} SpA(\tau)d\tau + \int_{t_0}^{t} SpB(\tau)d\tau \ge m - nk =: a > -\infty.$$

Таким образом, все условия леммы 2 выполнены. Значит система (44) приводима к системе с нулевой матрицей. В силу теоремы 6 эта система будет ограниченно устойчивой. Теорема 7 доказана.

Литература

1. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1954. – 215 с.
2. *Чезари Л.* Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений. - М.: Мир, 1964. - 477 с.
3. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. - М.: Наука, 1974. - 318 с.
4. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теорий устойчивости. - М.: Наука, 1967. - 473 с.
5. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. - М.: Наука, 1974. - 332 с.
6. *Филиппов А.Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. - М.: УРСС, 2004. - 239 с.

On the Boundedness and Stability of Solutions of the Linear Differential Systems

A.H. Stash, M.M. Shumafov

In this paper some sufficient conditions for the boundedness and uniform stability of solutions of the linear differential systems are given.

