2006 г № 11

Труды ФОРА

РЕШЕНИЕ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ МЕТОДОМ МОДУЛИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ (НА ПРИМЕРЕ УРАВНЕНИЯ СВОБОДНЫХ МАЛЫХ КОЛЕБАНИЙ СТРУНЫ)

Р. Цей

Адыгейский государственный университет, г. Майкоп

На примере численного решения обратной задачи для дифференциального уравнения, описывающего процесс свободных малых колебаний струны, показана эффективность метода модулирующих функций.

Введение

Идея применения М-метода для решения обратных задач восходит к работам Дж. Лоэба и Г. Кахена (J. Loeb, G. Cahen) [1, 2]. Возможность применения М-метода для решения задач нефтегазовой науки впервые была высказана В.Б. Георгиевским и им были разработаны унифицированные алгоритмы для решения обратных задач подземной гидрогазодинамики [3]. В работах [4,5] сделана программная реализация на основе унифицированных алгоритмов, разработанных в работах В.Б. Георгиевского [см., например, 3]. В работе [6] метод модулирующих функций обобщен на случай любой степени полиномов разложения неизвестных параметров газоносного пласта.

М-метод позволяет определить параметры модели без использования решения краевых задач. Идея М-метода состоит в том, что дифференциальное уравнение умножается на специальные «модулирующие» функции и интегрируется по частям. В результате, происходит «освобождение» от операции дифференцирования решения (исходного дифференциального уравнения) и «переход» этой операции к модулирующим функциям, которые можно выбирать достаточно гладкими. В итоге, исходное дифференциальное уравнение заменяется его интегральным аналогом.

Особо отметим, что в полученных выражениях отсутствуют производные от экспериментальных функций, что позволяет ликвидировать трудности, связанные с непосредственным дифференцированием экспериментальных функций. Эти трудности проистекают из-за того, что операция дифференцирования экспериментальных функций является некорректной.

Проиллюстрируем эффективность М-метода на примере уравнения свободных малых колебаний струны.

Решения задачи определения коэффициента в уравнении свободных малых колебаний струны

В [9, с. 334] приводится следующая задача.

Дано уравнение свободных малых колебаний струны

$$\frac{\partial^2 U}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} \quad (U = U(x,t)) \tag{1}$$

и даны начально-краевые условия:

$$\begin{gathered} U(0,t) = 0 \text{ при всех } t, \\ U(l,t) = 0 \text{ при всех } t \text{ (концы струны закреплены)}, \end{gathered} \tag{2}$$

$$U(x,0) = f(x),\ \frac{\partial U(x,0)}{\partial t} = 0 \text{ при всех } x. \tag{3}$$

Последнее условие означает, что в начальный момент времени t=0 струна никак не движется: мы оттянули струну, придав ей форму линии $U= f(x)$, и затем опустили ее. В (1) $U(x,t)$ есть форма струны в момент времени t. Дополнительно дано: $l=\pi$, $a=1$ и $f(x)=\sin^3 x$

Примечание. Уравнение задачи о колеблющейся струне было впервые выписано и решено в 1747 г. Ж.Л. Д'Аламбером. Но большее значение имело несколько более позднее решение той же задачи, найденное Даниилом Бернулли (1753 г.).

Аналитически решение задачи (1)-(3) имеет вид

$$U(x,t)=\frac{3}{4}\cos(t)\sin(x)-\frac{1}{4}\cos(3t)\sin(3x)\,. \tag{4}$$

Теперь, предположим, что коэффициент a^2 неизвестен. Обратная задача состоит в том, чтобы определить коэффициент a^2. ($a^2=R/\sigma$, где R – сила натяжения струны и σ – (линейная) плотность струны).

Решим эту задачу в общем виде, применяя метод модулирующих функций.

Умножим обе части уравнения (1) на гладкие класса C^2 функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(t)$ и проинтегрируем полученное уравнение соответственно по отрезкам $x_0\le x\le x_1$, $t_0\le t\le t_1$:

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\varphi_1(x)\varphi_2(t)dxdt=a^2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\varphi_1(x)\varphi_2(t)dxdt\,, \tag{5}$$

Сведя двойные интервалы к повторным, перепишем (4) в виде:

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi_1(x)\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\varphi_2(t)dtdx=a^2\int_{t_0}^{t_1}\varphi_2(t)\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\varphi_1(x)dxdt\,. \tag{6}$$

Выберем «модулирующие» функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(t)$, удовлетворяющими следующим условиям

$$\begin{gathered}\varphi_1(x_0)=\varphi_1(x_1)=0\,,\ \varphi_2(t_0)=\varphi_2(t_1)=0\,,\\ \varphi_1'(x_0)=\varphi_1'(x_1)=0\,,\ \varphi_2'(t_0)=\varphi_2'(t_1)=0\,.\end{gathered} \tag{7}$$

Применяя к интегралам $\int_{t_0}^{t_1}\frac{\partial^2 U}{\partial t^2}\varphi_2(t)dt$ и $\int_{x_0}^{x_1}\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}\varphi_1(x)dx$ в (6) по два раза формулу интегрирования по частям, с учетом (7) получим

$$\int_{x_0}^{x_1}\varphi_1(x)\int_{t_0}^{t_1}U\frac{\partial^2\varphi_2(t)}{\partial t^2}dtdx=a^2\int_{t_0}^{t_1}\varphi_2(t)\int_{x_0}^{x_1}U\frac{\partial^2\varphi_1(x)}{\partial x^2}dxdt\,,$$

или

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1(x)\varphi_2''(t)dxdt=a^2\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1''(x)\varphi_2(t)dxdt\,. \tag{8}$$

Теперь из равенства (8) определим искомый коэффициент a^2:

$$a^2=\frac{\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1(x)\varphi_2''(t)dxdt}{\int_{t_0}^{t_1}\int_{x_0}^{x_1}U\varphi_1''(x)\varphi_2(t)dxdt}\,. \tag{9}$$

Подставим (4) в (9) и выберем модулирующие функции $\varphi_1(x)$ и $\varphi_2(t)$, например, в виде:

$\varphi_1(x)=(x-x_0)^2(x_1-x)^2$, $\varphi_2(t)=(t-t_0)^2(t_1-t)^2$.

Область интегрирования: $0\le x\le\pi$, $0\le t\le 1$.

Для вычисления двойных интегралов, стоящих в числителе и знаменателе дроби (8) следует свести их к повторным, а для вычисления последних можно применить любые известные формулы численного интегрирования.

Таким образом, нахождение искомого коэффициента a^2 в уравнении (1) сводится к вычислению двойных интегралов от выражений, содержащих саму функцию U (но не ее производные!) и модулирующие функции со своими производными.

На основе вышеприведенного метода в среде Turbo Pascal составлен комплекс программ для определения коэффициента a^2. Результаты вычислений приведены в таблице 1.

Таблица 1. Результаты вычислений (точное решение: a^2=1)

число разбиений интервала по осям x,t	значение коэфф, a^2 и время вычислений	Метод вычисления интегралов				
		Средних прямоугольников	Трапеций	Симпсона	Гаусса (с 2-я узлами)	Монте Карло
10	a^2	1,25752236032025744	-2,66665403605984832	-3,25792564023937792	0,98222638154279936	4,66696668347182592
	время	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс
20	a^2	1,06352939688704096	0,807397250806655488	0,995671581686020224	0,995984914327102336	3,51308056434224512
	время	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс
50	a^2	1,01012648522149488	0,961439839697792128	0,999380631368212352	0,999402947001976704	0,385507483785262784
	время	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс	0м:0с:0мс
100	a^2	1,00253025569471136	0,984738107583162496	0,999851789981784448	0,999854657305053696	0,633083344455876608
	время	0м:0с:60мс	0м:0с:110мс	0м:0с:50мс	0м:0с:60мс	0м:0с:50мс
200	a^2	1,00063247856663568	0,993926229727597952	0,99996379737000256	0,999964160246184832	0,731605456359732608
	время	0м:0с:220мс	0м:0с:390мс	0м:0с:270мс	0м:0с:220мс	0м:0с:160мс
500	a^2	1,00010119274657616	0,99798776094041408	0,999994290146159744	0,999994313533017344	0,886560515681041664
	время	0м:1с:150мс	0м:2с:140мс	0м:1с:540мс	0м:1с:270мс	0м:1с:100мс
1000	a^2	1,00002529805005504	0,999035903077136128	0,999998579456022272	0,99999858238598016	0,904749963619255424
	время	0м:4с:560мс	0м:8с:790мс	0м:6с:260мс	0м:5с:330мс	0м:5с:220мс
2000	a^2	1,00000632450592944	0,982938772028921984	0,983397391562764288	0,999999646099328128	0,97745232723491456
	время	0м:20с:760мс	0м:34с:770мс	0м:27с:300мс	0м:31с:360мс	0м:18с:70мс
5000	a^2	1,00000101192357824	0,993182094799673344	0,993363226239614976	0,999999943427015424	1,002583562946228
	время	1м:55с:390мс	3м:48с:0мс	2м:36с:980мс	2м:21с:100мс	2м:5с:70мс

Замечание. Все вычисления производились на ПЭВМ Pentium II (300 MHz), 128 MB. В качестве основного типа вещественных чисел использован тип Double (до 18 знаков в дробной части записи числа).

Заключение

На примере численного решения обратной задачи для дифференциального уравнения, описывающего процесс свободных малых колебаний струны, показана эффективность метода модулирующих функций.

Следует напомнить, что при применении М-метода отсутствует принципиальный источник погрешности – использование решений прямых краевых задач. Источником погрешностей могут служить только численные методы решения интегралов, ошибки округления в пределах типов вещественных чисел, а также аппроксимация функций. Но эти погрешности можно свести к минимуму, повысив точность вычислений с использованием вычислительных мощностей современных ПЭВМ.

В заключении автор выражает благодарность профессору М.М. Шумафову за внимание к настоящей работе.

Литература

1. *Loeb J., Cahen G.* Extraction, a partik des enregistrements de mesures, des parametres dynamiques d um system. // Automatisme. – 1963. – № 12. – PP. 17-28.

2. *Loeb J., Cahen G.* More about process identification. // Trans. on Automatic Control. – 1965. – PP. 359-361.

3. *Георгиевский В.Б.* Унифицированные алгоритмы для определения фильтрационных параметров. Справочник. – Киев: Наукова думка, 1971. – 328 с.

4. *Лукнер Л., Шестаков В.М.* Моделирование геофильтрации. – М.: Недра,1976. – 407 с.

5. *Трофимов В.В., Батищева Г.А.* Реализация на ЭВМ унифицированных алгоритмов В.Б. Георгиевского. – Об. научн. тр. ЮжНИИгидротех. и мелиор., 1976, вып. 9. – С. 111-114.

6. *Юдин А.И., Юдина О.К.*. Расчет фильтрационно-ёмкостных параметров по промысловым данным эксплуатации газового месторождения // Термодинамика кооперативных процессов в гетерогенных средах. Тюмень, 1985. – С. 80-85.

7. *Мирзаджанзаде А.Х., Хасанов М.М., Бахтизин Р.Н.* Моделирование процессов нефтегазодобычи. Нелинейность, неравновесность, неопределенность. – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2004. – 368 с.

8. *Закиров С.Н., Лапук Б.Б.* Проектирование и разработка газовых месторождений. – М.: Недра, 1974. – С. 39.

9. *Зельдович Я.Б., Яглом И.М.* Высшая математика для начинающих физиков и техников. – М.: Наука, 1982. – 512 с.

The solution of inverse problem for equations of mathematical physics with modulating-functions method

R. Cei

The efficiency of modulating functions method on example numerical solution of inverse problem for differential equation of oscillating string is demonstrate.

