ПОВЕДЕНИЕ ТРАЕКТОРИЙ КУБИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА СФЕРЕ ПУАНКАРЕ В СЛУЧАЕ ОДНОЙ ОСОБОЙ ТОЧКИ

Д.С. Ушхо, А.Д. Ушхо

Адыгейский государственный университет, г.Майкоп

Данная работа является непосредственным продолжением исследования, проведенного авторами в статьях [1, 2].

Предлагаемая работа ставит своей целью изучение поведения траекторий дифференциальной системы

$$\frac{dx}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} a_{ij}x^i y^j \equiv P(x,y), \quad \frac{dy}{dt} = \sum_{i+j=0}^{3} b_{ij}x^i y^j \equiv Q(x,y) \tag{1}$$

в бесконечно удаленных частях фазовой плоскости в случае одной особой точки.

В работах [1, 2], полностью изучено поведение траекторий системы (1) на сфере Пуанкаре, если число особых точек на экваторе этой сферы равно трем и выполняются условия:

$$1).a_{ij}, \quad b_{ij} \in \mathbb{R}, \quad (P,Q) = 1, \sum_{i+j=3} |a_{ij}| > 0, \sum_{i+j=3} |b_{ij}| > 0 \tag{2}$$

2). Из трех бесконечно-удаленных особых точек хотя бы одна является сложной, причем в результате переноса начала координат в эту точку правые части полученной системы не содержат линейных и свободных членов. Для указанной особой точки $(u_0;0)$ выполняются условия:

$$\sum_{k+l=1} (|P'_{u^k z^l}(u_0,0)| + |Q'_{u^k z^l}(u_0,0)|) = 0 \tag{3}$$

$$\sum_{m+n=2} (|P''_{u^m z^n}(u_0,0)| + |Q''_{u^m z^n}(u_0,0)|) + \sum_{r+s=3} (|P'''_{u^r z^s}(u_0,0)| + |Q'''_{u^r z^s}(u_0,0)|) > 0. \tag{4}$$

Индекс Пуанкаре сложной особой точки, удовлетворяющей условиям (3) и (4), принимает значения из множества {0; 1; -1; 2; -2}.

Итак, пусть $A(u = z = 0)$ – единственная точка покоя системы (1) на бесконечности, то есть уравнение

$$u^2(b_{12} - a_{21} + (b_{03} - a_{12})u - a_{03}u^2) = 0 \tag{5}$$

имеет единственный корень $u = 0$, причем $a_{03} \neq 0$.

Будем различать два случая:

$$(b_{03} - a_{12})^2 + 4a_{03}(b_{12} - a_{21}) < 0; \tag{6}$$

$$|b_{03} - a_{12}| + |b_{12} - a_{21}| = 0. \tag{7}$$

Теорема 1. Пусть система (1) имеет единственную особую точку $A(u = z = 0)$ в БЧП, удовлетворяющую условиям (3) и (4). Если кроме того, выполняется неравенство (6), то $J(A) \in \{0; 1; -1; 2; -2\}$, причем индекс $J(A)$ вполне определяет характер точки $A(u = z = 0)$, а именно: если $J(A) = 0$, то к A примыкают два гиперболических сектора, но не примыкают эллиптические секторы; если $J(A) = -1$, то к A примыкают четыре гиперболических сектора, но не примыкают эллиптические секторы; если $J(A) = 1$, то к A примыкают один эллиптический сектор и один гиперболический сектор; если $J(A) = 2$, то к A примыкают два эллиптических сектора, но не примыкают гиперболические секторы; если $J(A) = -2$, то к A примыкают шесть гиперболических секторов, но не примыкают эллиптические секторы.

Доказательство основано на рассмотрении возможных критических направлений Фроммера в особой точке $A(u = z = 0)$ [3].

Пример 1.

$$\frac{dx}{dt} = y + x^2 + 2x^2y + y^3, \quad \frac{dy}{dt} = xy^2.$$

Единственное состояние равновесия (0;0) системы в КЧП является точкой с эллиптической областью [4]. К точке $A(u = z = 0)$ примыкают два гиперболических и два параболических сектора.

Пример 2.

$$\frac{dx}{dt} = 2x^2y + 2y^3, \quad \frac{dy}{dt} = 2 + xy^2.$$

Система не имеет конечных особых точек. К особой точке $A(u = z = 0)$ примыкают один эллиптический, один гиперболический и два параболических сектора.

Пример 3.

$$\frac{dx}{dt} = -2y - x^2y - y^3, \quad \frac{dy}{dt} = -4x + xy^2.$$

Простое седло (0;0) служит единственной точкой покоя системы в КЧП. К точке покоя $A(u = z = 0)$ в БЧП примыкают два эллиптических и два параболических сектора.

Пример 4.

$$\frac{dx}{dt} = 4y - y^3, \quad \frac{dy}{dt} = -x + xy^2.$$

Система имеет три центра: (0; 0), (0; 2), (0, -2) в КЧП, а в БЧП – точку равновесия $A(u = z = 0)$ с шестью гиперболическими секторами.

Пример 5.

$$\frac{dx}{dt} = -y + y^3, \quad \frac{dy}{dt} = 1 - xy^2.$$

Особыми точками системы в КЧП служат простой фокус (1; 1) и простой фокус (1; -1). В БЧП к единственной точке покоя $A(u = z = 0)$ примыкают четыре гиперболических сектора.

Пусть теперь выполняется равенство (7). Прежде всего заметим, что $|J(A)| < 3$. В самом деле, если $|J(A)| = 3$, то согласно теоремам 5 и 6 из работы [1] система (1) имеет в БЧП, кроме $A(u = z = 0)$ еще одну простую особую точку.

Если выполняется условие (7), но при этом особая точка $A(u = z = 0)$ такова, что в левой части неравенства (4) первое слагаемое не равно нулю, то есть правые части системы (3) [1] содержат квадратичные члены, то утверждение теоремы 12 [2], касающееся числа эллиптических и гиперболических секторов, примыкающих к $A(u = z = 0)$, остается в силе. Очевидно, в рассматриваемом нами случае $A(u = z = 0)$ не может быть топологическим узлом.

Итак, интерес представляет неисследованный случай, а именно случай, когда правые части системы (3) [1] не содержат квадратичных членов, разумеется, нет также и линейных членов.

Теорема 2. Пусть система (1) имеет в БЧП одну особую точку $A(u = z = 0)$, удовлетворяющую условиям (3), (4), (7). Если кроме того, $J(A) = 1$, первое слагаемое в левой части неравенства (4) равно нулю, то к точке $A(u = z = 0)$ либо примыкают один эллиптический и один гиперболический сектор, либо два эллиптических и два гиперболических сектора, либо три эллиптических и три гиперболических сектора.

Пример 6.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy^2 + y^3, \quad \frac{dy}{dt} = y + y^3.$$

В КЧП нет состояний равновесия системы, а в БЧП – к единственной точке покоя $A(u = z = 0)$ примыкают один эллиптический, один гиперболический и два параболических сектора.

Пример 7.

$$\frac{dx}{dt} = -2 - y + 2y^2 + xy^2 + y^3, \quad \frac{dy}{dt} = y + y^3.$$

К точке $A(u = z = 0)$ системы в БЧП примыкают два эллиптических, два гиперболических и четыре параболических сектора. Очевидно, в КЧП нет состояний равновесия.

Пример 8.

$$\frac{dx}{dt} = -1 + 5y - xy + xy^2 - 2y^3, \quad \frac{dy}{dt} = y - 2y^2 + y^3.$$

К единственной особой точке $A(u = z = 0)$ системы в БЧП примыкают три эллиптических, три гиперболических и шесть параболических секторов. В КЧП нет состояний равновесия.

Пусть далее система (1) удовлетворяет условию теоремы 53, но при этом $J(A) = 0$. Легко показать, что в таком случае к точке $A(u = z = 0)$ не может примыкать более двух эллиптических секторов.

В самом деле, пусть к точке $A(u = z = 0)$ примыкают три эллиптических сектора. Тогда по формуле Бендиксона [4]:

$$J = 1 + \frac{e - h}{2} \tag{8}$$

число гиперболических секторов, примыкающих к точке $A(u = z = 0)$, равно пяти. В силу того, что производная dy/dt (см. систему (3) [1]) сохраняет свой знак при переходе через точку $A(u = z = 0)$ вдоль прямой $z = 0$, сумма числа эллиптических и числа гипеболических секторов, примыкающих к точке $A(u = z = 0)$ и расположенных в одной из полуплоскостей $z > 0$ и $z < 0$, равна пяти, а в другой – трем. Поэтому две прямые $z = \pm\varepsilon$, где ε – сколь угодно малое положительное число, имеют в сумме не менее семи общих точек с изоклиной бесконечности $\overline{P}(u, z) = 0$ системы (3) [1]. Иначе говоря, индекс ветвления кривой $\overline{P}(u, z) = 0$ в точке $A(u = z = 0)$ не менее семи. Это противоречит лемме из работы [5].

Таким образом, справедлива

Теорема 3. Пусть система (1) имеет на экваторе сферы Пуанкаре одну точку покоя $A(u = z = 0)$, удовлетворяющую условиям (3), (4). Если кроме того, выполняется равенство (7), $J(A) = 0$ и первое слагаемое в левой части неравенства (4) равно нулю, то к точке $A(u = z = 0)$ либо примыкают один эллиптический и три гиперболических сектора, либо примыкают два эллиптических и четыре гиперболических сектора, либо примыкают два гиперболических сектора, но не примыкают эллиптические секторы.

Пример 9.

$$\frac{dx}{dt} = x + xy^2 + y^3, \quad \frac{dy}{dt} = y + y^3.$$

Начало координат (0; 0) – простой нейстойчивый узел в КЧП. Система в БЧП имеет единственную точку покоя $A(u = z = 0)$ с двумя гиперболическими и одним параболическим сектором.

Пример 10.

$$\frac{dx}{dt} = 1 + xy + xy^2 + y^3, \quad \frac{dy}{dt} = -y^2 + y^3.$$

Единственной особой точкой системы в КЧП служит простой неустойчивый узел (-1; 1). На экваторе сферы Пуанкаре расположена точка покоя $A(u = z = 0)$ с одним эллиптическим, тремя гиперболическими и двумя параболическими секторами.

Пример 11.

$$\frac{dx}{dt} = x + y - xy^2 - \frac{1}{2}y^3, \quad \frac{dy}{dt} = y - y^3.$$

В КЧП система имеет одну особую точку (0; 0) – простой неустойчивый узел, а в БЧП – особую точку $A(u = z = 0)$, к которой примыкают два эллиптических, четыре гиперболических и три параболических сектора.

Теорема 4. Пусть система (1) имеет на экваторе сферы Пуанкаре одну точку покоя $A(u = z = 0)$, удовлетворяющую условиям (3), (4). Если кроме этого, выполняется условие (7), $J(A) = -2$ и первое слагаемое в левой части неравенства (4) равно нулю, то к точке $A(u = z = 0)$ примыкают шесть гиперболических секторов, но не примыкают эллиптические секторы.

Доказательство. Согласно формуле (8) $h = e + 6$. Покажем, что $e = 0$. Предположим, что $e = 1$. Тогда сумма числа эллиптических и числа гиперболических секторов, примыкающих к точке $A(u = z = 0)$, равна восьми. Именно поэтому в одной из полуплоскостей $z > 0$ и $z < 0$ сумма числа эллиптических и числа гиперболических секторов, примыкающих к точке $A(u = z = 0)$, не менее пяти. Следовательно прямая $z = \varepsilon$, где $|\varepsilon| > 0$ – сколь угодно малое число, имеет по меньшей мере три контакта с траекториями системы (3) [1] в той из двух полуплоскостей $z > 0$ и $z < 0$, в которой сумма числа эллиптических и числа гиперболических секторов, примыкающих к точке $(u = z = 0)$, не менее пяти. Вместе с тем в рассматриваемом случае $a_{12} \neq 0$, и изоклину нуля системы (3) [1] можно представить в виде:

$$z(a_{12}u^2 + a_{11}uz + a_{10}z^2 + a_{03}u^3 + a_{02}u^2z + a_{01}uz^2 + a_{00}z^3) \equiv zR(u, z) = 0.$$

Так как $R''_{u^2}(0;0) \neq 0$, то по теореме 70 [6] уравнение $R(u,\varepsilon) = 0$ имеет не более двух корней. Полученное противоречие доказывает, что $e \neq 1$ и, тем более, $e < 2$. Теорема доказана.

Пример 12.

$$\frac{dx}{dt} = 5x - xy - 10xy^2 + 10y^3, \quad \frac{dy}{dt} = 10y - 10y^3.$$

В КЧП система имеет три простых состояния равновесия: $(\frac{5}{3}; 1)$, $(-\frac{5}{2}; -1)$ – устойчивые узлы, $(0; 0)$ – неустойчивый узел. Единственной особой точкой системы в БЧП является точка $A(u = z = 0)$, к которой примыкают шесть гиперболических и один параболический сектор.

Теорема 5. Пусть система (1) имеет на экваторе сферы Пуанкаре одну точку покоя $A(u = z = 0)$, и она удовлетворяет условиям (3), (4). Если кроме того, выполняется равенство (7), $J(A) = 2$ и первое слагаемое в левой части неравенства (4) равно нулю, то к точке $A(u = z = 0)$ примыкают либо два эллиптических и два параболических сектора, либо один гиперболический, четыре параболических и три эллиптических сектора, либо два гиперболических, четыре эллиптических и пять параболических секторов.

В самом деле, так как $J(A) = 2$, то по формуле (8) получаем равенство $e = 2 + h$, то есть к точке $A(u = z = 0)$ примыкают не менее двух эллиптических секторов. Принимая во внимание работу [7] и тот факт, что правые части системы (3) [1] содержат кубические члены, получаем оценку числа эллиптических секторов $2 \leqslant e \leqslant 4$. Отсюда следует утверждение теоремы.

Пример 13.

$$\frac{dx}{dt} = x - xy^2 + y^3, \quad \frac{dy}{dt} = -y^3.$$

Топологическое седло (0;0) является единственным состоянием равновесия системы в КЧП. К точке равновесия $A(u = z = 0)$ в БЧП примыкают два эллиптических и два гиперболических сектора.

Пример 14.

$$\frac{dx}{dt} = x - y^2 - xy^2 - y^3, \quad \frac{dy}{dt} = -y - y^3.$$

В КЧП система имеет одну особую точку $(0; 0)$ – простое седло. В БЧП к точке $A(u = z = 0)$ примыкают три эллиптических, один гиперболический и четыре параболических сектора.

Пример 15.

$$\frac{dx}{dt} = -x + y + xy^2 - y^3, \quad \frac{dy}{dt} = y + y^3.$$

Начало координат $(0; 0)$ – простое седло системы в КЧП.К точке покоя $A(u = z = 0)$ системы (3) [1] примыкают два гиперболических, четыре эллиптических и пять параболических секторов.

Теорема 6. Пусть система (1) имеет на экваторе сферы Пуанкаре одну точку покоя $A(u = z = 0)$, и она удовлетворяет условиям (3), (4). Если кроме того, выполняется равенство (7), $J(A) = -1$ и первое слагаемое в левой части неравенства (4) равно нулю, то к точке $A(u = z = 0)$ либо примыкают четыре гиперболических сектора и не примыкают эллиптические секторы, либо примыкают один эллиптический и пять гиперболических секторов.

Доказательство. Так как $J(A) = -1$, то по формуле (8) получаем равенство $h = e + 4$, то есть число гиперболических секторов, примыкающих к точке $A(u = z = 0)$ не менее четырех. Покажем, что $e \leqslant 1$. В условиях данной теоремы система (1) имеет вид (26) [1]. Поэтому в силу неравенства $b_{03} \neq 0$ уравнение (μ) [1] имеет хотя бы один действительный корень $y = y_i$.

Ранее при доказательстве теоремы 5 [1] мы отмечали, что простому корню уравнения (μ) [1] соответствует простая особая точка системы (26) [1] типа узла или седла, расположенная на инвариантной прямой $y = y_i$. Так как $J(A) = -1$, то система (1) имеет три инвариантные прямые $y = y_1$, $y = y_2$, $y = y_3$ (в противном случае сумма индексов особых точек системы (1) в КЧП не будет равна $+2$). При этом на одной из них нет состояния равновесия, а на двух других расположены два узла (по одному на каждой прямой). Ради определенности считаем, что $y_1 < y_2 < y_3$. Можно показать, что узлы имеют одинаковую устойчивость (противоположную устойчивость), если они расположены на прямых $y = y_1$ и $y = y_3$ ($y = y_1$ и $y = y_2$ или $y = y_2$ и $y = y_3$). Учитывая линейность относительно переменной x правой части первого уравнения системы (26) [1], можно легко установить, что система (3) [1] не имеет эллиптического сектора, примыкающего к особой точке $A(u = z = 0)$, если только узлы расположены на инвариантных прямых $y = y_1$ и $y = y_3$. Но и в случае, когда узлы имеют противоположную устойчивость, то есть они расположены на соседних инвариантных прямых, система не может иметь более одного эллиптического сектора, примыкающего к точке равновесия $A(u = z = 0)$.

В самом деле, если допустить противное, то согласно приведенному выше равенству число гиперболических секторов, примыкающих к точке $A(u = z = 0)$, не менее шести. Принимая во внимание знакопостоянство производной $\frac{du}{dt}$ в достаточно малой окрестности точки $A(u = z = 0)$ вдоль прямой $z = 0$, можно утверждать, что сумма числа эллиптических и числа гиперболических секторов, примыкающих к $A(u = z = 0)$ и расположенных в одной из полуплоскостей $z > 0$ и $z < 0$, не меньше пяти. Поэтому найдется сколь угодно много прямых, имеющих не менее четырех контактов с траекториями системы (3) [1] в достаточно малой проколотой окрестности точки $A(u = z = 0)$. Это противоречит теореме 2 [1]. Можно здесь рассуждать и так. В условиях теоремы $a_{12} \neq 0$, поэтому второе уравнение системы (3) [1] запишется в виде:

$$\frac{du}{dt} = -a_{12}u^2z - a_{11}uz^2 - a_{10}z^3 - a_{03}u^3z - a_{02}u^2z^2 - a_{01}uz^3 - a_{00}z^4 \equiv z\overline{Q}_3(u, z).$$

В той из двух полуплоскостей $z > 0$ и $z < 0$, в которой к точке $A(u = z = 0)$ примыкают в сумме не менее пяти эллиптических и гиперболических секторов, найдется прямая $z = \varepsilon$, где $|\varepsilon| > 0$ – сколь угодно малое число, имеющая не менее трех точек пересечения с изоклиной нуля $\overline{Q}_3(u, z) = 0$. А это противоречит теореме 70 [6] в силу того, что $\overline{Q}''_{3u^2}(0, 0) = -2a_{12} \neq 0$. Теорема доказана.

Пример 16.

$$\frac{dx}{dt} = -2 - xy^2 + y^3, \quad \frac{dy}{dt} = y - y^3.$$

Два простых устойчивых узла (-1;1), (-3; -1) являются точками равновесия системы в КЧП. К единственной точке равновесия $A(u = z = 0)$ системы в БЧП примыкают один параболический и четыре гиперболических сектора.

Пример 17.

$$\frac{dx}{dt} = -4 + x + xy - 2xy^2 + 2y^3, \quad \frac{dy}{dt} = 2y - 2y^3.$$

Система обладает двумя простыми состояниями равновесия в КЧП: устойчивым узлом (-3; -1) и неустойчивым узлом (4; 0). К единственному состоянию равновесия системы в БЧП – точке $A(u = z = 0)$ примыкают один эллиптический, два параболических и пять гиперболических секторов.

Замечание. Утверждение автора [8] о том, что в случае одной особой точки системы (1) на экваторе сферы Пуанкаре, она может быть узлом, седлом или седлоузлом неверно хотя бы потому, что эта особая точка узлом быть не может.

Литература

1. *Ушхо Д.С.* Исследование бесконечно удаленных особых точек кубической дифференциальной системы в одном случае / Д.С. Ушхо, А.Д. Ушхо // Труды ФОРА. – 2007. – No 12. – С.18-30.

2. *Ушхо Д.С.* Исследование бесконечно удаленных особых точек кубической дифференциальной системы. Специальный случай трех особых точек / Д.С. Ушхо, А.Д. Ушхо // Труды ФОРА. – 2007. – No 12. – С.47-65.

3. *Фроммер М.* Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер / М. Фроммер // Успехи математических наук. – 1941. – Вып.9. – С. 212-253.

4. *Андронов А.А.* Качественная теория динамических систем второго порядка / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1966. – 568 с.

5. *Берлинский А.Н.* О числе эллиптических областей, примыкающих к особой точке / А.Н.Берлинский // Доклады Академии наук СССР. – 1967. – Т. 178. – No 4. – С. 759-762.

6. *Андронов А.А.* Теория бифуркаций динамических систем на плоскости / А.А. Андронов, Е.А. Леонтович, И.И. Гордон, А.Г. Майер. – М.: Наука, 1967. – 488 с.

7. *Ушхо Д.С.* О числе эллиптических секторов, примыкающих к особой точке / Д.С. Ушхо // Труды ФОРА. – 2006. – No 11. – С.88-92.

8. *Шарипов Ш.Р.* О распределении особых точек на экваторе сферы Пуанкаре / Ш.Р. Шарипов // Труды Самаркандского госу. университета. - 1964. – Вып. 144. – С. 89-92

Behavior of trajectories of cubic system on Poincare's sphere in case of one singular point

D.S. Uskho, A.D. Uskho

This work is direct continuation of the research spent by authors in articles [1, 2].

