К ТЕОРЕМЕ РИЧЧИ В ТЕРМИНАХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНОГО ИНТЕГРАЛА

Л.Ж. Паланджянц

Майкопский государственный технологический университет, г. Майкоп

В статье рассматриваются приложения теоремы Риччи, сформулированной в терминах мультипликативного интеграла: указывается метод вычисления треугольных связностей и вычисляется криволинейный мультипликативный интеграл от коэффициентов связности, согласованной с римановой метрикой на группе SU(2).

1. Пусть $g=(g_{ij}), i,j=1,2,...,n$ – матрица метрического тензора; $\Gamma_k=(\Gamma^i_{jk}), k=1,2,...,n$ – коэффициенты связности, согласованные с метрикой в пространстве переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$;

$H=\overset{\cup}{\int_c} E+\Gamma_k dx^k$ – криволинейный мультипликативный интеграл.

Теорема Риччи утверждает, ковариантная производная тензора g_{ij} равна нулю: $\nabla_k g_{ij}=0$.

В терминах мультипликативного интеграла теорема Риччи формулируется следующим образом [1]:

Теорема Риччи:

$$g=H^T g_0 H\,,\ g_0=\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22}\end{pmatrix} – \textit{постоянная матрица;}\ \det g_0=1.$$

Приведем подтверждающие примеры.

Пример1. Рассмотрим метрику [2]:

$$ds^2=\frac{4}{ch^2 2v}(dv^2+d\alpha^2).$$

Тогда $g=\dfrac{4}{ch^2 2v}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $g_0=4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}=4E;$

$\Gamma_1=-2th2v\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}$, $\Gamma_2=2th2v\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}$;

$H=\overset{\cup}{\int_c} E+\Gamma_1 dv+\Gamma_2 d\alpha$; $c{:}v=\alpha.$

Воспользуемся формулой (см., например, [3, с.118]):

$$\exp\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix}=\exp\left(\frac{a+d}{2}\right)\cdot\left(ch\rho\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1\end{pmatrix}+\frac{sh\rho}{\rho}\begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} & b \\ c & \frac{d-a}{2}\end{pmatrix}\right),$$

где $\rho=\sqrt{\left(\dfrac{a-d}{2}\right)^2+bc}$. Тогда

$$H=\overset{\cup}{\int_c} E+\Gamma_1 dv+\Gamma_2 d\alpha=\frac{1}{ch2v}\begin{pmatrix} \cos(\ln ch2v) & \sin(\ln ch2v) \\ -\sin(\ln ch2v) & \cos(\ln ch2v)\end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$g = H^T g_0 H = \frac{1}{ch2v}\begin{pmatrix} \cos(\ln ch2v) & -\sin(\ln ch2v) \\ \sin(\ln ch2v) & \cos(\ln ch2v) \end{pmatrix} \times$$

$$\times 4E \cdot \frac{1}{ch2v}\begin{pmatrix} \cos(\ln ch2v) & \sin(\ln ch2v) \\ -\sin(\ln ch2v) & \cos(\ln ch2v) \end{pmatrix} = \frac{4}{ch^2 2v} E.$$

Пример 2. Рассмотрим метрику [2]:

$$ds^2 = 4(d\Phi^2 + \sin^2 2\Phi d\alpha^2).$$

Тогда $g = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 2\Phi \end{pmatrix}$, $g_0 = 4\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 4E;$

$$\Gamma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 2ctg2\Phi \end{pmatrix},\ \Gamma_2 = \begin{pmatrix} 0 & -\sin 4\Phi \\ 2ctg2\Phi & 0 \end{pmatrix};$$

$$H = \overset{\cup}{\int_c} E + \Gamma_1 d\Phi + \Gamma_2 d\alpha;\ c{:}\ \Phi = \alpha.$$

Тогда

$$H = \overset{\cup}{\int_c} E + \Gamma_1 d\Phi + \Gamma_2 d\alpha = \begin{pmatrix} \cos(\sin 2\Phi) & \sin(\sin 2\Phi) \\ -\sin(\sin 2\Phi) & \cos(\sin 2\Phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin 2\Phi \end{pmatrix}.$$

Следовательно,

$$g = H^T g_0 H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin 2\Phi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos(\sin 2\Phi) & -\sin(\sin 2\Phi) \\ \sin(\sin 2\Phi) & \cos(\sin 2\Phi) \end{pmatrix} \times$$

$$\times 4E \cdot \begin{pmatrix} \cos(\sin 2\Phi) & \sin(\sin 2\Phi) \\ -\sin(\sin 2\Phi) & \cos(\sin 2\Phi) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin 2\Phi \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 2\Phi \end{pmatrix}.$$

2. Применение теоремы Риччи к мультипликативному интегрированию треугольных связностей.

Рассмотрим криволинейный мультипликативный интеграл

$$H = \overset{\cup}{\int_c} E + \Gamma_k dx^k, \tag{1}$$

где $H = (h_{ij})$ имеет верхний треугольный вид, Γ_k - коэффициенты связности, согласованные с метрикой $g = (g_{ij})$, $i, j = 1,2,\ldots,n$.

Сформулирует задачу. *Найти метрики* $g = (g_{ij})$, *для которых интеграл (1) вдоль произвольной гладкой кривой* $c: x^k = x^k(t)$ *имеет треугольный вид.*

Ограничимся рассмотрением случая $n = 2$. Пусть $H = \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}$.

Тогда метрика $g = (g_{ij})$ примет вид $g = H^T g_0 H$, где $g_0 = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix}$;

$$\begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{12} & g_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_{11} & 0 \\ h_{12} & h_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{12} & C_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} \\ 0 & h_{22} \end{pmatrix}.$$

Выразим элементы матрицы $g = (g_{ij})$ через элементы матрицы $H = (h_{ij})$.

Отсюда получаем, что

$$g_{11} = C_{11} h_{11}^2,$$
$$g_{12} = C_{11} h_{11} h_{12} + C_{12} h_{11} h_{22},$$
$$g_{22} = C_{11} h_{12}^2 + 2C_{12} h_{12} h_{22} + C_{22} h_{22}^2.$$

Выразим элементы матрицы $H=(h_{ij})$ через элементы матрицы $g=(g_{ij})$.

$$h_{11}=\sqrt{\frac{g_{11}}{C_{11}}},$$

$$h_{12}=\frac{g_{12}}{\sqrt{C_{11}g_{11}}}-C_{12}\sqrt{\frac{\det g}{C_{11}g_{11}}},$$

$$h_{22}=\frac{C_{11}\det g}{g_{11}}.$$

Условие верхней треугольности подынтегральной матричной функции интеграла (1) имеет вид:

$$\Gamma_{11}^2 dx+\Gamma_{12}^2 dy=0.$$

Поскольку интегрируемость предполагается вдоль произвольной кривой, то потребуем, чтобы $\Gamma_{11}^2=0$, $\Gamma_{12}^2=0$.

Следовательно, получим систему уравнений

$$\begin{cases} g^{22}\left(2\dfrac{\partial g_{12}}{\partial x}-\dfrac{\partial g_{11}}{\partial y}\right)+g^{12}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial x}=0 \\ g^{12}\dfrac{\partial g_{11}}{\partial y}+g^{22}\dfrac{\partial g_{22}}{\partial x}=0 \end{cases}$$

Учитывая, что $g^{11}=\dfrac{g_{22}}{\det g}$; $g^{12}=-\dfrac{g_{12}}{\det g}$, получаем

$$\begin{cases} -g_{12}g_{11x}+g_{11}\left(2g_{12x}-g_{11y}\right)=0 \\ -g_{12}g_{11y}+g_{11}g_{22x}=0 \end{cases} \tag{2}$$

Представим первое уравнение системы (2) в виде:

$$\left(\frac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}\right)_x=\left(\sqrt{g_{11}}\right)_y.$$

Положим $\sqrt{g_{11}}=\varphi_x+C_1(x)$, $\dfrac{g_{12}}{\sqrt{g_{11}}}=\varphi_y+C_2(y)$, где $\varphi(x,y)$, $C_1(x)$, $C_2(y)$ – произвольные гладкие функции. Следовательно,

$$g_{11}=(\varphi_x+C_1(x))^2,$$

$$g_{12}=(\varphi_x+C_1(x))\cdot(\varphi_y+C_2(y)).$$

Второе уравнение системы (2) запишем в виде: $(g_{22}-(\varphi_y+C_2(y))^2)_x=0$ или $g_{22}=(\varphi_y+C_2(y))^2+C_3(y)$, где $C_3(y)$ – произвольная положительная гладкая функция, поскольку $\det g>0$.

Таким образом, найдена метрика $g=(g_{ij})$ и вычислен мультипликативный интеграл $H=(h_{ij})$ в конечном виде.

Интересно распространить предложенный метод интегрирования на случай $n>2$.

3. Мультипликативный интеграл на группе $SU(2)$.

Рассмотрим на матричной группе $SU(2)$ форму $\omega=dg\cdot g^{-1}$, где

$$g=\begin{pmatrix}\alpha & \beta \\ -\bar\beta & \bar\alpha\end{pmatrix},\ \det g=1,\ \alpha=x_1+ix_2, \beta=x_3+ix_4,\ x_k\in R, k=1,2,3,4.$$

Полагая $ds^2=sp(\omega\cdot\omega^T)$, получаем риманову метрику [4, с.42]:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 + dx_4^2$$

Учитывая, что $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 = 1$, получаем, что матрица римановой метрики имеет вид:

$$G = \frac{2}{x_4^2}\begin{pmatrix} x_4^2 + x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_4^2 + x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_4^2 + x_3^2 \end{pmatrix} \qquad (3)$$

Коэффициенты связности, согласованные с метрикой (3) примут вид:

$$\Gamma_1 = \frac{x_1}{x_4^2}\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_1 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \\ x_2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_2 = \frac{x_2}{x_4^2}\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_1 & 0 \\ 0 & x_2 & 0 \\ 0 & x_3 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Gamma_3 = \frac{x_3}{x_4^2}\begin{pmatrix} x_1^2 & x_1x_2 & x_1x_3 \\ x_1x_2 & x_2^2 & x_2x_3 \\ x_1x_3 & x_2x_3 & x_3^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & x_1 \\ 0 & 0 & x_2 \\ 0 & 0 & x_3 \end{pmatrix}.$$

Непосредственное вычисление мультипликативного интеграла

$$\overset{\cup}{\int} E + \Gamma_k dx_k \qquad (4)$$

не представляется возможным, поэтому преобразуем метрику (3) к виду, удобному для вычисления интеграла (4) в конечном виде.

Приведем матрицу (3) к диагональному виду. Сделаем замену переменных

$$x_i = x_i(u_1, u_2, u_3),\ i=1,2,3. \qquad (5)$$

Явный вид преобразований (5) будет установлен ниже.

Вычисления показывают, что характеристический многочлен матрицы (1) имеет вид:

$$\lambda^3 - (2 + 2 + \frac{2}{x_4^2})\lambda + (4 + \frac{4}{x_4^2} + \frac{4}{x_4^2})\lambda - \frac{8}{x_4^2} = 0\,.$$

Следовательно, матрица (3) приведется к диагональному виду:

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{x_4^2} \end{pmatrix} \qquad (6)$$

Введем обозначение: $c_{ij} = \dfrac{\partial x_i}{\partial u_j}$ и вычислим c_{ij} из уравнения $GC = C\tilde{G}.$ Получаем систему уравнений:

$$x_1c_{11} + x_2c_{21} + x_3c_{31} = 0,$$
$$x_1c_{12} + x_2c_{22} + x_3c_{32} = 0,$$
$$-(x_2^2 + x_3^2)c_{13} + x_1x_2c_{23} + x_1x_2c_{33} = 0,$$
$$x_1x_2c_{13} - (x_1^2 + x_3^2)c_{23} + x_2x_3c_{33} = 0.$$

Можно проверить, что векторы $(c_{11}, c_{21}, c_{31}), (c_{12}, c_{22}, c_{32}), (c_{13}, c_{23}, c_{33})$ соответственно ортогональны векторам: $(x_2, -x_1, 0), (x_3, 0, x_1), (x_1, x_2, x_3)$.

Таким образом, получаем:

$$c_{11} = x_2, c_{12} = x_3, c_{13} = x_1,$$
$$c_{21} = -x_1, c_{22} = 0, c_{23} = x_2,$$
$$c_{31} = 0, c_{32} = -x_1, c_{33} = x_3.$$

Следовательно, матрица C примет вид:

$$C = \begin{pmatrix} x_2 & x_3 & x_1 \\ -x_1 & 0 & x_2 \\ 0 & -x_1 & x_3 \end{pmatrix}$$

Следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial u_1}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial u_2}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial}{\partial u_3}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \tag{7}$$

Из системы (7) следует, что

$$d\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot du_1 + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot du_2 + \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot du_3 \right] \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \tag{8}$$

Интегрируя уравнение (8), получаем:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \exp\begin{pmatrix} u_3 & u_1 & u_2 \\ -u_1 & u_3 & 0 \\ -u_2 & 0 & u_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

где (x_1^0, x_2^0, x_3^0) – постоянная интегрирования.

Воспользуемся формулой (см., например, [3, с.118]):

$$\exp\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix} = \cos r \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin r}{r}\begin{pmatrix} 0 & a & c \\ -a & 0 & b \\ -c & -b & 0 \end{pmatrix} + \frac{1-\cos r}{r^2}\begin{pmatrix} b^2 & -bc & ab \\ -bc & c^2 & -ac \\ ab & -ac & a^2 \end{pmatrix},$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$. Тогда равенство (9) запишется в виде:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} &= [[\cos\sqrt{u_1^2 + u_2^2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\sin\sqrt{u_1^2 + u_2^2}}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \\ &+ \frac{1-\cos\sqrt{u_1^2 + u_2^2})}{u_1^2 + u_2^2} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & u_2^2 & -u_1 u_2 \\ 0 & -u_1 u_2 & u_1^2 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} \exp u_3 & 0 & 0 \\ 0 & \exp u_3 & 0 \\ 0 & 0 & \exp u_3 \end{pmatrix}] \cdot \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \\ x_3^0 \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

Можно убедиться в том, что $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = e^{2u_3}((x_1^0)^2 + (x_2^0)^2 + (x_3^0)^2)$, откуда следует, что $x_4^2 = 1 - e^{2u_3}$.

Таким образом, преобразование (10) приводит матрицу (1) к диагональному виду:

$$\tilde{G} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2(1 - e^{2u_3})^{-1} \end{pmatrix} \tag{11}$$

Коэффициенты связности, согласованные с метрикой (11) примут вид:

$$\tilde{\Gamma}_1 = 0, \quad \tilde{\Gamma}_2 = 0, \quad \tilde{\Gamma}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \frac{e^{2u_3}}{1-e^{2u_3}}.$$

Тогда мультипликативный интеграл $\overset{\cup}{\int} E + \tilde{\Gamma}_k du_k$ вычисляется в конечном виде:

$$\overset{\cup}{\int} E + \tilde{\Gamma}_k du_k = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{\sqrt{c}\cdot\sqrt{1-e^{2u_3}}} \end{pmatrix}$$

где с − постоянная интегрирования, точное значение которой можно вычислить из теоремы Риччи, сформулированной в терминах мультипликативного интеграла [1]:

$$\tilde{G} = \overset{\cup}{\int} E + \Gamma_k du_k \cdot \tilde{G}_0 \cdot \overset{\cap}{\int} E + \Gamma_k^T du_k, \quad \det \tilde{G}_0 = 1.$$

Можно проверить, что $c = \dfrac{1}{8}$. Действительно,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{1-e^{2u_3}}} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{1}{4} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{1-e^{2u_3}}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \dfrac{2}{1-e^{2u_3}} \end{pmatrix}$$

Таким образом, с помощью преобразования координат (10) мультипликативный интеграл вычислен в конечном виде.

Литература

1. *Паланджянц Л.Ж.* Основные понятия римановой геометрии в терминах мультипликативного интеграла.// Труды физического общества республики Адыгея. – Майкоп. – 1999. - № 4. - С. 40-50.
2. *Паланджянц Л.Ж.* Об одном приеме вычисления мультипликативного интеграла методами теории поверхностей. //Дифференц. Уравнения. – 1983. - Т. 19. - № 9. - С. 1630–1632.
3. *Кириллов А.А.* Элементы теории представлений. – М.: Наука, 1978.
4. *Желобенко Д.П.* Компактные группы Ли и их представления. – М.: Наука, 1970. – 664 с.

On Ricci's theorem in multiplicative integral terms

L.Zh. Palandzhyants

In article appendices of Ricci's theorem formulated in terms of multiplicative integral are considered. The method of calculation triangular connection is underlined. The curvilinear multiplicative integral from factors of the connectivity coordinated with Riemann metrics on group SU(2) is calculated.

