2007 г. **Труды ФОРА** №12

СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ РАНГА 1 С КОРНЕВОЙ СИСТЕМОЙ В ПРОСТОМ ПОЛЕ

А. В. Зайцева, О. К. Тен

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

В работе получено описание супералгебр Ли $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ ранга 1, содержащих четный регулярный элемент $e_0 \in [L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}]$, все собственные значения которого лежат в простом поле.

Конечномерная супералгебра Ли $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ называется супералгеброй ранга 1, если L содержит подалгебру Картана размерности 1. Подалгебра Картана для супералгебр Ли определяется как нильпотентная подалгебра $H = H_{\bar{0}} \oplus H_{\bar{1}}$, совпадающая со своим нормализатором (см. напр. [1, 2]). Известно, что в случае, когда характеристика поля отлична от 2, то $H_{\bar{0}}$ является подалгеброй Картана алгебры Ли $L_{\bar{0}}$, и

$$H = L^0(H_{\bar{0}}) = \{x \in L \mid (\operatorname{ad} h)^m(x) = 0, \text{для всех } h \in H_{\bar{0}} \text{ и некоторого } m \in \mathbb{N}\}$$

(теорема 5 [2]). Отсюда следует, что если $H_{\bar{0}} = \{0\}$, то $H = L^0(H_{\bar{0}}) = L$. В частности, если $\dim H = 1$ и $H_{\bar{0}} = \{0\}$, то $L = L_{\bar{1}}$ — одномерная абелева супералгебра Ли. Поэтому имеет смысл рассматривать только случай, когда $H_{\bar{0}} \neq \{0\}$.

В настоящей работе мы изучаем супералгебры Ли ранга 1, содержащие четный регулярный элемент e_0, все собственные значения которого лежат в простом подполе K_0 основного поля K. Алгебры Ли ранга 1, содержащие регулярный элемент, все собственные значения которого лежат в простом поле K_0, полностью описаны в работах [3, 4]. Основной результат, полученный для таких алгебр Ли, формулируется в виде следующей теоремы.

Теорема 1. *Пусть L — конечномерная алгебра Ли ранга 1 над полем характеристики $p \geqslant 3$. Тогда L содержит регулярный элемент $e_0 \in [L, L]$, все корни которого лежат в простом поле, тогда и только тогда, когда L — алгебра Ермолаева либо, при $p = 3$, $L \cong psl(3)$.*

Приведем описание алгебр Ли Ермолаева, следуя [6]. Пусть U и V — линейные пространства с базисами $u_1, u_2, \ldots, u_{p-1}$ и $v_1, v_2, \ldots, v_{p-1}$ соответственно, $Z^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant \frac{p-1}{2}$ — линейные пространства, натянутые на базисные векторы $z_i^{(i)}, z_{i+1}^{(i)}, \ldots, z_{p-i}^{(i)}$. Пусть Z — прямая сумма некоторого количества, возможно нулевого, пространств $Z^{(i)}$ и $Y_0 = Ke_{-1} \oplus Ke_0 \oplus Ke_1 \oplus U \oplus V \oplus Z$. На Y_0 задана структура алгебры Ли следующим образом:

$$\begin{aligned} &[e_{-1}, e_1] = 2e_0, \quad [e_0, e_{-1}] = -e_{-1} - v_{p-1}, \quad [e_0, e_1] = e_1 + u_1, \\ &[e_{-1}, a_j] = (j-i)a_{j-1}, \quad [e_0, a_j] = ja_j, \quad [e_1, a_j] = (j+i)a_{j+1}, \\ &[x, y] = 0 \text{ для всех } x, y \in U \oplus V \oplus Z, \end{aligned} \tag{1}$$

где a_j — базисный элемент вида u, v или z, j — соответствующий нижний индекс, i — значение наименьшего нижнего индекса в строке базисных элементов u, v или z, которой принадлежит a_j. При этом полагаем, что $a_{i-1} = 0 = a_{p-i+1}$. Элементы $\lambda u_j + \mu v_j, j = 1, 2, \ldots, p-1$ при фиксированных $\lambda, \mu \in K$ порождают идеал J. Будем обозначать смежные классы в $\overline{Y}_0 = Y_0/J$ их представителями и пусть $Y' = \overline{Y}_0$ или $Y' = \overline{Y}_0 \oplus Ke_2 \oplus \ldots \oplus Ke_{p-2}$, где во втором случае считаем, что λ, μ не равны одновременно нулю и Z, если отлично от нуля, содержит только слагаемые вида $Z^{(1)}$. Y' является алгеброй Ли относительно умножения в $\overline{Y}_0$, индуцированного умножением в

Y_0, и дополненного следующими соотношениями при $i = -1, 0, 1; j, k = 2, 3, \ldots, p-2$:

$$\begin{gathered}
[e_i, e_j] = (j-i)(e_{j+i} + \lambda j u_{i+j} - \mu i v_{i+j}), \text{если } 2 \leqslant j+i \leqslant p-2, \\
[e_1, e_{p-2}] = (p-3)\mu(e_{-1} + v_{p-1}), [e_{-1}, e_2] = 3\lambda(e_1 + u_1), \\
[e_j, e_k] = \begin{cases} (k-j)\lambda(e_{j+k} - \mu(j+k)v_{j+k}), & \text{если } k+j < p-1 \\ (k-j)\lambda\mu(e_{-1} + v_{p-1}), & \text{если } k+j = p-1 \\ (k-j)\lambda\mu e_0, & \text{если } k+j = p \\ (k-j)\lambda\mu(e_1 + u_1), & \text{если } k+j = p+1 \\ (k-j)\mu(e_{j+k-p} - \lambda(j+k)u_{j+k-p}), & \text{если } k+j > p+1 \end{cases}
\end{gathered} \tag{2}$$

и

$$[e_j, a_l] = \begin{cases} (j+l)\lambda a_{j+l}, & \text{если } j+l < p \\ 0, & \text{если } j+l = p \\ (j+l)\mu a_{j+l-p}, & \text{если } j+l > p, \end{cases} \tag{3}$$

где $a_l = u_l, v_l$ или $z_l^{(1)}$, $l = 1, 2, \ldots, p-1$. Алгебра Y, совпадающая с таким образом построенной алгеброй Y', либо с ее факторалгеброй по идеалу, порожденному элементами u и v, называется алгеброй Ермолаева. Образы U, V и Z, как и их элементов, в факторалгебре будем обозначать теми же буквами, что и в Y'.

При $p = 3$ обозначим через S простую семимерную алгебру Ли

$$S = Ke_{-1} \oplus Ke_0 \oplus Ke_1 \oplus Ku_1 \oplus Ku_2 \oplus Kv_1 \oplus Kv_2,$$

в которой имеют место следующие соотношения:

$$\begin{gathered}
[e_i, e_j] = (j-i)e_{i+j}, [e_i, u_j] = ju_{i+j}, [e_i, v_j] = jv_{i+j}, \\
[u_i, v_j] = ije_{i+j}, [u_i, u_j] = [v_i, v_j] = 0,
\end{gathered} \tag{4}$$

где $i, j \in K_0, u_0 = v_0 = 0$. Алгебра Ли S изоморфна алгебре $psl(3)$.

Таким образом построенные базисы алгебр Ермолаева Y и алгебры S, умножение для которых задается соотношениями (1–3) и (4), будем называть каноническими. Имеет место следующая

Теорема 2. *([4]) Всякий регулярный элемент $e_0 \in [L, L]$, все корни которого лежат в простом поле, в алгебре Ли L ранга 1 может быть дополнен, возможно заменив, если нужно, e_0 на пропорциональный элемент, до канонического базиса.*

Каждая алгебра Ермолаева имеет абелев идеал $\operatorname{rad} Y$, натянутый как линейное пространство на элементы u, v, z. Факторалгебра $Y/\operatorname{rad} Y$ проста и изоморфна $sl(2)$ или, при $p > 3$, p-мерной простой алгебре. Последняя над алгебраически замкнутым полем изоморфна алгебре Витта W_1. В частности, из теоремы 1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 3. *([3]) Пусть L — конечномерная простая алгебра Ли ранга 1 над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \geqslant 3$. Тогда, если L содержит регулярный элемент, все корни которого лежат в простом поле, то $L \cong sl(2)$ или $psl(3)$, если $p = 3$, либо $L \cong sl(2)$ или W_1, если $p > 3$.*

На алгебре Ермолаева Y можно задать структуру супералгебры Ли, отделив часть слагаемых в Y из Z вида $Z^{(i)}$ и обозначив их сумму как $Y_{\bar 1}$, а сумму остальных слагаемых Z вместе с оставшимися слагаемыми Y обозначив как $Y_{\bar 0}$. Тогда $Y = Y_{\bar 0} \oplus Y_{\bar 1}$ является супералгеброй Ли относительно той же операции умножения, которая была задана на алгебре Ли Y. Таким образом определенные супералгебры $Y = Y_{\bar 0} \oplus Y_{\bar 1}$ назовем супералгебрами Ли Ермолаева. Канонический базис алгебры Ли Y будем называть каноническим базисом супералгебры Ермолаева $Y = Y_{\bar 0} \oplus Y_{\bar 1}$.

Обозначим через $T(\xi)$, $\xi \in K^*$ простые пятимерные супералгебры Ли

$$T(\xi) = T(\xi)_{\bar 0} \oplus T(\xi)_{\bar 1}, \quad T(\xi)_{\bar 0} = Ke_{-1} \oplus Ke_0 \oplus Ke_1, \quad T(\xi)_{\bar 1} = Ku \oplus Kv,$$

в которых имеют место следующие соотношения:

$$\begin{array}{lll} [e_{-1}, e_1] = 2e_0, & [e_0, e_{-1}] = -e_{-1}, & [e_0, e_1] = e_1, \\ [e_0, u] = \dfrac{p-1}{2}u, & [e_0, v] = \dfrac{p+1}{2}v, & [e_{-1}, u] = 0, \\ [e_{-1}, v] = u, & [e_1, u] = -v, & [e_1, v] = 0, \\ [u, u] = -2\xi e_{-1}, & [u, v] = -2\xi e_0, & [v, v] = -2\xi e_1. \end{array} \qquad (5)$$

Супералгебры Ли $T(\xi)$ и $T(\xi')$ изоморфны тогда и только тогда, когда $\xi^{-1}\xi' \in K^2$, то есть ξ и ξ' представляют один смежный класс в факторгруппе $K^*/(K^*)^2$. Супералгебра Ли $T(1)$ изоморфна супералгебре $osp(1,2)$ ([8]). Однородный базис e_{-1}, e_0, e_1, u, v супералгебры $T(\xi)$, удовлетворяющий соотношениям (5), назовем каноническим.

Основным результатом нашей статьи является следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть L — конечномерная супералгебра Ли ранга 1 над полем характеристики $p \geqslant 3$. Тогда L содержит четный регулярный элемент $e_0 \in [L_{\bar 0}, L_{\bar 0}]$, все корни которого лежат в простом поле, тогда и только тогда, когда L — супералгебра Ли Ермолаева, либо $L \cong T(\xi), \xi \in K^*$, либо, при $p = 3$, $L \cong S$. Каждый четный регулярный элемент $e_0 \in [L_{\bar 0}, L_{\bar 0}]$, все корни которого лежат в простом поле, в супералгебре Ли L ранга 1 может быть дополнен, возможно заменив, если нужно, e_0 на пропорциональный элемент, до канонического базиса.*

Из этой теоремы очевидно вытекает следующее описание простых супералгебр Ли ранга 1.

Следствие 5. *Если конечномерная простая супералгебра Ли L ранга 1 над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \geqslant 3$ содержит четный регулярный элемент $e_0 \in [L_{\bar 0}, L_{\bar 0}]$, все корни которого лежат в простом поле, то либо L — простая алгебра Ли ранга 1 из теоремы 3, либо $L \cong osp(1,2)$.*

Условие $e_0 \in [L_{\bar 0}, L_{\bar 0}]$ является частным случаем условия $e_0 \in [L, L]$. Нетрудно видеть, что как и в случае алгебр Ли ранга 1 (см. [4], стр. 38), условие существования четного регулярного элемента $e_0 \in [L, L]$ в супералгебре L равносильно условию $[L, L] = L$, и всякая супералгебра ранга 1, для которой $[L, L] \neq L$, есть расширение некоторой супералгебры L', с помощью четного невырожденного дифференцирования e_0: $L = Ke_0 \oplus L'$. Действительно, если $[L, L] \neq L$, то рассматривая разложение $L = \oplus_{i=0}^{p-1} L_i$ супералгебры L в прямую сумму корневых подпространств относительно e_0, заметим, что $L_0 = Ke_0$ и $[e_0, L] = \oplus_{i=1}^{p-1} L_i$ имеет коразмерность 1. Отсюда следует, что $[L, L] = [e_0, L] = \oplus_{i=1}^{p-1} L_i$ и $L = Ke_0 \oplus L'$, где $L' = [L, L]$.

Задача описания супералгебр Ли ранга 1, содержащих четный регулярный элемент $e_0 \in [L, L] \backslash [L_{\bar 0}, L_{\bar 0}]$, все корни которого лежат в простом поле, требует дополнительного исследования.

Для доказательства основной теоремы нам понадобятся некоторые факты о представлениях алгебр Ермолаева.

Пусть $T^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant \frac{p-1}{2}$ — линейные пространства, натянутые на базисные векторы $t_i^{(i)}, t_{i+1}^{(i)}, \ldots, t_{p-i}^{(i)}$. Зададим на $T^{(i)}$ структуру Y-модуля следующим образом (считаем, что $i = 1$, если Y содержит элементы $e_2, e_3, \ldots, e_{p-2}$):

$$\begin{array}{l} e_{-1} \cdot t_j^{(i)} = (j-i)t_{j-1}^{(i)}, \quad e_0 \cdot t_j^{(i)} = jt_j^{(i)}, \quad e_1 \cdot t_j^{(i)} = (j+i)t_{j+1}^{(i)}, \\ x \cdot t = 0 \text{ для всех } x \in U + V + Z, t \in T^{(i)}, \end{array} \qquad (6)$$

где $j = i, \ldots, p - i$, и, если Y содержит элементы $e_2, e_3, \ldots, e_{p-2}$ при $p > 3$,

$$e_k \cdot t_j^{(1)} = \begin{cases} (k+j)\lambda t_{k+j}^{(1)}, & \text{если } k + j < p \\ 0, & \text{если } k + j = p \\ (k+j)\mu t_{k+j-p}^{(1)}, & \text{если } k + j > p, \end{cases} \qquad (7)$$

где $k = 2, 3, \ldots, p-2$; $j = 1, 2, \ldots, p-1$. Легко видеть, что $\operatorname{rad} Y \cdot T^{(i)} = \{0\}$ и $T^{(i)}$ является простым модулем над $Y/\operatorname{rad} Y$.

Имеют место следующие утверждения о модулях над алгебрами Ли $sl(2)$, Y и S.

Предложение 6. *Пусть P, Q — простые $sl(2)$-модули четной размерности, e_0 — регулярный элемент в $sl(2)$ и $M = \oplus_{i=0}^{p-1} M_i$ — разложение $sl(2)$-модуля $M = P \otimes Q$ в прямую сумму весовых подпространств относительно $(e_0)_M$. Тогда подпространство M_0 порождает $sl(2)$-модуль M.*

Доказательство следует из того, что каждое слагаемое W, входящее в разложение тензорного произведения простых $sl(2)$-модулей четной размерности в прямую сумму неразложимых подмодулей (см. теорему 1.11 [5]), обладает указанным свойством: каждое из них, как нетрудно проверить из их описания, порождается нулевой фиттинговой компонентой преобразования $(e_0)_W$. □

Следствие 7. *Пусть в условиях предложения 6 задан гомоморфизм $\varphi : M \to M'$ $sl(2)$-модулей. Тогда, если преобразование $(e_0)_{\operatorname{im}\varphi}$ невырожденное, то $\varphi = 0$. В частности, если модуль M' таков, что преобразование $(e_0)_{M'}$ невырожденное, то $\varphi = 0$.*

Доказательство. Без ограничения общности можно считать, что $M' = \operatorname{im}\varphi$ и преобразование $(e_0)_{M'}$ невырожденное. Тогда, если $M = \oplus_{i=0}^{p-1} M_i$, $M' = \oplus_{\lambda \neq 0} M'_\lambda$ — разложения $sl(2)$-модулей $M = P \otimes Q$ и M' в прямую сумму весовых подпространств относительно соответственно $(e_0)_M$ и $(e_0)_{M'}$, то $\varphi(M_i) \subseteq M'_i$. Отсюда получаем, что $\varphi(M_0) = \{0\}$, поскольку $M'_0 = \{0\}$. Следовательно, $M_0 \subseteq \ker\varphi$ и, так как по предыдущему предложению M_0 порождает $sl(2)$-модуль M, то $\ker\varphi = M$ и $\varphi = 0$. □

Предложение 8. *Пусть M — конечномерный Y-модуль, преобразование $(e_0)_M$ которого невырожденно и имеет все характеристические корни в простом поле. Тогда M представимо в виде прямой суммы подмодулей, изоморфных $T^{(i)}, 1 \leqslant i \leqslant \frac{p-1}{2}$ или $T^{(1)}$, если Y содержит элементы $e_2, e_3, \ldots, e_{p-2}$ при $p > 3$.*

Доказательство. Обозначим через R_0 подалгебру алгебры Ли Y_0, порожденную элементами e, u, v. Тогда пространства $T^{(i)}$, $1 \leqslant i \leqslant \frac{p-1}{2}$, натянутые на базисные векторы $t_i^{(i)}, t_{i+1}^{(i)}, \ldots, t_{p-i}^{(i)}$, можно рассматривать как R_0-модули относительно действия, заданного соотношениями (6). Легко видеть, что $\operatorname{rad} R_0 \cdot T^{(i)} = \{0\}$ и $T^{(i)}$ является простым модулем над $\overline{R}_0 = R_0/\operatorname{rad} R_0 \cong sl(2)$.

Из предложения 2 [4] Y-модуль M, рассматриваемый как R_0-модуль, есть прямая сумма R_0-модулей $T^{(i)}$. Докажем, что элементы подпространства Z алгебры Y действуют на M тривиально. Пусть $Z^{(k)}$ — прямое слагаемое Z и $T^{(l)}$ — прямое слагаемое R_0-модуля M. Тогда $Z^{(k)}$ является R_0-модулем, относительно действия, индуцированного присоединенным действием в Y. При этом $\operatorname{rad} R_0 \cdot Z^{(k)} = \{0\}$, поэтому $Z^{(k)}$ можно рассматривать как модуль над $\overline{R}_0$. Рассмотрим следующий гомоморфизм $\overline{R}_0$-модулей:

$$\varphi : Z^{(k)} \otimes T^{(l)} \to M, \varphi(z \otimes t) = z \cdot t, z \in Z^{(k)}, t \in T^{(l)}.$$

Так как по условию $(e_0)_M$ невырождено, то по следствию 7 получаем, что $\varphi = 0$ и, следовательно, $Z^{(k)} \cdot T^{(l)} = \{0\}$. Отсюда получаем, что элементы из Z действует на M тривиально.

Осталось доказать, что в случае, когда $p > 3$ и Y содержит элементы $e_2, e_3, \ldots, e_{p-2}$, прямые слагаемые M имеют вид $T^{(1)}$ и удовлетворяют соотношениям (7). Допустим, что M содержит прямое слагаемое $T^{(l)}$, $l \geqslant 2$. Воспользуемся следующим свойством Y-модулей M, на которых преобразование $(e_0)_M$ невырожденно и имеет все характеристические корни в простом поле: если $Y = \oplus_{i=0}^{p-1} Y_i$, $M = \oplus_{j=1}^{p-1} M_j$ — разложения, соответственно, Y и M в прямую сумму корневых и весовых подпространств относительно, соответственно, $\operatorname{ad} e_0$ и $(e_0)_M$, то

$$Y_i \cdot M_{p-i} = \{0\}, i = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{8}$$

В частности, отсюда следует, что $e_{p-l} \cdot t_l^{(l)} = 0$. Тогда, применяя к обоим частям этого равенства $p-l-1$ раз e_{-1}, получаем, что $(p-l+1)!\lambda t_{l+1}^{(l)} = 0$ и, значит, $\lambda = 0$. Аналогично, применяя $p-l-1$

раз e_1 к равенству $e_l \cdot t^{(l)}_{p-l} = 0$, получаем, что $\mu = 0$. Это противоречит условию $(\lambda, \mu) \neq (0, 0)$, и, следовательно, M может содержать только прямые слагаемые вида $T^{(1)}$.

Для доказательства соотношений (7) воспользуемся индукцией по $k + j$. В качестве базы индукции рассмотрим случай $k + j = p$. Из равенств (8) имеем, что $e_k \cdot t^{(1)}_{p-k} = 0$, при $k = 2, 3, \ldots, p-2$. Допустим, что соотношения (7) верны при $k + j = s + 1 \leqslant p$, и докажем их в случае $k + j = s$. Доказывать будем индукцией по k. Из предположения индукции имеем, что $e_2 \cdot t^{(1)}_{s-1} = (s+1)\lambda t^{(1)}_{s+1}$. Тогда, применяя e_{-1} к левой части этого равенства, получаем:

$$e_{-1} \cdot (e_2 \cdot t^{(1)}_{s-1}) = [e_{-1}, e_2] \cdot t^{(1)}_{s-1} + e_2 \cdot (e_{-1} \cdot t^{(1)}_{s-1}) = 3\lambda e_1 \cdot t^{(1)}_{s-1} + (s-2)e_2 \cdot t^{(1)}_{s-2} = \\ = 3\lambda s t^{(1)}_s + (s-2)e_2 \cdot t^{(1)}_{s-2}.$$

С другой стороны, применяя e_{-1} к правой части, получаем: $s(s+1)\lambda t^{(1)}_s$. Следовательно,

$$(s-2)e_2 \cdot t^{(1)}_{s-2} = s(s+1)\lambda t^{(1)}_s - 3\lambda s t^{(1)}_s = s(s-2)\lambda t^{(1)}_s,$$

откуда получаем, что $e_2 \cdot t^{(1)}_{s-2} = \lambda s t^{(1)}_s$. Таким образом, утверждение верно при $k = 2$. Теперь, предполагая утверждение справедливым при k $(2 \leqslant k \leqslant p-3)$, доказываем его при $k+1$. Для этого к обоим частям равенства $e_{k+1} \cdot t^{(1)}_{s-k} = (s+1)\lambda t^{(1)}_{s+1}$ применяем e_{-1}:

$$e_{-1} \cdot (e_{k+1} \cdot t^{(1)}_{s-k}) = [e_{-1}, e_{k+1}] \cdot t^{(1)}_{s-k} + e_{k+1} \cdot (e_{-1} \cdot t^{(1)}_{s-k}) = (k+2)e_k \cdot t^{(1)}_{s-k} + \\ + (s-k-1)e_{k+1} \cdot t^{(1)}_{s-k-1} = (k+2)s\lambda t^{(1)}_s + (s-k-1)e_{k+1} \cdot t^{(1)}_{s-k-1}$$

с одной стороны, и $e_{-1} \cdot ((s+1)\lambda t^{(1)}_{s+1}) = (s+1)s\lambda t^{(1)}_s$ — с другой. Отсюда получаем, что

$$(s-k-1)e_{k+1} \cdot t^{(1)}_{s-k-1} = (s+1)s\lambda t^{(1)}_s - (k+2)s\lambda t^{(1)}_s = (s-k-1)s\lambda t^{(1)}_s,$$

и, следовательно, $e_{k+1} \cdot t^{(1)}_{s-k-1} = \lambda s t^{(1)}_s$ — что и требовалось.

Аналогичным образом соотношения (7) доказываются при $k + j \geqslant p$. Для этого следует воспользоваться двойной индукцией: по $k + j$ в сторону увеличения, и — для каждого $k + j$ — по k от $p - 2$ в сторону уменьшения. □

Предложение 9. *(Лемма 6 [4]) Пусть $p = 3$ и M — конечномерный S-модуль, преобразование $(e_0)_M$ которого невырожденно и имеет все характеристические корни в простом поле. Тогда $M = \{0\}$.*

Доказательство теоремы 4. Из условия теоремы следует, что нулевая компонента $L_{\bar{0}}$ супералгебры Ли L удовлетворяет условиям теоремы 1, и поэтому по теореме 2 алгебра Ли $L_{\bar{0}}$ является либо алгеброй Ермолаева, либо, при $p = 3$, $L_{\bar{0}} = S$. В последнем случае по предложению 9 получаем, что $L_{\bar{1}} = 0$ и супералгебра L есть алгебра Ли S. Пусть теперь $L_{\bar{0}}$ является алгеброй Ермолаева. Из предложения 8 следует, что $L_{\bar{0}}$-модуль $L_{\bar{1}}$ представим в виде прямой суммы подмодулей, изоморфных $T^{(i)}, 1 \leqslant i \leqslant \frac{p-1}{2}$ или $T^{(1)}$, если $L_{\bar{0}}$ содержит элементы $e_2, e_3, \ldots, e_{p-2}$ при $p > 3$.

Рассмотрим следующий гомоморфизм $L_{\bar{0}}$-модулей:

$$\psi : L_{\bar{1}} \otimes L_{\bar{1}} \to L_{\bar{0}}, \quad \psi(u, v) = [u, v], u, v \in L_{\bar{1}}.$$

Поскольку $L_{\bar{0}}$-модуль $L_{\bar{1}}$ представим в виде прямой суммы подмодулей, изоморфных $T^{(i)}$, то, как видно из соотношений (6), элементы из U, V, Z действуют на $L_{\bar{1}}$ тривиально. Следовательно они действуют тривиально и на образе $\operatorname{im}\psi$ гомоморфизма ψ. В частности, отсюда следует, что отображение $\psi : L_{\bar{1}} \otimes L_{\bar{1}} \to \operatorname{im}\psi$ есть гомоморфизм $\overline{R}_0$-модулей. Кроме этого, из сказанного выше следует, что $\operatorname{im}\psi$ лежит в централизаторе $C_{L_{\bar{0}}}(U + V + Z)$. Отсюда получаем, что, если $U + V + Z \neq \{0\}$, то $e_0 \notin \operatorname{im}\psi$ и $(e_0)_{\operatorname{im}\psi}$ невырожденно. Но тогда, так как $L_{\bar{1}}$ является прямой суммой простых подмодулей четной размерности, то по следствию 7 получаем, что $\psi = 0$. Это означает, что $[L_{\bar 1}, L_{\bar 1}] = \{0\}$ и L является супералгеброй Ермолаева.

Будем теперь считать, что $U = V = Z = \{0\}$ и $L_{\bar 0}$ тогда либо изоморфна $sl(2)$, либо, при $p > 3$, простой p-мерной алгебре. В этом случае отображение ψ является гомоморфизмом X-модулей, где $X = Ke_{-1} \oplus Ke_0 \oplus Ke_1 \cong sl(2)$. Из предложения 6 следует, что X-модуль $L_{\bar 1} \otimes L_{\bar 1}$ порождается нулевой фиттинговой компонентой $(L_{\bar 1} \otimes L_{\bar 1})_0$ преобразования $(e_0)_{L_{\bar 1} \otimes L_{\bar 1}}$. Так как ψ отображает $(L_{\bar 1} \otimes L_{\bar 1})_0$ в нулевую фиттингову компоненту Ke_0 оператора $(e_0)_{L_{\bar 0}}$, то образ $\operatorname{im}\psi$ содержится в X-подмодуле $Ke_{-1} \oplus Ke_0 \oplus Ke_1$, порожденном Ke_0. Таким образом, $[L_{\bar 1}, L_{\bar 1}] \subseteq X$. Но $[L_{\bar 1}, L_{\bar 1}]$ является идеалом в $L_{\bar 0}$, следовательно, в случае, когда $L_{\bar 0}$ имеет размерность $p > 3$, получаем, что $[L_{\bar 1}, L_{\bar 1}] = \{0\}$ и L является супералгеброй Ермолаева. Будем поэтому считать, что $L_{\bar 0} = X \cong sl(2)$.

В работе [7] было доказано, что в супералгебре L с $L_{\bar 0} \cong sl(2)$ умножение во всех простых $L_{\bar 0}$-подмодулях в $L_{\bar 1}$ размерности отличной от двух является нулевым, а в двумерном подмодуле можно выбрать базис t_1, t_2 такой, что имеют место следующие соотношения:

$$\begin{array}{lll} [e_0, t_1] = \dfrac{p-1}{2} t_1, & [e_0, t_2] = \dfrac{p+1}{2} t_2, & [e_{-1}, t_1] = 0, \\ [e_{-1}, t_2] = t_1, & [e_1, t_1] = -t_2, & [e_1, t_2] = 0, \\ [t_1, t_1] = -2\xi e_{-1}, & [t_1, t_2] = -2\xi e_0, & [t_2, t_2] = -2\xi e_1 \end{array} \tag{9}$$

для некоторого $\xi \in K$. В частности, если размерность $L_{\bar 1}$ равна двум, то супералгебра L изоморфна $T(\xi)$. Докажем, что если размерность $L_{\bar 1}$ больше двух, то $[L_{\bar 1}, L_{\bar 1}] = 0$ и L является супералгеброй Ермолаева.

Пусть $L_{\bar 1}$ разлагается в прямую сумму нескольких простых двумерных $L_{\bar 0}$-подмодулей, и P и Q — два слагаемых из этого разложения. Тогда в них можно выбрать базисы t_1, t_2 и t'_1, t'_2, удовлетворяющие соотношениям вида (9) при ξ и ξ' соответственно. Из весовых соображений имеем, что

$$[t_1, t'_1] = \theta_{11} e_{-1}, [t_1, t'_2] = \theta_{12} e_0, [t_2, t'_1] = \theta_{21} e_0, [t_2, t'_2] = \theta_{22} e_1$$

для некоторых $\theta_{11}, \theta_{12}, \theta_{21}, \theta_{22} \in K$. Умножая обе части второго равенства, соответственно, на e_1 и t_2 справа, получаем, что $\theta_{22} e_1 = \theta_{12} e_1$ и $\xi t'_2 + \theta_{22} t_2 = \frac{p+1}{2} \theta_{12} t_2$. Отсюда следует, что $\xi = \theta_{22} = \theta_{12} = 0$. Аналогично доказывается, что $\xi' = \theta_{11} = \theta_{21} = 0$. Таким образом, $[P, P] = [Q, Q] = [P, Q] = \{0\}$ и из произвольности P и Q получаем, что $[L_{\bar 1}, L_{\bar 1}] = \{0\}$.

Осталось рассмотреть случай, когда $L_{\bar 1}$ содержит некоторый простой подмодуль P размерности $\geqslant 4$. По выше сделанному замечанию умножение в P является нулевым. Докажем, что $[P, Q] = \{0\}$ для всякого другого простого подмодуля Q в $L_{\bar 1}$. Так как $L_{\bar 0} = Ke_{-1} \oplus Ke_0 \oplus Ke_1$, то $[P_i, Q_j] = \{0\}$, если $i + j \neq p-1, p, p+1$, где P_i, Q_i $(i = 1, 2, \ldots, p-1)$ — весовые подпространства соответственно в P и Q относительно e_0. Равенство $[P, Q] = \{0\}$ эквивалентно равенству $\psi(P \otimes Q) = \{0\}$. Для обоснования справедливости последнего, как видно из доказательства следствия 7, достаточно показать, что составляющие $P_k \otimes Q_{p-k}$, $k = 1, 2, \ldots, p-1$, нулевой фиттинговой компоненты преобразования $(e_0)_{P \otimes Q}$ отображаются в нулевое подпространство: $\psi(P_k \otimes Q_{p-k}) = [P_k, Q_{p-k}] = \{0\}$. Допустим, что $[u, v] = \theta e_0$ для произвольно выбранных элементов $u \in P_k, v \in Q_{p-k}$. Пусть x ненулевой элемент, лежащий в P_i для некоторого $i \neq k-1, k, k+1$ — существование такого элемента следует из условия $\dim P \geqslant 4$. Тогда $[x, u] \in [P, P] = \{0\}$ и $[x, v] \in [P_i, Q_{p-k}] = \{0\}$ и, умножая равенство $[u, v] = \theta e_0$ на x, получаем, что $\theta [e_0, x] = 0$. Отсюда следует, что $\theta = 0$, так как $(e_0)_{L_{\bar 1}}$ невырожденно, и $[u, v] = 0$ для любых $u \in P_k, v \in Q_{p-k}$. Таким образом, доказано, что $[P_k, Q_{p-k}] = \{0\}$ для всех $k = 1, 2, \ldots, p-1$ и $[P, Q] = \{0\}$. Аналогичным образом доказывается, что $[Q, Q'] = \{0\}$ для любых, быть может совпадающих, прямых простых слагаемых Q и Q' в разложении модуля $L_{\bar 1}$: если $[u, v] = \theta e_0$ для некоторых $u \in Q_k, v \in Q'_{p-k}$, то умножая это равенство на ненулевой элемент $x \in P$, получаем, что $\theta [e_0, x] = 0$, так как $[P, Q] = [P, Q'] = \{0\}$, и, следовательно, $\theta = 0$. Из равенств $[Q_k, Q'_{p-k}] = \{0\}$ следует равенство $[Q, Q'] = \{0\}$. В свою очередь, так как $[Q, Q'] = \{0\}$ для любых прямых простых слагаемых Q и Q' в разложении модуля $L_{\bar 1}$, то отсюда получаем требуемое равенство: $[L_{\bar 1}, L_{\bar 1}] = \{0\}$.

□

Список литературы

1. *Бунегина В. А., Наумова Т. Н., Онищик А. Л.* Подалгебры Картана в супералгебрах Ли // Вопр. теории групп и гомологич. алгебры. Ярославль, 1988. – С. 99–104.

2. *Тен О. К., Шеляг С. М.* О подалгебрах Картана супералгебр Ли // Труды ФОРА. – 2005. – № 10. – С. 1–6.

3. *Kaplansky I.* Lie algebras of characteristic p // Trans. Amer. Math. Soc. – 1958. – V. 89. – P. 149–183.

4. *Ермолаев Ю. Б.* Об алгебрах Ли ранга 1 с корневой системой в простом поле // Изв. ВУЗов. Математика. – 1972. – № 5 (120). – С. 38–50.

5. *Benkart G. M., Osborn J. M.* Representations of rank one Lie algebras of characteristic p // Lect. Notes in Math. – 1982. – V. 933. – P. 1–37.

6. *Benkart G. M., Osborn J. M.* Rank one Lie algebras // Ann. of Math. – 1984. – V. 119. – P. 437–463.

7. *Лиховидова Т. А., Тен О. К.* Супералгебры Ли с нулевой компонентой $L_{\bar{0}} \cong sl(2)$ // Дискр. структуры и модели. Сб. научных трудов. КалмГУ. Элиста. – 1991. – С. 62–70.

8. *Kac V. G.* Lie superalgebras // Adv. in Math. – 1977. – V. 26. – P. 9–96.

A. V. Zaitseva, O. K. Ten

Rank one Lie superalgebras with root system in the prime field

Rank one Lie superalgebras $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ that having a Cartan subalgebra spanned by an even element $e_0 \in [L_{\bar{0}}, L_{\bar{0}}]$ with the roots in the prime field are classified over characteristic $p \geqslant 3$ field.

