2007 г. №12

Т р у д ы Ф О Р А

ОБ ОДНОВРЕМЕННОЙ ТРИАНГУЛИЗАЦИИ МАТРИЦ НАД ПРОИЗВОЛЬНЫМ ПОЛЕМ

Н. В. Лесниченко, О. К. Тен

Кубанский государственный университет, г. Краснодар

В работе сформулированы и доказаны необходимые и достаточные условия одновременной приводимости нескольких матриц к верхнетреугольному виду над произвольным полем нулевой характеристики. Предложен алгоритм нахождения подобия, приводящего матрицы к верхнетреугольному виду, использующий технику базисов Гребнера.

Работа посвящена вопросу одновременного приведения двух или нескольких матриц к верхнетреугольному виду над произвольным полем K характеристики нуль. Матрицы $A_1, A_2, \ldots, A_m \in M_n(K)$, которые можно привести к верхнетреугольному виду одним подобием, с помощью подходящей невырожденной матрицы $C \in M_n(K)$, называются одновременно триангулизуемыми (над полем K). Здесь и далее $M_n(K)$ — множество квадратных матриц порядка n. В случае алгебраически замкнутого поля критерий одновременной триангулизуемости двух матриц был получен Маккоем в работе [1].

Теорема 1. *Матрицы A и B одновременно триангулизуемы тогда и только тогда, когда для всякого многочлена $p(x,y)$ от некоммутирующих переменных x и y матрица $p(A,B)(AB-BA)$ нильпотентна.*

Однако, оригинальное и поздние доказательства теоремы Маккоя были сложны, а сам критерий не предлагал конечной процедуры проверки выполнения условий теоремы (см. [2, 3]). В работе [4] Альпину Ю.А. и Корешкову Н.А. удалось связать вопрос об одновременной триангулизуемости матриц с теорией линейных алгебр и на основе классических теорем теории алгебр Ли и ассоциативных алгебр получить новое доказательство критерия Маккоя. По сути они доказали, что критерий Маккоя одновременной триангулизуемости матриц A и B эквивалентен условию разрешимости алгебры Ли $L(A,B)$, порожденной матрицами A и B.

Теорема 2. *Матрицы A и B одновременно триангулизуемы тогда и только тогда, когда алгебра Ли $L(A,B)$, порожденная матрицами A и B, является разрешимой.*

В рамках своего подхода им удалось дать естественное объяснение для других известных условий триангулизуемости матриц. Кроме этого, в [4] были найдены новые критерии, приводящие к эффективным алгоритмам проверки одновременной триангулизуемости матриц над алгебраически замкнутым полем нулевой характеристики.

Задача одновременной триангулизации матриц над произвольным полем представляет важный интерес, например, с точки зрения реализации в рамках той или иной системы безошибочных вычислений. Непосредственная реализация алгоритмов, приспособленных для алгебраически замкнутого поля на компьютерах, использующих арифметику с плавающей точкой, делает задачу одновременной триангулизации матриц в общем случае неустойчивой. Известно, что уже задача нахождения собственных значений и собственных векторов над полем комплексных чисел, неразрешима в радикалах (см. [2]).

В первой части работы мы формулируем и доказываем критерии одновременной триангулизуемости матриц над произвольным полем нулевой характеристики, вторая часть посвящена алгоритму одновременной триангулизации матриц над произвольным эффективно реализуемым в рамках системы компьютерной алгебры полем.

1. Критерий одновременной триангулизуемости матриц над произвольным полем. Понятно, что если несколько матриц одновременно триангулизуемы над полем K, то они одновременно триангулизуемы и над алгебраическим замыканием $\overline{K}$ поля K, а их характеристические корни лежат в K. Оказывается, что эти необходимые условия являются и достаточными.

Теорема 3. *Матрицы $A, B \in M_n(K)$ одновременно триангулизуемы над полем K тогда и только тогда, когда они одновременно триангулизуемы над алгебраическим замыканием $\overline{K}$ поля K и их характеристические корни лежат в K.*

Матрицы из $M_n(K)$ удобно мыслить как линейные операторы на некотором линейном пространстве V размерности n. Линейные операторы будем называть одновременно триангулизуемыми, если существует базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ в V, относительно которого матрицы данных линейных операторов являются верхнетреугольными. Это в точности эквивалентно тому, что найдется полный флаг $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n = V$, $\dim V_{i+1}/V_i = 1, i = 0, 1, \ldots, n-1$ линейных подпространств, инвариантных относительно данных линейных операторов.

Пусть $U \subseteq V$ линейное подпространство, $\mathrm{End}(V)$ — алгебра линейных операторов на V, $\mathrm{End}(V; U) \subseteq \mathrm{End}(V)$ — подалгебра линейных операторов, оставляющих подпространство U инвариантным. Пусть

$$i : \mathrm{End}(V; U) \to \mathrm{End}(U), \pi : \mathrm{End}(V; U) \to \mathrm{End}(V/U) -$$

— гомоморфизмы алгебр, определенные следующим образом:

$$i(A) = A|U, \pi(A)(v + U) = A(v) + U,$$

где $A \in \mathrm{End}(V; U)$, $v \in V$, $A|U$ — ограничение линейного оператора A на U.

Предложение 4. *Если линейные операторы $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathrm{End}(V; U)$ одновременно триангулизуемы, то линейные операторы $i(A_1), i(A_2), \ldots, i(A_m) \in \mathrm{End}(U)$ (соответственно, линейные операторы $\pi(A_1), \pi(A_2), \ldots, \pi(A_m) \in \mathrm{End}(V/U)$) одновременно триангулизуемы.*

Доказательство. Пусть $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n = V$ — полный флаг подпространств, инвариантных относительно линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Тогда

$$\{0\} = V_0 \cap U \subseteq V_1 \cap U \subseteq \ldots \subseteq V_n \cap U = U -$$

— флаг подпространств, инвариантных относительно линейных операторов $i(A_1), i(A_2), \ldots, i(A_m)$, причем

$$\dim(V_{i+1} \cap U)/(V_i \cap U) \leqslant 1, i = 0, 1, \ldots, n-1.$$

Согласно сделанному выше замечанию, это означает, что линейные операторы $i(A_1), i(A_2), \ldots, i(A_m)$ одновременно триангулизуемы.

Далее имеем, что

$$\{0\} = (V_0 + U)/U \subseteq (V_1 + U)/U \subseteq \ldots \subseteq (V_n + U)/U = V/U -$$

— флаг подпространств, инвариантных относительно линейных операторов $\pi(A_1), \pi(A_2), \ldots, \pi(A_m)$, причем

$$\dim\left((V_{i+1} + U)/U\right)\left((V_i + U)/U\right) = \dim(V_{i+1} + U)/(V_i + U) \leqslant 1.$$

Отсюда следует, что линейные операторы $\pi(A_1), \pi(A_2), \ldots, \pi(A_m)$ одновременно триангулизуемы. □

Предложение 5. *Линейные операторы $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathrm{End}(V)$ одновременно триангулизуемы тогда и только тогда, когда для всякого подпространства $U \subseteq V$, инвариантного относительно операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, линейные операторы $\pi(A_1), \pi(A_2), \ldots, \pi(A_m) \in \mathrm{End}(V/U)$ имеют общий собственный вектор в V/U.*

Доказательство. Необходимость следует из одновременной триангулируемости линейных операторов $\pi(A_1), \pi(A_2), \ldots, \pi(A_m) \in \mathrm{End}(V/U)$. Обратное утверждение докажем индукцией по размерности линейного пространства V. Пусть $U = \langle v \rangle$, где v — общий собственный вектор линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Тогда линейные операторы $\pi(A_1), \pi(A_2), \ldots, \pi(A_m)$ удовлетворяют условию предложения, а потому, по предположению индукции, одновременно триангулизуемы. Пусть $V_1 = U$ и

$$\{0\} = V_1/V_1 \subseteq V_2/V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n/V_1 = V/U \, —$$

— полный флаг линейных подпространств, инвариантных относительно $\pi(A_1), \pi(A_2), \ldots, \pi(A_m)$. Тогда $\{0\} = V_0 \subseteq V_1 \subseteq \ldots \subseteq V_n = V$ — полный флаг подпространств, инвариантных относительно $A_1, A_2, \ldots, A_m$, что и означает одновременную триангулизуемость линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$. □

Доказательство теоремы 3. Необходимость очевидна. Докажем достаточность. Пусть матрицы линейных операторов $A, B \in \mathrm{End}(V)$ одновременно триангулизуемы над $\overline{K}$ и их характеристические корни лежат в K. Согласно предложению требуется доказать, что для всякого подпространства $U \subseteq V$, инвариантного относительно A и B, линейные операторы $\pi(A), \pi(B)$ имеют общий собственный вектор. Наличие общего собственного вектора означает, что система линейных уравнений $\pi(A)(x) = \lambda x, \pi(B)(x) = \mu x$ имеет ненулевое решение $x \in V/U$ для некоторых $\lambda, \mu \in K$. Из условия имеем, что эта система имеет ненулевое решение над полем $\overline{K}$. Тогда из теории систем линейных уравнений получаем, что эта система имеет ненулевое решение и над полем K. □

Из доказанной теоремы следует, что критерии, полученные в работе [4], могут быть очевидным образом перенесены на случай произвольного поля нулевой характеристики.

Теорема 6. *Матрицы $A, B \in M_n(K)$ одновременно триангулизуемы над полем K тогда и только тогда, когда их характеристические корни лежат в K и след ассоциативного произведения любых двух мономов вида $\big[X_1, [X_2, \ldots [X_k, X_{k+1}] \ldots]\big]$, где $X_i \in \{A, B\}, k \leqslant n^2 - 1$, равен нулю.*

Теорема 7. *Матрицы $A, B \in M_n(K)$ одновременно триангулизуемы над полем K тогда и только тогда, когда их характеристические корни лежат в K и след любой матрицы вида $X_1 \cdot \cdots \cdot X_k(AB - BA)$, где $X_i \in \{A, B\}, i = 1, \ldots, k, 0 \leqslant k \leqslant n^2 - 1$, равен нулю.*

Доказательство этих теорем следует из теоремы 3 и теорем 5 и 6 [4]. □

2. Алгоритм одновременной триангулизации матриц. Мы будем исходить из предположения, что собственные значения матриц лежат в основном поле, и их можно найти. Достаточно просто, например, это сделать над полем рациональных чисел.

Пусть линейные операторы $A_1, A_2, \ldots, A_m \in \mathrm{End}(V)$ одновременно триангулизуемы. Базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$ линейного пространства V будем называть T-базисом относительно линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, если их матрицы относительно этого базиса имеют верхнетреугольный вид. Это в точности означает, что, возможно после некоторой перенумерации базисных векторов, подпространства $V_0 = \{0\}$ и $V_i = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, n$ инвариантны относительно $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Это, в свою очередь, эквивалентно тому, что для каждого $i = 0, 1, \ldots, n-1$ вектор $e_{i+1} + V_i$ является общим собственным вектором линейных операторов $\pi_i(A_1), \pi_i(A_2), \ldots, \pi_i(A_m)$, где $\pi_i : \mathrm{End}(V; V_i) \to \mathrm{End}(V/V_i)$, $i = 0, 1, \ldots, n-1$ — гомоморфизмы алгебр, определенные следующим образом: $\pi_i(A)(v + V_i) = A(v) + V_i$, $A \in \mathrm{End}(V; V_i), v \in V$.

Будем говорить, что векторы $e_1, e_2, \ldots, e_k$ образуют T-систему относительно линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, если линейные подпространства $V_0 = \{0\}$ и $V_i = \langle e_1, e_2, \ldots, e_i \rangle$, $i = 1, 2, \ldots, k-1$ инвариантны относительно линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$, и вектор $e_{i+1} + V_i$ является общим собственным вектором линейных операторов $\pi_i(A_1)$, $\pi_i(A_2), \ldots, \pi_i(A_m)$ для каждого $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Понятно, что векторы T-системы линейно независимы.

Предложение 8. *Для одновременно триангулизуемых линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ всякая T-система векторов может быть дополнена до T-базиса.*

Доказательство. Достаточно доказать, что если линейное подпространство $\langle e_1, e_2, \ldots, e_r \rangle$ отлично от V, то найдется вектор $e_{r+1} \in V$ такой, что $e_1, e_2, \ldots, e_{r+1}$ образуют T-систему. Но это следует из одновременной триангулизуемости линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ по предложению 5. □

В качестве следствия получаем следующий алгоритм построения T-базиса.

1. Находим общий собственный вектор e_1 линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$. Полагаем, что $U = \langle e_1 \rangle$.

2. Находим общий собственный вектор $e + U \in V/U$ линейных операторов $\pi(A_1), \pi(A_2), \ldots, \pi(A_m)$.

3. Полагаем, что $U' = U + \langle e \rangle$. Если $U' \neq V$, то полагаем, что $U = U'$ и переходим к пункту 2. Если $U' = V$, то построенные векторы e образуют T-базис.

Задача нахождения общего собственного вектора линейных операторов $A_1, A_2, \ldots, A_m$ при условии, что их спектры известны, сводится к решению систем линейных уравнений $A_i(x) = \lambda_i x, i = 1, 2, \ldots, m$, где в качестве λ_i мы ставим собственные значения операторов A_i до тех пор, пока система не даст ненулевое решение. Задача нахождения общего собственного вектора линейных операторов $\pi(A_1), \pi(A_2), \ldots, \pi(A_m)$ сводится к решению систем линейных уравнений $A_i(x) = \lambda_i x, i = 1, 2, \ldots, m$ по модулю подпространства U. Приведем описание построенного нами алгоритма решения систем линейных уравнений по модулю линейного подпространства, основанного на технике базисов Гребнера. Используемые в оставшейся части статьи понятия: стандартный базис подпространства, нормальная форма вектора относительно стандартного базиса (линейного подпространства) и др., см. подробнее в [5].

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — базис линейного пространства V над полем K и U — линейное подпространство в V с базисом $a_1, a_2, \ldots, a_k$, представленным в виде:

$$\begin{cases} a_1 = \alpha_{11}x_1 + \alpha_{12}x_2 + \ldots + \alpha_{1n}x_n, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ a_k = \alpha_{k1}x_1 + \alpha_{k2}x_2 + \ldots + \alpha_{kn}x_n, \end{cases} \tag{1}$$

где $\alpha_{ij} \in K$. Для удобства векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются переменными, а векторы $a_1, a_2, \ldots, a_k$, представленные в виде (1), линейными формами. Старшей переменной линейной формы $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ называется такое x_k, что $\lambda_k \neq 0$ и $\lambda_i = 0$, если $i < k$.

Базис $a_1, a_2, \ldots, a_k$ подпространства U называется стандартным, если старшие переменные векторов $a_1, a_2, \ldots, a_n$ различны, а коэффициенты при старших переменных равны 1. Редукциями относительно стандартного базиса $a_1, a_2, \ldots, a_k$ подпространства U называются линейные операторы

$$r_l : V \to V, l = 1, 2, \ldots, k,$$

такие, что

$$r_l(x_i) = \begin{cases} x_i - a_l, & \text{если } x_i \text{ — старшая переменная } a_l, \\ x_i, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Переменные, не меняющиеся при действии редукций, называются нормальными. Линейная форма называется нормальной, если она выражается через нормальные переменные. Всякий вектор с помощью конечного числа редукций относительно стандартного базиса приводится к однозначно определенному нормальному виду, который не зависит от выбора стандартного базиса. Этот нормальный вид называется нормальной формой вектора. Нормальную форму вектора v относительно подпространства U будем обозначать н.ф. (v). Заметим, что отображение $v \mapsto$ н.ф. (v) является линейным, и н.ф. $(v) = 0$ тогда и только тогда, когда $v \in U$.

Следующее предложение имеет прямое отношение к задаче решения систем линейных уравнений по модулю линейного подпространства.

Предложение 9. *Пусть U — подпространство линейного подпространства V, $A \in \mathrm{End}(V;U)$, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — базис пространства V, $x_1, x_2, \ldots, x_l$ — векторы базиса, нормальные относительно подпространства U. Тогда всякий вектор пространства V/U однозначно представляется в виде $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_l x_l + U$, $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_l \in K$, и равенство*

$$\pi(A)(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_l x_l + U) = U$$

равносильно

$$\alpha_1 \text{ н.ф.}(A(x_1)) + \alpha_2 \text{ н.ф.}(A(x_2)) + \ldots + \alpha_l \text{ н.ф.}(A(x_l)) = 0.$$

Доказательство. Докажем,что $x_1+U, x_2+U, \ldots, x_l+U$ образуют базис факторпространства V/U. Имеем, что $v+U = \text{н.ф.}\,(v)+U$ и н.ф. (v) линейно выражается через нормальные переменные $x_1, x_2, \ldots, x_l$. Поэтому $v+U$ линейно выражается через $x_1+U, x_2+U, \ldots, x_l+U$. Осталось показать, что $x_1+U, x_2+U, \ldots, x_l+U$ линейно независимы. Пусть $\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_l x_l+U = U$, тогда $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_l x_l \in U$ и, в силу нормальности, $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_l x_l$ равен 0. Так как $x_1, x_2, \ldots, x_l$ линейно независимы, то отсюда получаем: $\alpha_1 = \ldots = \alpha_l = 0$, что и требовалось.

Далее, равенство $\pi(A)(\alpha_1 x_1+\alpha_2 x_2+\ldots+\alpha_l x_l+U) = U$ означает, что $\alpha_1 A(x_1)+\alpha_2 A(x_2)+\ldots+\alpha_l A(x_l) \in U$, что эквивалентно $\alpha_1\,\text{н.ф.}(A(x_1)) + \alpha_2\,\text{н.ф.}(A(x_2)) + \ldots + \alpha_l\,\text{н.ф.}(A(x_l)) = \text{н.ф.}(\alpha_1 A(x_1) + \text{н.ф.}\alpha_2 A(x_2) + \ldots + \alpha_l A(x_l)) = 0$. □

Пример реализации предложенного алгоритма нахождения T-базиса и приведения матриц к верхнетреугольному виду рассмотрим в следующем пункте.

3. Пример реализации алгоритма одновременной триангулизации матриц. Пусть

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 3 \end{pmatrix},$$

тогда матрицы

$$A = C^{-1}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -3 & -6 \\ 4 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & -6 & 7 & 8 \\ 4 & 5 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B = C^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} C = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 & 4 \\ -2 & 1 & -1 & -2 \\ -2 & 11 & -11 & -18 \\ -2 & -7 & 5 & 8 \end{pmatrix}$$

одновременно триангулизуемы. Покажем на примере матриц A и B, как найти подобие, приводящее эти матрицы к верхнетреугольному виду.

Шаг 1. Находим общие собственные векторы линейных операторов A и B. Их характеристические многочлены имеют соответственно вид: $(t-1)^3(t-3)$ и $(t-2)^3(t+2)$. Для нахождения общих собственных векторов решаем системы линейных уравнений

$$\begin{cases} A(x) = \lambda x, \\ B(x) = \mu x, \end{cases}$$

где $\lambda \in \{1, 3\}, \mu \in \{2, -2\}$. При $\lambda = 1, \mu = 2$ система имеет двумерное пространство решений. Стандартный базис пространства решений состоит из векторов $(1, -1, -1, 0), (0, 1, 5, -3)$.

Шаг 2. Полагаем, что $U = \langle(1, -1, -1, 0), (0, 1, 5, -3)\rangle$. Находим общие собственные векторы линейных операторов $\pi(A)$ и $\pi(B)$. Для этого решаем системы линейных уравнений

$$\begin{cases} A(x) \equiv \lambda x \pmod U, \\ B(x) \equiv \mu x \pmod U, \end{cases} \tag{2}$$

где $\lambda \in \{1,3\}, \mu \in \{2,-2\}$. Рассмотрим систему (2) при $\lambda = 3, \mu = 2$. Векторы $u = (0,0,1,0), v = (0,0,0,1)$ базиса пространства V, нормальные относительно подпространства U, образуют базис факторпространства V/U. Тогда по предложению 9 рассматриваемая система равносильна системе

$$\begin{cases} \alpha u_1 + \beta v_1 = 0, \\ \alpha u_2 + \beta v_2 = 0, \end{cases} \tag{3}$$

где $u_1 = $ н.ф.$(A(u)) = (0,0,6,-4)$, $v_1 = $ н.ф.$(A(v)) = (0,0,12,-8)$, $u_2 = $ н.ф.$(B(u)) = (0,0,-12,8)$, $v_2 = $ н.ф.$(B(v)) = (0,0,-24,16)$. Решая уравнения системы (3), которые оказываются пропорциональными одному уравнению $\alpha + 2\beta = 0$, получаем, что вектор $(0,0,2,-1)$ является собственным вектором линейных операторов $\pi(A)$ и $\pi(B)$.

Шаг 3. Полагаем, что $U = \langle(1,-1,-1,0),(0,1,5,-3),(0,0,2,-1)\rangle$. Тогда вектор $(0,0,0,1)$, нормальный относительно подпространства U, является собственным вектором линейных операторов $\pi(A)$ и $\pi(B)$.

Таким образом получаем, что векторы $e_1 = (1,-1,-1,0)$, $e_2 = (0,1,5,-3)$, $e_3 = (0,0,2,-1)$, $e_4 = (0,0,0,1)$ образуют T-базис. Действительно, полагая, что

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 5 & 2 & 0 \\ 0 & -3 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

получаем:

$$D^{-1}AD = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$D^{-1}BD = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -12 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Список литературы

1. *McCoy N. H.* On the characteristic roots of matrix polynomials // Bull. Amer. Math. Soc. – 1936. – V. 42. – P. 592–600.

2. *Икрамов Х. Д., Савельева Н. В., Чугунов В. Н.* О рациональных критериях существования общих собственных векторов или инвариантных подпространств // Программирование. – 1997. – № 3. – С. 43–57.

3. *Хорн Р., Джонсон Ч.* Матричный анализ. – М., Мир. – 1989.

4. *Альпин Ю. А., Корешков Н. А.* Об одновременной триангулизуемости матриц // Мат. заметки. – Т. 68. – Вып. 5. – 2000. – С. 648–652.

5. *Латышев В. Н.* Комбинаторная теория колец. Стандартные базисы. – М., МГУ. – 1988.

On simultaneous triangularization of matrices over arbitrary field

N. V. Lesnichenko, O. K. Ten

The necessary and sufficient conditions of simultaneous triangularizability of matrices over arbitrary field of characteristic 0 are obtained. The algorithm of simultaneous triangularization of matrices based on Groebner bases technique is suggested.

