2007 г. **№12**

Труды ФОРА

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ СУПЕРАЛГЕБРЫ ЛИ $GL(1|1)$ НАД ПОЛЕМ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ

О. К. Тен, А. А. Шишкова

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

В работе изучаются конечномерные представления супералгебры Ли $gl(1|1)$ над алгебраически замкнутым полем характеристики $p \neq 2$. Доказано, что каждое ее невырожденное представление является индуцированным. Построено взаимно-однозначное соответствие между невырожденными неразложимыми представлениями супералгебры Ли $gl(1|1)$ и неразложимыми представлениями алгебры Ли $gl(1|1)_{\bar{0}}$.

Настоящая работа посвящена изучению конечномерных представлений супералгебры Ли $gl(1|1)$ над алгебраически замкнутым полем K характеристики $p \neq 2$. Описание представлений супералгебры $gl(1|1)$ — неприводимых и неразложимых — для случая алгебраически замкнутого поля нулевой характеристики было получено в работах [1, 2] Каца В., [4] Лейтеса Д., [5] Су Ю. (см. также [6, 3]). Это дает полное описание конечномерных представлений супералгебры Ли $gl(1|1)$, поскольку по теореме Круля—Ремака—Шмидта всякое конечномерное представление однозначно разлагается в прямую сумму неразложимых представлений.

В нашей работе мы даем описание неразложимых представлений $gl(1|1)$, в которых центр супералгебры действует невырожденно (такие представления мы назвали невырожденными). В частности, показано, что существует взаимно однозначное соответствие между последними представлениями и неразложимыми представлениями абелевой алгебры $gl(1|1)_{\bar{0}}$ (теорема 2). В теореме 1 мы привели полное описание неприводимых представлений. Наконец, в предложении 6 нами доказано, что всякое невырожденное ограниченное представление супералгебры Ли $gl(1|1)$ является вполне приводимым.

1. Супералгебра Ли $L = gl(1|1)$ определяется как супералгебра Ли, ассоциированная с ассоциативной супералгеброй матриц порядка 2, с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой вида

$$L_{\bar{0}} = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \middle| a, b \in K \right\}, \quad L_{\bar{1}} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & c \\ d & 0 \end{pmatrix} \middle| c, d \in K \right\}.$$

В супералгебре Ли $gl(1|1)$ можно выбрать однородный базис e, n, ψ_+, ψ_- такой, что

$$L_{\bar{0}} = Ke \oplus Kn, L_{\bar{1}} = K\psi_+ \oplus K\psi_-,$$

причем $[e, n] = [e, \psi_\pm] = 0, [n, \psi_\pm] = \pm\psi_\pm, [\psi_+, \psi_-] = e, [\psi_+, \psi_+] = [\psi_-, \psi_-] = 0$. Всюду в дальнейшем, если не оговорено противное, через $L = L_{\bar{0}} \oplus L_{\bar{1}}$ обозначена супералгебра Ли $gl(1|1)$. Через $U(L)$ обозначена ее универсальная обертывающая. По теореме Пуанкаре—Биркгофа—Витта базис универсальной обертывающей алгебры $U(L)$ имеет вид:

$$e^k n^l, e^k n^l \psi_+, e^k n^l \psi_-, e^k n^l \psi_+ \psi_-, k, l \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Структура супералгебры в $U(L)$ определяется равенствами $\deg e = \deg n = \bar{0}, \deg \psi_\pm = \bar{1}$.

На супералгебре Ли $gl(1|1)$ можно задать $\mathbb{Z}$-градуировку $L = L_{-1} \oplus L_0 \oplus L_1$, согласованную с $\mathbb{Z}_2$-градуировкой, следующим образом:

$$L_{-1} = K\psi_-, L_0 = Ke \oplus Kn, L_1 = K\psi_+.$$

Введем в рассмотрение индуцированные модули, аналогичные индуцированным модулям со старшим весом В. Каца [3]. Пусть P — $L_{\bar{0}}$-модуль. Тогда P можно рассматривать как $L_{-1}\oplus L_0$-модуль, считая, что $L_{-1}\cdot P=0$. Положим тогда, что $V(P)=U(L)\otimes_{U(L_{-1}\oplus L_0)} P$ — L -модуль, индуцированный $L_{-1}\oplus L_0$-модулем P. $\mathbb{Z}_2$-градуировка на $V(P)$, с точностью до изменения четности элементов на противоположную, имеет вид: $V(P)_{\bar{0}}=1\otimes P$, $V(P)_{\bar{1}}=K\psi_+\otimes P$.

Следующая теорема дает полное описание неприводимых представлений супералгебры Ли $gl(1|1)$.

Теорема 1. *Пусть V — простой L-модуль, тогда с точностью до изменения четности элементов на противоположную модуль V изоморфен либо двумерному модулю $V(\lambda,\mu)=V(\lambda,\mu)_{\bar{0}}\oplus V(\lambda,\mu)_{\bar{1}}$ при некоторых $\lambda,\mu\in K,\lambda\neq 0$, где $V(\lambda,\mu)_{\bar{0}}=Ku_0, V(\lambda,\mu)_{\bar{1}}=Ku_1$ и действие L на $V(\lambda,\mu)$ определено соотношениями*

$$e\cdot u_i=\lambda u_i, i=1,2,\quad n\cdot u_0=\mu u_0, n\cdot u_1=(\mu+1)u_1,$$
$$\psi_+\cdot u_0=u_1,\psi_+\cdot u_1=0,\psi_-\cdot u_0=0,\psi_-\cdot u_1=\lambda u_0,$$

либо одномерному модулю $V(\lambda)=V(\lambda)_{\bar{0}}\oplus V(\lambda)_{\bar{1}}$ при некотором $\lambda\in K$, где $V(\lambda)_{\bar{0}}=Ku, V(\lambda)_{\bar{1}}=0$ и действие L на $V(\lambda)$ определено соотношениями $e\cdot u=0, n\cdot u=\lambda u, \psi_\pm\cdot u=0$.

Доказательство. Пусть V — простой L-модуль. Так как e и n перестановочны, то преобразования e_V и n_V имеют общий однородный собственный вектор x: $e\cdot x=\lambda x, n\cdot x=\mu x, \lambda,\mu\in K$. Кроме того, имеем, что

$$e\cdot(\psi_-\cdot x)=\psi_-\cdot(e\cdot x)=\lambda\psi_-\cdot x,$$
$$n\cdot(\psi_-\cdot x)=-\psi_-\cdot x+\psi_-\cdot(n\cdot x)=(\mu-1)\psi_-\cdot x,$$

следовательно, $\psi_-\cdot x$, если отличен от 0, также является общим однородным собственным вектором. Так как $\psi_-^2=0$ в $U(L)$, то собственный вектор x можем выбрать так, что $\psi_-\cdot x=0$.

Тогда имеют место следующие соотношения:

$$e\cdot(\psi_+\cdot x)=\psi_+\cdot(e\cdot x)=\lambda\psi_+\cdot x, \tag{1}$$
$$n\cdot(\psi_+\cdot x)=\psi_+\cdot x+\psi_+\cdot(n\cdot x)=(\mu+1)\psi_+\cdot x, \tag{2}$$
$$\psi_-\cdot(\psi_+\cdot x)=(e-\psi_+\psi_-)\cdot x=\lambda x, \tag{3}$$
$$\psi_+\cdot(\psi_+\cdot x)=0, \tag{4}$$

из которых видим, что подпространство $Kx+K(\psi_+\cdot x)$ инвариантно относительно L, и, поэтому, совпадает с V.

В случае, когда $\lambda\neq 0$ из равенств (3) и (2) получаем, что $\psi_+\cdot x\neq 0$ и линейно независим от x. Тогда пространство V двумерно и, полагая $u_0=x, u_1=\psi_+\cdot x$, получаем изоморфизм L-модулей $V\cong V(\lambda,\mu)$. Неприводимость модуля $V(\lambda,\mu)$ следует из того, что подпространства Kx и $K(\psi_+\cdot x)$ не являются инвариантными.

Если теперь $\lambda=0$, то, как видно из соотношений (1–4), подпространство $K(\psi_+\cdot x)$ инвариантно относительно L, откуда получаем, что $\psi_+\cdot x=0$. Тогда пространство V одномерно и, полагая $u=x$, получаем, с точностью до изменения четности элементов пространства V на противоположную, изоморфизм L-модулей $V\cong V(\mu)$. □

Как видно из доказанной теоремы, неприводимые представления супералгебры $gl(1|1)$ являются представлениями со старшим весом и однозначно определяются характером $\chi: L_{\bar{0}}\to K$: если $\chi(e)=0$, то неприводимый модуль является одномерным, если $\chi(e)\neq 0$, то неприводимый модуль имеет размерность два и является индуцированным с одномерного $L_{\bar{0}}$-модуля, определяемого представлением $\chi: L_{\bar{0}}\to K$.

2. L-модуль V назовем невырожденным, если центр супералгебры действует на V невырожденно. Следующая теорема дает полное описание невырожденных неразложимых представлений супералгебры Ли $gl(1|1)$.

Теорема 2. *Пусть $V = V_{\bar{0}} \oplus V_{\bar{1}}$ — неразложимый невырожденный L-модуль. Тогда, с точностью до изменения четности элементов на противоположную, $L_{\bar{0}}$-подмодуль $V_{\bar{0}}$ является неразложимым, и L-модуль V изоморфен индуцированному модулю $V(V_{\bar{0}})$. Обратно, если P — неразложимый $L_{\bar{0}}$-модуль такой, что e_P невырожден, то индуцированный L-модуль $V(P)$ является невырожденным неразложимым модулем. В частности, отсюда следует, что существует взаимно-однозначное соответствие между неразложимыми невырожденными представлениями супералгебры L и теми неразложимыми представлениями алгебры Ли $L_{\bar{0}}$, в которых элементу e ставится в соответствие невырожденный оператор.*

Доказательству этой теоремы предпошлем несколько утверждений.

Предложение 3. *Пусть V — неразложимый модуль над ассоциативной супералгеброй A. Тогда для любого центрального четного элемента $a \in A$ линейный оператор a_V имеет единственное собственное значение.*

Доказательство. Пространство V разлагается в прямую сумму $V = \oplus_\lambda V_\lambda$ корневых подпространств относительно a_V. Поэтому достаточно доказать, что каждое подпространство

$$V_\lambda = \{v \in V \mid (a_V - \lambda I)^m(v) = 0 \text{ для некоторого } m \in \mathbb{N}\},$$

где I — единичный оператор на V, является A-подмодулем: тогда из неразложимости модуля V получим, что $V = V_\lambda$ для некоторого λ. Так как a — четный элемент, то V_λ является $\mathbb{Z}_2$-градуированным подпространством. Кроме того, $V_\lambda = \ker(a_V - \lambda I)^k$ для некоторого натурального k, и из перестановочности элемента a со всеми элементами из A, получаем, что подпространство V_λ инвариантно относительно A. □

Имеет место следующее описание центра универсальной обертывающей алгебры $U(L)$, которое было получено в работе [7].

Теорема 4. *Центр универсальной обертывающей алгебры супералгебры Ли $gl(1|1)$ порождается элементами*

$$e, en^{(r)} - n^{(r-1)}\psi_+\psi_-, r \in \mathbb{N},$$

если $\mathrm{char} K = 0$ *и элементами*

$$e, n^p - n, en^{(r)} - n^{(r-1)}\psi_+\psi_-, r = 1, \ldots, p-1,$$

если $\mathrm{char} K = p > 2$, *где* $n^{(r)} = \dfrac{n(n+1)\ldots(n+r-1)}{r!}$.

Из приведенного описания следует, что четные элементы $e, en - \psi_+\psi_- \in U(L)$ являются центральными. Этим мы будем пользоваться в дальнейшем.

Предложение 5. *Пусть V — неразложимый $gl(1|1)$-модуль, $V = \oplus_\lambda V_\lambda$ — разложение в сумму корневых подпространств относительно n_V. Тогда*

1) подпространство V_λ инвариантно относительно $e, en - \psi_+\psi_-$,

2) $\psi_+ \cdot V_\lambda \subseteq V_{\lambda+1}$, $\psi_- \cdot V_\lambda \subseteq V_{\lambda-1}$.

Доказательство. Первое утверждение следует из перестановочности элемента n с центральными элементами e и $en - \psi_+\psi_-$.

Далее имеем, что $V_\lambda = \ker(n_V - \lambda I)^k$ для некоторого натурального k. Тогда из соотношения $(n - (\lambda+1)1)^k\psi_+ = \psi_+(n - \lambda 1)^k$ в $U(L)$ получаем, что

$$(n_V - (\lambda+1)I)^k(\psi_+ \cdot v) = \psi_+ \cdot (n_V - \lambda I)^k(v) = 0$$

для всякого вектора $v \in V_\lambda$. Следовательно $\psi_+ \cdot V_\lambda \subseteq V_{\lambda+1}$.

Аналогично показывается, что $\psi_- \cdot V_\lambda \subseteq V_{\lambda-1}$. □

Перейдем к доказательству теоремы 2.

Доказательство теоремы 2. Пусть V — неразложимый L-модуль. Тогда по предложению 3, так как элементы $e, en-\psi_+\psi_- \in U(L)$ являются центральными, то каждое из преобразований $e_V, (en-\psi_+\psi_-)_V$ имеет единственное собственное значение. Обозначим их соответственно k и m. Из условия следует, что $k\neq 0$. Пусть $V=\oplus_\lambda V_\lambda$ — разложение в прямую сумму корневых подпространств относительно n_V. Докажем, что если $\lambda\neq \frac{m}{k}$ и $\frac{m}{k}+1$, то $V_\lambda=0$. Действительно, по предложению 5 пространства V_λ инвариантны относительно e_V и $(en-\psi_+\psi_-)_V$. Элемент n перестановочен с $e, en-\psi_+\psi_-$, поэтому преобразования $n_V, e_V, (en-\psi_+\psi_-)_V$ имеют в V_λ общий собственный вектор x: $e\cdot x=kx, (en-\psi_+\psi_-)\cdot x=mx, n\cdot x=\lambda x$. Тогда

$$(\psi_+\psi_-)\cdot x=(en-\psi_+\psi_-)\cdot x=(k\lambda-m)x, \tag{5}$$

$$(\psi_-\psi_+)\cdot x=(e-\psi_+\psi_-)\cdot x=(k-k\lambda+m)x. \tag{6}$$

откуда получаем, что $(\psi_+\psi_-)(\psi_-\psi_+)\cdot x=(k\lambda-m)(k-k\lambda+m)x$. С другой стороны, так как $\psi_-^2=0$, то $(\psi_+\psi_-)(\psi_-\psi_+)\cdot x=0$. Тогда при $\lambda\neq\frac{m}{k}$ и $\frac{m}{k}+1$ получаем, что $x=0$ — противоречие с определением собственного вектора. Следовательно, если $\lambda\neq\frac{m}{k}$ и $\frac{m}{k}+1$, то $V_\lambda=0$ и, таким образом, $V=V_{\frac{m}{k}}\oplus V_{\frac{m}{k}+1}$.

Из предложения 5 следует, что подпространства V_λ инвариантны относительно $(\psi_+\psi_-)_V$ и $(\psi_-\psi_+)_V$. Пусть μ — собственное значение оператора $(\psi_+\psi_-)_{V_{\frac{m}{k}+1}}$, тогда, так как $\psi_+\psi_-$ перестановочен с каждым из элементов $e, en-\psi_+\psi_-, n$, то $\ker((\psi_+\psi_-)_{V_{\frac{m}{k}+1}}-\mu I)$ инвариантно относительно $e_V, (en-\psi_+\psi_-)_V, n_V$, поэтому существует собственный вектор $x\in\ker((\psi_+\psi_-)_{V_{\frac{m}{k}+1}}-\mu I)$ такой, что $e\cdot x=kx, (en-\psi_+\psi_-)\cdot x=mx, n\cdot x=\lambda x$. Тогда из соотношения (5) следует, что $\mu=k(\frac{m}{k}+1)-m=k\neq 0$. Следовательно, отображение $\psi_+\psi_-: V_{\frac{m}{k}+1}\to V_{\frac{m}{k}+1}$ биективно. Аналогично показывается, что отображение $\psi_-\psi_+: V_{\frac{m}{k}}\to V_{\frac{m}{k}}$ биективно. Отсюда следует, что отображения $\psi_+: V_{\frac{m}{k}}\to V_{\frac{m}{k}+1}$ и $\psi_-: V_{\frac{m}{k}+1}\to V_{\frac{m}{k}}$ также биективны. В частности, $\psi_+\cdot V_{\frac{m}{k}}=V_{\frac{m}{k}+1}$, $\psi_-\cdot V_{\frac{m}{k}+1}=V_{\frac{m}{k}}$ и $\psi_+V_{\frac{m}{k}+1}=\psi_-V_{\frac{m}{k}}=0$, так как $\psi_+^2=\psi_-^2=0$.

Поскольку элемент n является четным, то корневое пространство $V_{\frac{m}{k}}$ является $\mathbb{Z}_2$-градуированным: $V_{\frac{m}{k}}=S\oplus T$, где $S=V_{\frac{m}{k}}\cap V_{\bar 0}$, $T=V_{\frac{m}{k}}\cap V_{\bar 1}$. Тогда $\psi_+\cdot V_{\frac{m}{k}}=\psi_+\cdot S\oplus\psi_+\cdot T$, так как отображение $\psi_+: V_{\frac{m}{k}}\to V_{\frac{m}{k}+1}$ биективно, и, следовательно,

$$V=V_{\frac{m}{k}}\oplus\psi_+\cdot V_{\frac{m}{k}}=(S\oplus\psi_+\cdot S)\oplus(T\oplus\psi_+\cdot T).$$

Далее, из условия, что S является $L_{\bar 0}$-подмодулем, получаем, что элементы

$$\begin{aligned} &e\cdot(u_1+\psi_+\cdot u_2)=e\cdot u_1+\psi_+\cdot(e\cdot u_2),\\ &n\cdot(u_1+\psi_+\cdot u_2)=n\cdot u_1+\psi_+\cdot(n\cdot u_2)-\psi_+\cdot(u_2),\\ &\psi_+\cdot(u_1+\psi_+\cdot u_2)=\psi_+\cdot u_1,\\ &\psi_-\cdot(u_1+\psi_+\cdot u_2)=(\psi_-\psi_+)\cdot u_2=e\cdot u_2-(\psi_+\psi_-)\cdot u_2=e\cdot u_2 \end{aligned} \tag{7}$$

лежат в $S\oplus\psi_+\cdot S$ для любых $u_1,u_2\in S$. Поэтому $S\oplus\psi_+\cdot S$ является L-подмодулем. Аналогично показывается, что $T\oplus\psi_+\cdot T$ также является L-подмодулем. Но по условию модуль V неразложим, следовательно, либо $S=0$, либо $T=0$. С точностью до изменения четности элементов на противоположную можно считать, что $T=0$. Отсюда получаем, что $S=V_{\frac{m}{k}}=V_{\bar 0}$, $\psi_+\cdot V_{\frac{m}{k}}=V_{\bar 1}$ и, как нетрудно видеть из равенств (7), L-модуль V изоморфен индуцированному модулю $V(V_{\bar 0})$.

Аналогичным образом доказывается, что $L_{\bar 0}$-модуль $V_{\frac{m}{k}}$ неразложим: если $V_{\frac{m}{k}}=S\oplus T$ — прямая сумма $L_{\bar 0}$-подмодулей, то $V=(S\oplus\psi_+\cdot S)\oplus(T\oplus\psi_+\cdot T)$ — прямая сумма L-подмодулей. Это завершает доказательство первой части теоремы.

Пусть P — неразложимый $L_{\bar 0}$-модуль такой, что оператор e_P невырожденный, и $V=V(P)$ — индуцированный L-модуль. Тогда нетрудно видеть, что e действует на $V_{\bar 0}=1\otimes P$ и $V_{\bar 1}=K\psi_+\otimes P$ невырожденно. Так как $L_{\bar 0}$-модуль P неразложимый, то один из подмодулей $S=S_{\bar 0}\oplus S_{\bar 1}$ в разложении L-модуля V прямую сумму должен удовлетворять условию $S_{\bar 0}=0$. Заметим, что $S_{\bar 1}=K\psi_+\otimes S'$ для некоторого подпространства $S'\subseteq P$. Тогда $\psi_-\cdot S_{\bar 1}\subseteq S_{\bar 0}=0$, но с другой стороны $\psi_-\cdot S_{\bar 1}=K\psi_-\psi_+\otimes S'=1\otimes e\cdot S'$, откуда получаем, что $e\cdot S'=0$ и $S'=0$. Следовательно, $S=0$ и значит L-модуль $V(P)$ не разлагается в прямую сумму подмодулей. □

3. В случае поля положительной характеристики на суперaлгебре L можно задать структуру ограниченной суперaлгебры Ли, поскольку элементы $n^p - n, e \in U(L)$ центральные и

$$(\operatorname{ad} n)^p = \operatorname{ad} n, \operatorname{ad} e = 0. \tag{8}$$

Эта структура, вообще говоря, определена не однозначно, так как четная часть центра суперaлгебры Ли L нетривиальна: $C(L)_{\bar{0}} = Ke$. Отсюда и из соотношений (8) следует, что структура ограниченной суперaлгебры на L определяется равенствами

$$n^{[p]} = n + \alpha e, e^{[p]} = \beta e$$

для некоторых $\alpha, \beta \in K$.

Напомним, что L-модуль V называется ограниченным, если $a_V^p = (a^{[p]})_V$ для любого элемента $a \in L_{\bar{0}}$. Из результатов, полученных выше, вытекает следующее утверждение относительно ограниченных представлений.

Предложение 6. *Суперaлгебра L допускает невырожденное ограниченное представление тогда и только тогда, когда $\beta \neq 0$. При этом всякое невырожденное ограниченное представление суперaлгебры L является вполне приводимым.*

Доказательство. Пусть V — ограниченный L-модуль. Тогда имеем, что $e_V^p = \beta e_V$, откуда видим что условие обратимости оператора e_V возможно ровно тогда, когда $\beta \neq 0$. В последнем случае получаем, что оператор e_V является полупростым. Тогда из условия $n_V^p = n_V + \alpha e_V$ следует, что перестановочный с ним оператор n_V тоже является полупростым. Если модуль V неразложим, то теореме 2 V изоморфен индуцированному модулю $V(V_{\bar{0}})$, причем $V_{\bar{0}}$ является неразложимым $L_{\bar{0}}$-модулем. Из полупростоты операторов e_V и n_V следует, что неразложимый $L_{\bar{0}}$-модуль $V_{\bar{0}}$ одномерен и модуль V, изоморфный индуцированному модулю $V(V_{\bar{0}})$, неприводим (см. замечание после теоремы 1). □

Список литературы

1. *Kac V. G.* Lie superalgebras // Adv. in Math. – 1977. – V. 26. – P. 9–96.
2. *Kac V. G.* Characters of typical representations of classical Lie superalgebras // Comm. in Algebra. – 1977. – V. 5. – P. 889–897.
3. *Kac V. G.* Representations of classical Lie superalgebras // Lect. Notes in Math. – 1978. – V. 676. – P. 597–626.
4. *Лейтес Д. А.* Представления суперaлгебр Ли // Теор. и мат. физ. – 1982. – Т. 52. – С. 225–228.
5. *Su Y.* Classification of finite dimentional modules of singly atypical type over the Lie superalgebra $sl(m|n)$ // J. Math. Phys. – 2000. – V. 41. – P. 602–603.
6. *Götz G., Quella T., Schomerus V.* Representation theory of $sl(2|1)$ // J. Algebra. – 2007. – V. 312. – P. 829–848.
7. *Небрат А. А., Тен О. К.* Центр универсальной обертывающей алгебры суперaлгебры Ли $gl(1|1)$ // Математические методы и информационно-технические средства. Труды III Всероссийской научно-практической конференции. Краснодар. – 2007. – С. 84–87.

The representations of Lie superalgebra $gl(1|1)$.

O. K. Ten, Shishkova A. A.

A finite dimensional representations of Lie superalgebra $gl(1|1)$ over an algebraically closed field of characteristic $p \neq 2$ are investigated. It is proved that all its nondegenerate indecomposable representations are induced. One-to-one correspondence between nondegenerate representations of Lie superalgebra $gl(1|1)$ and indecomposable representations of Lie algebra $gl(1|1)_{\bar{0}}$ is indicated.

